

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 19 (1946)
Heft: V

Artikel: Ein Beitrag zum Deuteronproblem
Autor: Villars, Felix
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111708>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 21.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ein Beitrag zum Deuteronproblem

von Felix Villars.

(20. Juni 1946.)

Die tiefsten Zustände des zwei-Nukleon-Systemes werden untersucht im Rahmen einer Mesontheorie, die die Existenz "isobarer Zustände" des Systemes vorsieht (starke Kopplung). Besondere Beachtung findet der Einfluss der Tensorkraft. Es zeigt sich, dass der von der Erfahrung geforderte Abstand der Bindungsenergien der beiden „S-Zustände“ (3S und 1S) die Anregungsenergie der Isobaren auf Werte > 200 MeV beschränkt. In diesem Falle sind letztere ohne wesentlichen Einfluss auf die Anisotropie der Proton-Neutron-Streuung.

I. Einleitung.

Bis jetzt haben sich jedem Versuch, zu einer quantitativ befriedigenden Deuterontheorie zu gelangen, grosse Schwierigkeiten in den Weg gestellt; dies auch, wenn man sich, wie das im folgenden geschehen soll, auf den „mechanischen“ Aspekt des Problemes beschränkt und feinere Fragen (magnetische Momente) vorläufig beiseite schiebt. Es verbleiben dann im wesentlichen vier Punkte, die eine mit der Erfahrung übereinstimmende Darstellung erfordern. Dies sind die Bindungsenergien der zwei untersten Deuteronzustände (3S und 1S), das elektrische Quadrupolmoment des erstern und die für die Anisotropie der Proton-Neutron-Streuung massgebende P -Wechselwirkung. Die grösste Schwierigkeit bereitet jeweilen der zuletzt genannte Punkt. Eine rechnerische Betrachtung zeigt nämlich, dass die Anisotropie in geradezu ausserordentlich empfindlicher Weise von der Stärke der P -Wechselwirkung abhängt. Im allgemeinen sind aber die Konstanten der Kraftansätze bereits festgelegt durch die Forderung, die Deuteron S -Zustände richtig zu beschreiben. Übergang zu P -Zuständen bedeutet dann Paritätswechsel der räumlichen Eigenfunktionen; genaue Kenntnis der Streuanisotropie ergäbe demnach die Möglichkeit, die einzelnen Wechselwirkungsansätze auf Grund ihres charakteristischen Verhaltens bei Paritätswechsel der Eigenfunktion zu begutachten. Leider sind die Ergebnisse der Anisotropiemessungen¹⁾ nicht von der ihrer Wichtigkeit entsprechenden Genauigkeit; es soll weiter unten auseinandergesetzt werden, dass sogar Gründe dafür bestehen, gewisse Ergebnisse in quantitativer

Hinsicht stark anzuzweifeln, wogegen sie qualitativ durchaus richtig sein mögen.

Den Vorzug genießen aus grundsätzlichen und experimentellen Erwägungen die Ansätze, die zu ladungsunabhängigen Kräften führen (ladungssymmetrische Theorien). Ein Charakteristikum dieser Ansätze ist aber — etwas grob ausgedrückt — der Vorzeichenwechsel der Kräfte bei Paritätswechsel, d. h. zu den gezwungenermaßen anziehenden S -Potentialen gehören abstossende P -Potentiale. Der Sachverhalt wird indessen etwas komplizierter, falls man eine Wechselwirkung vom Typus der Spin-Bahn-Kopplung (Tensorkraft) hinzuzieht, was zur Deutung des elektrischen Quadrupolmomentes (Q) erforderlich ist. Die Tensorkraft spaltet nämlich die Triplett- P -Terme auf (wobei die Lage des „Schwerpunktes“ erhalten bleibt); in der symmetrischen Theorie ergibt sich der 3P_0 -Term als der tiefstliegende, falls man das Vorzeichen der Tensorkraft der Forderung, dass Q positiv ist, anpasst. (Im Sinne einer Mesontheorie mit Vektor- und Pseudoskalarfeld bedeutet ein positives Q , dass das vektorielle Meson das schwerere ist; vgl. ²). Die Messungen¹) deuten nun übereinstimmend darauf hin, dass die massgebenden P -Potentiale anziehend sind; dies ist aber in der symmetrischen Theorie in Betracht des kleinen Gewichtes des 3P_0 -Termes nicht der Fall. Dieser Ansatz lässt also anscheinend nur die Alternative zu, dass entweder das Quadrupolmoment des Deuteron-Grundzustandes oder aber die Anisotropie der Proton-Neutron-Streuung das falsche Vorzeichen erhält*).

Diesem Einwand ist nun aber die symmetrische Theorie im Grenzfall „starker Kopplung“ wenigstens prinzipiell nicht ausgesetzt³). Die in diesem Falle auftretenden angeregten Zustände (Isobaren) bewirken nämlich eine Verschiebung der adiabatischen Potentiale im Sinne stärkerer Anziehung und dies um so mehr, je kleiner die Anregungsenergie der Isobaren ist. So werden speziell bei genügend kleiner Isobaranregungsenergie die P -Potentiale durchwegs anziehend. Falls also die übrigen Daten des Deuterons die Annahme einer hinreichend kleinen Anregungsenergie zulassen, darf man erwarten, dass die Streuanisotropie dadurch wesentlich in Richtung auf die experimentell geforderten Werte hin verbessert wird.

*) Die Anisotropie A sei hier definiert durch $A = (\sigma(0) - \sigma(\pi)) / \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$, wo ϑ den Streuwinkel im Schwerpunktsystem und $\sigma(\vartheta)$ den entsprechenden Streuquerschnitt bedeutet. Vorwärts (Rückwärts-)streuung im Schwerpunktsystem ist dann charakterisiert durch $A > 0$ ($A < 0$).

In dieser Arbeit soll nun vorerst der Einfluss der Isobaren auf die untersten Deuteronzustände untersucht werden; es wird sich also in erster Linie darum handeln, zu sehen, ob und wieweit die Anregungsenergie der Isobaren durch die Daten der bekannten S -Zustände nach unten begrenzt wird; alsdann soll untersucht werden, wieweit zulässige Werte dieser Grösse ihren Einfluss auf die Lage der P -Terme geltend machen.

II. Hamiltonfunktion des Zweikörpersystemes; Variationsverfahren zur Auflösung der Schrödingergleichung.

Das in Rede stehende Modell ist an anderer Stelle schon eingehend diskutiert worden⁴). Es seien deshalb hier lediglich die Variablen des Zweikörpersystemes und die Hamiltonfunktion des besagten Modelles angegeben:

$j_1 m_1 n_1$ und $j_2 m_2 n_2$ sind die Quantenzahlen der beiden Nukleonkreisel,

J und M der Gesamtspin des Systemes und seine Komponente,
 K und N der gesamte isotope Spin und dessen Komponente;
 $N + 1$ stellt die Ladung des Systemes dar.

Es gilt die Ungleichung

$$|j_1 - j_2| \leq \frac{J}{K} \leq j_1 + j_2. \quad (1)$$

J setzt sich mit dem Bahndrehimpuls L des Systemes zusammen zum Gesamtdrehimpuls I (Komponente M_I); es gilt

$$|J - L| \leq I \leq J + L. \quad (2)$$

Die Hamiltonfunktion ist diagonal bezüglich I, M_I, K, N ; für jeden Satz dieser Zahlen ist sie die folgende Matrix bezüglich der übrigen Variablen:

$$\begin{aligned} & (J L j_1 j_2 | H | J' L' j_1' j_2') = \\ & \left\{ \frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{-d^2}{dr^2} + \frac{L(L+1)}{r^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(j_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(j_2 + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \right\} (J L j_1 j_2 | 1 | J' L' j_1' j_2') \\ & + V(r) (j_1 j_2 J | \Omega | j_1' j_2' J) \cdot (J L | 1 | J' L') \\ & + U(r) (J L j_1 j_2 | T' | J' L' j_1' j_2'). \end{aligned} \quad (3)$$

Die Matrizen Ω und T' ($T' = T - 1/3 \Omega$ in der Bezeichnung von FIERZ, s. u.) sind von FIERZ⁵) berechnet worden. Über die statischen Potentiale $U(r)$ und $V(r)$ gibt die Mesontheorie für nicht zu kleine Abstände der Nukleonen ($r \gg g$, wo g die Kopplungskonstante bedeutet) bestimmte Aussagen. Des weiteren sind durch

die Bedingung starker Kopplung: $g \gg a$ im physikalisch interessanten Fall $a\mu \ll 1$ (a : Ausdehnung des Nukleons, $\mu \cdot \hbar/c$: Mesonmasse) allzugrosse Werte von ε ausgeschlossen (vgl. 6)). Wir wollen aber hier so vorgehen, dass wir über die Potentiale $U(r)$ und $V(r)$ sowie über die Konstante ε vorerst frei verfügen; insbesondere behalten wir uns vor, U und V durch Kastenpotentiale ($U, V = \text{const.}$ für $r < r_0$, $= 0$ für $r > r_0$) passend gewählter Tiefe zu approximieren. Auf Grund der so durchgeführten Rechnungen mag dann diskutiert werden, wieweit die erhaltenen Ergebnisse eine sinnvolle Interpretation im Rahmen der Mesontheorie gestatten.

Die Komponenten der Schrödingerfunktion \mathfrak{F} bezeichnen wir mit $F_{JLj_1j_2}(r)$ und erhalten demnach als Schrödingergleichung:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(j_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(j_2 + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] - E \right\} F_{JLj_1j_2}(r) \\ + \sum_{J'L'j_1'j_2'} \left\{ V(r) (j_1j_2J | \Omega | j_1'j_2'J) \delta_{JJ'} \delta_{LL'} + U(r) (JLj_1j_2 | T' | J'L'j_1'j_2') \right\} \\ F_{J'L'j_1'j_2'} = 0. \quad (4)$$

Die Matrix Ω koppelt die Werte $j_1 - j_1' = 0, \pm 1$ und $j_2 - j_2' = 0, \pm 1$. (Sie ist natürlich, wie auch T' , symmetrisch in j_1 und j_2 .) Die Matrix T' koppelt mit J, L, j_1, j_2 die Zustände $J' = J, J \pm 2$, $L' = L, L \pm 2$, $j_1' = j_1, j_1 \pm 1$ und $j_2' = j_2, j_2 \pm 1$. Die beiden Ungleichungen (1) und (2) entscheiden aber letztthin, welche Matrixelemente wirklich auftreten. Über das Verhalten der $F_{JLj_1j_2}(r)$ gegenüber einer Vertauschung von j_1 und j_2 gibt das Pauliprinzip die Vorschrift

$$F_{JLj_1j_2}(r) = (-1)^{J+K+L+1} \cdot F_{JLj_2j_1}(r).$$

Insbesondere gilt für $j_1 = j_2$ (etwa im Falle $J = 0$ oder $K = 0$) die Bedingung: $J + K + L$ muss ungerade sein.

Eine exakte Lösung der Gleichung (4) dürfte unmöglich sein. Wie schon bemerkt erleichtern wir uns die Aufgabe durch die Annahme von Kastenpotentialen gleicher Reichweite r_0 für U und V . In dem durch $r > r_0$ definierten Aussenraum ist dann das Gleichungssystem (4) entkoppelt; für diesen Bereich sind exakte Lösungen angebar. Im Innenraum $r < r_0$ liegt ein System simultaner Gleichungen mit zunächst unbeschränkter Komponentenanzahl vor. Das Problem lässt sich jedoch aus den folgenden Gründen reduzieren: Gehen wir aus von der Annahme, dass ε nicht zu klein ist. (Diese Aussage soll weiter unten präzisiert werden.) In diesem Falle nehmen mit wachsenden j_1, j_2 die Amplituden der entsprechenden F -Komponenten rasch ab; von bestimmten Werten j_1, j_2

an wird man daher die $F_{JLj_1j_2}(r)$ näherungsweise Null setzen dürfen. Grosse Werte von J bedingen wegen (1) grosse Werte von j_1 oder j_2 und grosse Werte von L sind wegen (2) mit grossen J kombiniert, da in den interessierenden Fällen I klein ist ($I = 0, 1$ oder 2). Dazu wirkt für $L > 0$ das der Zentrifugalkraft entsprechende Glied $\sim L(L+1)/r^2$ im gleichen Sinne wie die Isobarenenergie. Aus diesen Gründen kann man näherungsweise die Schrödingergleichung im Innenraum auf ein endliches System reduzieren. Bezeichnen wir für das folgende die Gesamtheit der Indices JLj_1j_2 mit s und schreiben wir abkürzend $H_{ss'}$ für $(s|H|s')$ (und H_s für $(s|H|s)$), so lautet das reduzierte System (4) für den Innenraum $r < r_0$:

$$\sum_{s'} H_{ss'} F_{s'}(r) = E \cdot F_s(r). \quad (5)$$

Dieser Gleichung ist äquivalent das folgende Variationsproblem: Es soll die Variation von

$$(\bar{H}^i - E \cdot N^i) \equiv \sum_s \int_0^{r_0} dr F_s(r) \sum_{s'} (H_{ss'} - E \delta_{ss'}) F_{s'}(r) \quad (6)$$

verschwinden, falls die zu variierenden $F_s(r)$ den Randbedingungen

$$F_s(0) = \delta F_s(0) = 0$$

und

$$\left(\frac{d}{dr} \log F_s(r) \right)_{r_0} = \left(\frac{d}{dr} \log \delta F_s(r) \right)_{r_0} = -\kappa_s \quad (7)$$

genügen. (κ_s ist bestimmt durch die Lösung von (4) im Aussenraum.) In der Tat folgt aus (6) und (7):

$$\delta (\bar{H}^i - EN^i) = 2 \sum_s \int_0^{r_0} dr \delta F_s(r) \sum_{s'} (H_{ss'} - E \delta_{ss'}) F_{s'}(r). \quad (8)$$

Die $F_s(r)$ sollen nun approximiert werden durch den Ansatz

$$F_s(r) = \sum_n a_s^{(n)} u_s^{(n)}(r), \quad (9)$$

wobei die $a_s^{(n)}$ zu variierende Parameter und die $u_s^{(n)}(r)$ vorgegebene Funktionen sind, die die Randbedingungen

$$u_s^{(n)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d}{dr} \log u_s^{(n)}(r) \right)_{r_0} = -\kappa_s \quad (7')$$

erfüllen. Die Forderung

$$\frac{\partial}{\partial a_s^{(n)}} (\bar{H}^i - EN^i) = 0$$

führt dann auf das in den $a_s^{(n)}$ lineare Gleichungssystem

$$\sum_{s'} \sum_{n'} a_{s'}^{(n')} \int_0^{r_0} dr u_s^{(n)} (H_{ss'} - E \delta_{ss'}) u_{s'}^{(n')} = 0. \quad (10)$$

Zu Gleichung (10) führt aber auch die folgende Interpretation des Variationsverfahrens: Es sei

$$G_s(r) \equiv \sum_{s'} (H_{ss'} - E \delta_{ss'}) F_{s'}(r).$$

Nach (8) ist die Gleichung $\delta(\bar{H}^i - E \cdot N^i) = 0$ unter Berücksichtigung von (7) einer Orthogonalitätsrelation äquivalent: $G_s(r)$ soll zu jeder Funktion δF_s orthogonal sein und muss daher identisch Null werden. Die Verwendung des Variationsverfahrens als Näherungsmethode beruht nun gerade darauf, nur zu verlangen, dass $G_s(r)$ zu endlich vielen Funktionen $u_s^{(n)}(r)$, die den Randbedingungen (7') genügen, orthogonal sei:

$$\int_0^{r_0} dr G_s(r) \cdot u_s^{(n)}(r) = 0.$$

Mit dem Ansatz (9) für die $F_s(r)$ erhält man wieder (10). Ferner gilt, wie man jetzt leicht sieht, $(\bar{H}^i - E \cdot N^i) = 0$.* Es ist aber bei dieser Fassung der Näherungsmethode möglich, von vornherein einen der Parameter $a_s^{(n)}$, etwa $a_\sigma^{(1)}$, wo σ die „Hauptkomponente“ bedeutet, gleich 1 zu setzen. Dies ist wichtig für den Fall, dass sich die Hauptkomponente im Aussenraum ($r > r_0$) oszillatorisch verhält und daher deren asymptotische Amplitude zu normieren ist. Es ist nämlich in der Tat unwesentlich, ob es sich bei (4) um ein Eigenwertproblem im eigentlichen Sinne oder aber um ein Streuproblem handelt. Im ersteren Falle sind sämtliche Konstanten κ_s (7, 7') durch die exponentiell abfallenden Lösungen im Aussenraum bestimmt, und zwar wird

$$\text{für } L = 0: \kappa_{J_0 j_1 j_2} = \sqrt{\frac{M}{\hbar^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(j_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(j_2 + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] - E \right\}^{1/2}},$$

$$\text{für } L = 2: \kappa_{J_2 j_1 j_2} = 2 + \frac{1 + \kappa_{J_0 j_1 j_2}}{1 + 3/\kappa_{J_0 j_1 j_2} + 3/\kappa_{J_0 j_1 j_2}^2}.$$

*) Hier bedeutet natürlich E vorerst nur einen Parameter, der sich aber nm so mehr dem Eigenwert des Problem es nähert, je besser die $F_s(r)$ die exakten Lösungen approximieren.

Damit sind durch (10) und die Normierungsbedingung

$$N \equiv \sum_s \int_0^\infty dr F_s^2(r) = 1 \quad (11)$$

alle Koeffizienten $a_s^{(n)}$ und der Eigenwert E bestimmbar.

Im Falle eines Streuproblem es verhalten sich die Komponenten $F_{JL\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(r)$ ($J = 0, 1$) im Aussenraum oszillatorisch. An Stelle des nun vorgegebenen Wertes von E sind hier mit Hilfe von (10) die entsprechenden logarithmischen Ableitungen $\kappa_{JL\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ zu bestimmen; ihr Wert legt die Phasen der gestörten Welle im Aussenraum fest. Das Problem ist aber nur im Falle einer einzigen oszillatorischen Komponente (σ) durch (10) schon vollständig festgelegt. In diesem Falle gestattet (10) nämlich gerade die Bestimmung der Amplitudenverhältnisse (d. h. der $a_s^{(n)}$, falls $a_\sigma^{(1)} = 1$ gesetzt wurde) und des Wertes von κ_σ . Treten hingegen mehrere oszillatorische Komponenten auf, so gibt erst die Ausstrahlungsbedingung die erforderlichen zusätzlichen Randbedingungen zur Bestimmung aller κ_s . (Vgl. auch Anhang 1.)

III. Der Deuteron-Grundzustand.

Bei Vernachlässigung der Tensorkraft sind J und L Quantenzahlen und die beiden tiefsten Eigenwerte E gehören zu $K = 0$, $J = 1$, $L = 0$ resp. $K = 1$, $J = 0$, $L = 0$. Die beiden energetisch tiefstliegenden Zustände werden also in dieser Näherung ein 3S - und ein 1S -Zustand. Die Tensorkraft spaltet diese beiden, in obiger Näherung zusammenfallenden Zustände auf; die Hamiltonfunktion ist nun nicht mehr diagonal bezüglich J und L und der Deuteron-Grundzustand ist in diesem Falle zu charakterisieren durch

$$I = 1, \quad K = 0, \quad J \text{ ungerade, } L \text{ gerade.}$$

Die Hauptkomponente dieses Zustandes ist $JLj = 10^1/2$ (3S ; wegen $K = 0$ ist $j_1 = j_2 = j$). Die Vektorungleichungen (1) und (2) ergeben die möglichen Beimischungen JLj zur Hauptkomponente:

$$10^3/2, 10^5/2 \dots ({}^3S); 12^1/2, 12^3/2, \dots ({}^3D); 32^3/2, 32^5/2, \dots ({}^7D).$$

Die Isobarenanregungsenergie ist 3ϵ . Es sollen nun alle F -Komponenten mit $j \geq 5/2$, $J \geq 5$, $L \geq 4$ vernachlässigt werden; eine Diskussion der Bedingungen, unter denen dies erlaubt ist, sei auf den Schluss dieses Abschnittes verspart. Wir geben nachstehend

eine Tabelle der interessierenden Matrixelemente von Ω und T' (nach ⁵):

Tabelle 1.

Jj	Jj'	$(Jj \Omega Jj')$	JLj	$J'L'j'$	$(JLj T' J'L'j')$
$1^{1/2}$	$1^{1/2}$	$-\frac{1}{3}$	$10^{3/2}$	$32^{3/2}$	$\frac{4}{75}\sqrt{7}$
$1^{1/2}$	$1^{3/2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{5}$		$32^{5/2}$	$-\frac{1}{25}\sqrt{42}$
$1^{3/2}$	$1^{3/2}$	$\frac{11}{15}$	$10^{5/2}$	$12^{3/2}$	$\frac{1}{75}\sqrt{42}$
$1^{3/2}$	$1^{5/2}$	$\frac{1}{5}\sqrt{21}$		$32^{3/2}$	$-\frac{1}{25}\sqrt{1/3}$
$1^{5/2}$	$1^{5/2}$	$\frac{31}{35}$	$12^{1/2}$	$12^{1/2}$	$\frac{2}{9}$
$3^{3/2}$	$3^{3/2}$	$-\frac{3}{5}$		$12^{3/2}$	$-\frac{1}{9}\sqrt{1/5}$
$3^{3/2}$	$3^{5/2}$	$\frac{1}{5}\sqrt{6}$		$32^{3/2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2/35}$
$3^{5/2}$	$3^{5/2}$	$\frac{11}{35}$	$12^{3/2}$	$12^{3/2}$	$\frac{34}{225}$
JLj	$J'L'j'$	$(JLj T' J'L'j')$		$12^{5/2}$	$-\frac{1}{25}\sqrt{7/3}$
$10j$	$10j'$	0		$32^{3/2}$	$-\frac{4}{75}\sqrt{2/7}$
$10^{1/2}$	$12^{1/2}$	$-\frac{2}{9}\sqrt{2}$		$32^{5/2}$	$\frac{2}{25}\sqrt{3/7}$
	$12^{3/2}$	$\frac{1}{9}\sqrt{2/5}$	$12^{5/2}$	$12^{5/2}$	$\frac{74}{525}$
	$32^{3/2}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{7/5}$		$32^{3/2}$	$\frac{1}{175}\sqrt{2/3}$
$10^{3/2}$	$12^{1/2}$	$\frac{1}{9}\sqrt{2/5}$	$32^{3/2}$	$32^{3/2}$	$\frac{48}{175}$
	$12^{3/2}$	$-\frac{34}{225}\sqrt{2}$		$32^{5/2}$	$-\frac{8}{175}\sqrt{2/3}$
	$12^{5/2}$	$\frac{1}{75}\sqrt{42}$	$32^{5/2}$	$32^{5/2}$	$\frac{752}{3675}$

Es ist wesentlich, zu bemerken, dass hier die Schrödinger-Gleichung mit unbekanntem Potentialkonstanten U und V gelöst werden muss; hingegen sind bekannt der Eigenwert E (die Bindungsenergie $-2,17$ MeV des Deuteron-Grundzustandes); eine zweite Bedingung ergibt sich aus der Berücksichtigung des elektrischen Quadrupolmomentes. Seine Existenz ist eine Folge der

D-Beimischungen, deren Ausmass durch die Grösse des Potentials *U* der Tensorkraft bestimmt ist. Wir definieren hier wie üblich als Quadrupolmoment den Mittelwert des Operators von

$$\frac{1}{4} (3 z^2 - r^2) = \frac{r^2}{4} (3 \cos^2 \vartheta - 1) = r^2 \cdot Q'$$

im Zustand $M_I = I$. Q' ist die folgende Matrix bezüglich J und L (vgl. 7)):

		$J = 1$		$J = 3$	
		$L = 0$	$L = 2$	$L = 2$...
$J = 1$	$L = 0$	0	$\sqrt{2}/20$		
	$L = 2$	$\sqrt{2}/20$	$-1/20$		
$J = 3$	$L = 2$			$-1/70$	

Es ist demnach

$$Q = \int_0^\infty dr r^2 \sum_j \sum_{JL} F_{JLj}(r) \sum_{J'L'} (JL | Q' | J'L') F_{J'L'j}(r),$$

im Falle unserer Näherung also

$$Q = \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{10} (F_{10^{1/2}} \cdot F_{12^{1/2}} + F_{10^{3/2}} \cdot F_{12^{3/2}}) - \frac{1}{20} (F_{12^{1/2}}^2 + F_{12^{3/2}}^2) - \frac{1}{70} F_{32^{3/2}}^2 \right\}. \tag{12}$$

Es müssen nun gut zu handhabende Ausdrücke für die Funktionen $u_s^{(n)}(r)$ (vgl. (9)) gefunden werden. Dazu wird man die Reihenentwicklungen der Lösungen der Schrödingergleichung hinzuziehen, vor allem um das Verhalten bei kleinen r -Werten klarzulegen. Es ergibt sich folgendes Bild:

F-Komponenten zu $L = 0$: $a_1 r + a_3 r^3 + a_5 r^5 (1 + b_5 \log r) + \dots$

F-Komponenten zu $L = 2$: $\alpha_3 r^3 (1 + \beta_3 \log r) + \alpha_5 r^5 (1 + \beta_5 \log r) + \dots$

Dieses Verhalten bei kleinen r -Werten kann mit für unsere Zwecke genügender Genauigkeit dargestellt werden durch zwei-parametrische Funktionen

$$F_s(r) = a_s^{(1)} u_s^{(1)}(r) + a_s^{(2)} u_s^{(2)}(r),$$

wobei die $u_s^{(n)}(r)$ Binome sind, zusammengestellt mit Hilfe von r, r^3, r^5 im Falle $L = 0$ und $r^3, r^5, r^3 \cdot \log r$ für $L = 2$. Gelegent-

lich, namentlich für schwächere Komponenten, wurde auch nur ein einziger Parameter belassen, der dann also lediglich einen Amplitudenfaktor darstellt. Wir geben nachstehend ein Beispiel eines Satzes von F -Komponenten (Tabelle 2). Vorerst führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad \kappa_1^2 = \frac{M r_0^2}{\hbar^2} |E|, \quad \kappa_3^2 = \frac{M r_0^2}{\hbar^2} (3\varepsilon + |E|),$$

$$\langle \kappa \rangle = 1 + \frac{3}{\kappa} + \frac{3}{\kappa^2}, \quad [\kappa] = 2 + \frac{1+\kappa}{\langle \kappa \rangle}.$$

Tabelle 2.

Die F -Komponenten $F_{JLj}(x)$.

JLj	Innenraum ($x < 1$)	Aussenraum ($x > 1$)	Stetigkeitsbedingung
$10^{1/2}$	$a_1 \frac{1}{1-\alpha_1} (x - \alpha_1 x^3)$	$a_1 \cdot e^{-\kappa_1(x-1)}$	$\alpha_1 = \frac{1+\kappa_1}{3+\kappa_1}$
$12^{1/2}$	$b_{10} \frac{1}{1-\beta_{10}} (x^3 - \beta_{10} x^5) + b_{11} x^3 (1 - \beta_{11} \log x)$	$\frac{(b_{10} + b_{11}) e^{-\kappa_1(x-1)}}{\langle \kappa_1 \rangle} \left(1 + \frac{3}{\kappa_1 x} + \frac{3}{(\kappa_1 x)^2} \right)$	$\beta_{10} = \frac{3 + [\kappa_1]}{5 + [\kappa_1]}$ $\beta_{11} = 3 + [\kappa_1]$
$10^{3/2}$	$a_3 \frac{1}{1-\alpha_3} (x - \alpha_3 x^5)$	$a_3 e^{-\kappa_3(x-1)}$	$\alpha_3 = \frac{1+\kappa_3}{5+\kappa_3}$
$12^{3/2}$	$b_3 x^3 (1 - \beta_3 \log x)$	$b_3 \frac{1+\dots}{\langle \kappa_3 \rangle} e^{-\kappa_3(x-1)}$	$\beta_3 = 3 + [\kappa_3]$
$32^{3/2}$	$c_{30} \frac{1}{1-\gamma_3} (x^3 - \gamma_3 x^5) + c_{31} x^3 (1 - \beta_3 \log x)$	$\frac{(c_{30} + c_{31}) e^{-\kappa_3(x-1)}}{\langle \kappa_3 \rangle} \left(1 + \frac{3}{\kappa_3 x} + \frac{3}{(\kappa_3 x)^2} \right)$	$\gamma_3 = \frac{3 + [\kappa_3]}{5 + [\kappa_3]}$

$a_1, b_{10}, b_{11}, a_3, b_3, c_{30}, c_{31}$ sind die zu bestimmenden Parameter. Trotz der Einfachheit der Ansätze führt also das Variationsverfahren hier zu einem System von 7 linearen Gleichungen. Dazu treten zwei zusätzliche Gleichungen zur Bestimmung von U und V , nämlich die Normierungsbedingung (11) und die Gleichung (12), beide bilinear in den obenerwähnten Parametern. Es dürfte infolgedessen kaum möglich sein, deren Zahl wesentlich zu erhöhen, ohne ein allzu unhandliches Gleichungssystem zu erhalten. Der hier gewählte Ansatz (der das Ergebnis vieler Versuche darstellt) dürfte der kürzeste sein, der noch vertrauenswürdige Resultate ergibt. Einige Besonderheiten erfordern jedoch noch eine Rechtfertigung: Es erweist sich als nicht notwendig, für die Hauptkomponente ($10^{1/2}$) einen feineren Ansatz zu wählen. Schlecht angepasste Funktionen $u_s^{(n)}$ machen nämlich ihren Einfluss haupt-

sächlich dadurch geltend, dass die kinetische Energie des Bereiches $r < r_0$:

$$\overline{(E_{\text{kin}})_s} = -\frac{\hbar^2}{M} \left(\int_0^{r_0} dr F_s^2(r) \right)^{-1} \cdot \int_0^{r_0} dr F_s(r) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) F_s(r) \quad (13)$$

einen unrichtigen Wert erhält. Eine Untersuchung bestätigt dabei aber die ohnehin plausible Tatsache, dass für S -Zustände der Wert von $\overline{(E_{\text{kin}})_s}$ weit weniger rasch verfälscht wird als etwa für D -Zustände. Es erschien deshalb geboten, vor allem die den hier massgebenden D -Zuständen ($12^{1/2}$ und $32^{3/2}$) zugehörigen F -Komponenten sorgfältig zu berücksichtigen.

Numerische Ergebnisse:

Unter Zugrundelegung der in Tabelle 2 zusammengestellten Ansätze erhält man mit $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm und $Q = 2,73 \cdot 10^{-27}$ cm² s)

a) für $\varepsilon = 30$ MeV:

$F_{10^{1/2}} =$	$1,499 \cdot (x - 0,450 \cdot x^3)$	Beimischung*)
$F_{10^{3/2}} =$	$-0,1443 \cdot (x - 0,5625 \cdot x^5)$	0,467 %
$F_{12^{1/2}} =$	$-0,0798 \cdot (x^3 - 3,636 \cdot x^5 + 20,78 \cdot x^3 \cdot \log x)$	3,87 %
$F_{12^{3/2}} =$	$-0,0296 \cdot (x^3 - 7,710 \cdot x^3 \cdot \log x)$	0,08 %
$F_{32^{3/2}} =$	$-0,395 \cdot (x^3 - 1,258 \cdot x^5 + 4,52 \cdot x^3 \cdot \log x)$	1,38 %

und als Potentialkonstanten im Innenraum $x < 1$:

$$U = 113,0 \text{ MeV}, \quad V = 11,55 \text{ MeV}.$$

b) für $\varepsilon = 60$ MeV:

$F_{10^{1/2}} =$	$1,508 \cdot (x - 0,450 \cdot x^3)$	
$F_{10^{3/2}} =$	$-0,1200 \cdot (x - 0,6304 \cdot x^5)$	0,288 %
$F_{12^{1/2}} =$	$-0,0802 \cdot (x^3 - 3,600 \cdot x^5 + 20,58 \cdot x^3 \cdot \log x)$	3,83 %
$F_{12^{3/2}} =$	$-0,0203 \cdot (x^3 - 9,255 \cdot x^3 \cdot \log x)$	0,045 %
$F_{32^{3/2}} =$	$-0,2856 \cdot (x^3 - 1,225 \cdot x^5 + 4,355 \cdot x^3 \log x)$	0,635 %

$$U = 106,1 \text{ MeV}, \quad V = 20,9 \text{ MeV}.$$

Wir müssen nun die Frage diskutieren, ob die Beschränkung des ursprünglichen Problemes auf das hier betrachtete zulässig sei. Als hinreichende Bedingung können wir formulieren: Die nicht

*) Unter „Beimischung“ verstehen wir den Betrag des Normierungsintegrals

$$N_s = \int_0^\infty dx F_s^2(x),$$

wenn $\sum_s N_s = 1$ ist.

berücksichtigten Komponenten müssen schwach genug sein, dass sie, mit den oben erhaltenen Werten von U und V , die Bindungsenergie nicht mehr wesentlich beeinflussen können. Zur Untersuchung dieser Frage leiten wir eine grobe Näherungsformel zur Abschätzung von E ab: Durch Multiplikation der Schrödingergleichung (5) mit $F_s(r)$ und Integration von 0 bis r_0 wird, unter Berücksichtigung der Konstanz von U und V und mit den Bezeichnungen

$$\int_0^{r_0} dr F_s^2(r) = N_s^i, \quad \int_0^{r_0} dr F_s(r) F_{s'}(r) = N_{ss'}^i$$

und

$$\int_0^{r_0} dr F_s(r) H_s F_s(r) = \bar{H}_s N_s^i$$

(d. h. \bar{H}_s ergibt sich aus H_s durch die Substitution $E_{\text{kin}} \rightarrow \bar{E}_{\text{kin}}$, vgl. (13)) die Gleichung

$$(\bar{H}_s - E) N_s^i + \sum_{s'} H_{ss'} N_{ss'}^i = 0. \quad (14)$$

Es sei σ die Hauptkomponente; mit s seien die an σ gekoppelten und mit t nicht an σ gekoppelte Nebenkomponten bezeichnet (d. h. t entspricht mindestens $L = 4$ oder $j = 5/2$; dies zufolge der bereits erwähnten Auswahlregeln $j - j' = 0, \pm 1$ und $L - L' = 0, \pm 2$ für die Matrixelemente von Ω und T'). Wir können dann für (14) näherungsweise folgendes System setzen:

$$(\bar{H}_\sigma - E) N_\sigma^i + \sum_s H_{s\sigma} N_{s\sigma}^i = 0, \quad (15a)$$

$$\bar{H}_s N_s^i + \sum_{s'} H_{ss'} N_{ss'}^i + \sum_t H_{st} N_{st}^i + H_{s\sigma} N_{s\sigma}^i \cong 0, \quad (15b)$$

$$\bar{H}_t N_t^i + \sum_s H_{st} N_{st}^i \cong 0. \quad (15c)$$

In (15b) und (15c) wurde E gegen \bar{H}_s vernachlässigt (vgl. die nachstehend angegebenen Zahlwerte von \bar{H}_s), in (15c) dazu die Kopplungen der t -Komponenten unter sich. Da wir an dieser Stelle nur eine Abschätzung der Grössenordnung des Einflusses der einzelnen Komponenten anstreben, dürfen wir annehmen, dass

$$N_s^i N_{s'}^i \cong (N_{ss'}^i)^2 \quad (16)$$

ist. (Diese Gleichung würde exakt gelten, falls im Innenraum $0 < r < r_0$ $F_s(r)$ und $F_{s'}(r)$ zueinander proportional wären.) Damit

gelingt es nämlich, die N^i aus (15a, b, c) zu eliminieren, und es wird

$$E \cong \bar{H}_\sigma - \sum_s \frac{H_{s\sigma}^2}{\bar{H}_s} \left(1 + \sum_t \frac{H_{st}^2}{\bar{H}_s \bar{H}_t} + \dots \right) - 2 \sum_{s < s'} \frac{H_{s\sigma} H_{s'\sigma}}{\bar{H}_s \cdot \bar{H}_{s'}} \cdot H_{ss'} + \dots \quad (17)$$

in erster Näherung also

$$E \cong \bar{H}_\sigma - \sum_s \frac{H_{s\sigma}^2}{\bar{H}_s} = \bar{H}_\sigma - \sum_s \Delta E_s. \quad (17a)$$

Für die von uns oben vernachlässigten Komponenten ist immer $j^5 \geq 5/2$ oder $L \geq 4$; sie sind infolgedessen nicht an die Hauptkomponente gekoppelt. Eine solche Komponente (t) ruft aber nach (17) eine Depression von E um

$$\Delta E_t = \sum_s \Delta E_{st} \cong \sum_s \frac{H_{s\sigma}^2}{\bar{H}_s} \cdot \frac{H_{st}^2}{\bar{H}_s \cdot \bar{H}_t}$$

hervor. Ihre Vernachlässigung ist demnach gerechtfertigt, sobald für jedes mit t gekoppelte s gilt

$$\left| \frac{\Delta E_{st}}{\Delta E_s} \right| \ll 1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{H_{st}^2}{\bar{H}_s \bar{H}_t} \ll 1. \quad (18)$$

Wir verifizieren die Erfüllung dieser Bedingung am Beispiel der Komponente $t = 32^5/2$. Hier sind folgende zweistufigen Ankoppelungen an σ vorhanden

- 1) $32^5/2 \rightarrow 10^3/2 \rightarrow 10^1/2$, mit $H_{st} = U \cdot (32^5/2 | T' | 10^3/2) = U \cdot \frac{1}{25} \sqrt{42}$
- 2) $32^5/2 \rightarrow 12^3/2 \rightarrow 10^1/2$, mit $H_{st} = U \cdot (32^5/2 | T' | 12^3/2) = U \cdot \frac{2}{25} \sqrt{3/7}$
- 3) $32^5/2 \rightarrow 32^3/2 \rightarrow 10^1/2$, mit $H_{st} = U \cdot (32^5/2 | T' | 32^3/2) + V \cdot (3^5/2 | \Omega | 3^3/2) = U \cdot \frac{-8}{175} \sqrt{2/3} + V \cdot \frac{1}{5} \sqrt{6}$.

1) ergibt den grössten Beitrag zu ΔE_t ; für den Fall $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm und $\varepsilon = 30$ MeV, $U = 113$ MeV, $V = 11,5$ MeV wird

$$\bar{H}_s = 139, \quad \bar{H}_t = 408, \quad H_{st} = 29,2 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad H_{st}^2 / \bar{H}_s \cdot \bar{H}_t = 1/67.$$

Analoge, zum Teil noch wesentlich günstigere Ergebnisse erhält man für $t = 10^5/2$ und $t = 12^5/2$. Damit dürfte also die vorgenommene Reduktion des ursprünglichen Problemes gerechtfertigt sein. Wir können noch zeigen, dass die Berücksichtigung der Kopp-

lungen der Nebenkomponten s untereinander sinnvoll ist. Diese Kopplungen geben in (17) Anlass zu den Gliedern

$$\Delta E_{ss'} = 2 \frac{H_{s\sigma} H_{s'\sigma}}{\bar{H}_s \cdot \bar{H}_{s'}} \cdot H_{ss'} ;$$

deren Vernachlässigung wäre erlaubt im Falle dass

$$|\Delta E_{ss'}| \ll \sqrt{|\Delta E_s| \cdot |\Delta E_{s'}|} \quad \text{d. h.} \quad 2 \left| \frac{H_{ss'}}{\sqrt{\bar{H}_s \bar{H}_{s'}}} \right| \ll 1. \quad (19)$$

Die Bedingung (19) ist nun aber, wenigstens für den kleinsten hier verwendeten Wert von ε (30 MeV), nicht erfüllt. Betrachten wir z. B. den Fall $s = 10^3/2$, $s' = 12^3/2$: $H_{ss'} = -34 \sqrt{2} \cdot /225 \cdot U$. Mit den gleichen Potentialkonstanten wie oben wird

$$\bar{H}_s = 139, \bar{H}_{s'} = 245, H_{ss'} = -24,2 \text{ MeV und damit } 2 \left| \frac{H_{ss'}}{\sqrt{\bar{H}_s \bar{H}_{s'}}} \right| = \frac{1}{3,8}.$$

Es bleibt nun zu untersuchen, ob das Variationsverfahren hinreichend genaue Lösungen des reduzierten Problem es ergibt. Dazu bestimmen wir mit Hilfe der oben erhaltenen Lösungen: $V = V^0$, $U = U^0$ und $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0$ die „Fehlerfunktionen“ $G_s(r)$ (vgl. Abschnitt II):

$$G_s(r) = (\tilde{H}_s - E) F_s^0 + \sum_{s'}' \tilde{H}_{ss'} F_{s'}^0, \quad \text{mit } \tilde{H} = H(U^0, V^0). \quad (20)$$

$G_s(r)$ verschwindet im Aussenraum ($r > r_0$) und ist nach dem in II gesagten orthogonal zu $F_s^0(r)$:

$$\int_0^{r_0} dr F_s^0(r) G_s(r) = 0. \quad (21)$$

Zum Operator \tilde{H} (20) gehöre $\tilde{\mathfrak{F}}$ als exakte Eigenfunktion und \tilde{E} als Eigenwert. $\tilde{\mathfrak{F}}$ gibt Anlass zu einem Quadrupolmoment \tilde{Q} . Um die „Störungen“ $\tilde{E} - E$ und $\tilde{Q} - Q$ der Energie und des Quadrupolmomentes wieder rückgängig zu machen, genügt es, in einer ersten Näherung U^0 und V^0 durch

$$U = U^0 - \left(\frac{\partial U^0}{\partial E} \right) (\tilde{E} - E) - \left(\frac{\partial U^0}{\partial Q} \right) (\tilde{Q} - Q) \quad (22a)$$

und

$$V = V^0 - \left(\frac{\partial V^0}{\partial E} \right) (\tilde{E} - E) - \left(\frac{\partial V^0}{\partial Q} \right) (\tilde{Q} - Q) \quad (22b)$$

zu ersetzen, wobei die Ableitungen von U^0 und V^0 nach E und Q durch entsprechende Differenzenquotienten approximiert werden dürfen, z. B. also $\frac{\partial U^0}{\partial Q}$ durch $\frac{U^0(E, Q) - U^0(E, Q_1)}{Q - Q_1}$, usw. $U^0(E, Q_1)$

und $V^0(E, Q_1)$ erhält man hierbei als Lösungen des Gleichungssystemes (10), (11), (12) mit dem speziellen Wert Q_1 des Parameters Q .

Es handelt sich nun darum, $\tilde{E} - E$ und $\tilde{Q} - Q$ zu bestimmen. Dazu zerlegen wir, im Sinne eines Störungsverfahrens, den Operator \tilde{H}_s :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_s &= (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{isob}})_s = H_s^0 + H_s^1; \\ H_s^0 &= (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}^0 + E_{\text{isob}})_s; \quad H_s^1 = (E_{\text{pot}} - E_{\text{pot}}^0), \end{aligned}$$

und zwar derart, dass

$$(H_s^0 - E) \cdot F_s^0 = 0 \text{ und folglich auch } H_s^1 \cdot F_s^0 = G_s - \sum_{s'}' \tilde{H}_{ss'} \cdot F_{s'}^0 \quad (23)$$

ist. Die Schrödingergleichung $(\tilde{H} - \tilde{E}) \tilde{\mathfrak{F}} = 0$ oder

$$(H_s^0 + H_s^1 - E - \Delta_1 E - \Delta_2 E - \dots) \cdot (F_s^0 + F_s^1 + \dots) + \sum_{s'}' \tilde{H}_{ss'} (F_{s'}^0 + F_{s'}^1 + \dots) = 0$$

erfüllen wir dann wie üblich in der folgenden Weise:

$$(H_s^0 - E) F_s^0 = 0, \quad (24a)$$

$$(H_s^0 - E) F_s^1 = -(H_s^1 - \Delta_1 E) F_s^0 - \sum_{s'}' \tilde{H}_{ss'} F_{s'}^0 = \Delta_1 E F_s^0 - G_s, \quad (24b)$$

$$(H_s^0 - E) F_s^2 = -(H_s^1 - \Delta_1 E) F_s^1 + \Delta_2 E F_s^0 - \sum_{s'}' \tilde{H}_{ss'} F_{s'}^1. \quad (24c)$$

Aus (24b) folgt durch Multiplikation mit F_s^0 und Integration und mit Hilfe von (24a)

$$\Delta_1 E \int_0^\infty dr (F_s^0)^2 = \int_0^\infty dr F_s^0 G_s,$$

d. h. nach (21): $\Delta_1 E = 0$. Ebenso folgt aus (24c) mit (23)

$$\Delta_2 E \int_0^\infty dr (F_s^0)^2 = \int_0^{r_0} dr F_s^1 G_s + \sum_{s'}' \tilde{H}_{ss'} \int_0^{r_0} dr (F_s^0 F_{s'}^1 - F_s^1 F_{s'}^0) \quad (25)$$

und hieraus durch Summation nach s

$$\Delta_2 E = \sum_s \int_0^{r_0} dr F_s^1 G_s. \quad (25')$$

Nach (24b) ist F_s^1 eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(H_s^0 - E) F_s^1 = -G_s. \quad (26)$$

Nennen wir Φ_s^0 eine von F_s^0 linear unabhängige Lösung der Gleichung (24a), so gilt offenbar

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dF_s^0}{dr} \Phi_s^0 - \frac{d\Phi_s^0}{dr} F_s^0 \right) = 0$$

und man kann Φ_s^0 so normieren, dass

$$\frac{dF_s^0}{dr} \Phi_s^0 - \frac{d\Phi_s^0}{dr} F_s^0 = 1 \quad (27)$$

ist. Dann lautet die den erforderlichen Randbedingungen genügende Lösung von (26)

$$F_s^1 = \lambda_s F_s^0 + f_s^1, \quad \text{mit} \quad f_s^1 = F_s^0 \int_{r_0}^r d\rho \Phi_s^0 G_s - \Phi_s^0 \int_{r_0}^r d\rho F_s^0 G_s.$$

(Als untere Integrationsgrenze kann r_0 gesetzt werden, da ja G_s und damit f_s^1 im Aussenraum identisch verschwindet.)

Zur Festlegung der λ_s dienen die Normierungsbedingung

$$\sum_s \int_0^\infty dr F_s^0 F_s^1 = \sum_s (\lambda_s N_s + n_s) = 0; \quad n_s = \int_0^{r_0} dr F_s^0 f_s^1, \quad (28)$$

und die Gleichungen, die sich durch Elimination von $\Delta_2 E$ aus (25) ergeben:

$$\Delta_2 E = \frac{1}{N_s} \left\{ \varepsilon_s + \sum_{s'} (h_{ss'} + (\lambda_{s'} - \lambda_s) \eta_{ss'}) \right\} = \text{unabhängig von } s, \quad (29)$$

wobei

$$\varepsilon_s = \int_0^{r_0} dr f_s^1 G_s; \quad h_{ss'} = -h_{s's} = \tilde{H}_{ss'} \int_0^{r_0} dr (F_s^0 f_{s'}^1 - F_{s'}^0 f_s^1)$$

$$\eta_{ss'} = +\eta_{s's} = \tilde{H}_{ss'} N_{ss'}^i$$

bedeuten.

Für eine Abschätzung der Grössenordnung der Korrekturen genügt es offenbar, das System (28), (29) zu reduzieren auf die Berücksichtigung der Hauptkomponente $10\frac{1}{2}$ ($\equiv 0$) und der grössten Nebenkompente $12\frac{1}{2}$ ($\equiv 2$). Es folgt dann

$$\lambda_0 = -(n_0 + n_2) + \frac{N_2}{\eta_{02}} (\varepsilon_0 N_2 - \varepsilon_2 N_0 + h_{02}) \quad (30)$$

und λ_2 durch Vertauschen der Indices 0, 2.

Numerische Ergebnisse:

Vorerst sei bemerkt, dass Φ_0^0 erhalten wurde durch Integration von (27); mit $F_0^0 = a \cdot (x - \alpha x^3)$ wird

$$\Phi_0^0 = \frac{1}{a} (1 - 3\alpha x^2 + \alpha^2 x^4 + \dots);$$

Φ_2^0 hingegen wurde, mit Hilfe von (27), graphisch bestimmt, da eine gute Approximation der Reihe durch wenig Glieder hier nicht möglich ist. Wir geben im folgenden die Ergebnisse des Verfahrens für den Fall $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm, $\varepsilon = 30$ MeV an:

Die Fehlerfunktionen G_s werden ($x < 1$):

$$G_0 = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2} (-3,346 \cdot x - 3,969 \cdot x^3 + 5,910 \cdot x^5 - 26,08 \cdot x^3 \cdot \log x)$$

$$G_2 = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2} (+1,82 \cdot x + 0,64 \cdot x^3 - 2,219 \cdot x^4 + 10,09 \cdot x^3 \cdot \log x)$$

Es folgt damit

$$\varepsilon_0 = -1,40 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}, \quad \varepsilon_2 = -0,612 \cdot 10^{-3} \text{ MeV},$$

d. h.

$$\Delta_2 E \cong \tilde{E} - E = -1,46 \cdot 10^{-2} \text{ MeV} \text{ und } \Delta_2 E/E = 0,67\%.$$

Die zur Bestimmung von λ_0 und λ_2 notwendigen Koeffizienten werden:

$$\begin{array}{lll} n_0 = +0,790 \cdot 10^{-2} & h_{02} = +0,49 \cdot 10^{-2} & N_2 = 3,87 \cdot 10^{-2} \\ n_2 = +0,253 \cdot 10^{-3} & \eta_{02} = -0,663 & N_0 = 0,942. \end{array}$$

Es folgt $\lambda_0 = -0,884 \cdot 10^{-2}$, $\lambda_2 = -0,109 \cdot 10^{-2}$.

Damit kann nun $\delta Q = \tilde{Q} - Q$ abgeschätzt werden. Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass der Aussenraum ($r > r_0$), wo $f_s^1 = 0$ ist, den grössten Beitrag zu Q liefert, und dass die Maximalamplituden von f_0^1 und f_2^1 nicht wesentlich grösser sind als $|\lambda_0|$ und $|\lambda_2|$ (es ist $\text{Max } |f_0^1| = 2,4 \cdot 10^{-2}$ bei $x = 0,6$ und $\text{Max } |f_2^1| = 0,65 \cdot 10^{-2}$ bei $x = 0,5$), wird mit guter Annäherung

$$\delta Q \cong (\lambda_0 + \lambda_2) \cdot \sqrt{2}/10 \int_0^\infty dr r^2 (F_0^0 \cdot F_2^0) \cong (\lambda_0 + \lambda_2) \cdot Q$$

$$\text{d. h. } \delta Q/Q \cong (\lambda_0 + \lambda_2) \cong -1 \cdot 10^{-2}.$$

Zur Bestimmung von $U - U^0$ und $V - V^0$ nach (22a, b) benötigen wir noch die dort eingehenden partiellen Ableitungen. Mit Hilfe der weiter unten angegebenen Werte von U^0 und V^0 zu $Q_1 = 0,8 \cdot 2,73 \cdot 10^{-27}$ cm² ergibt sich

$$Q \left(\frac{\partial U^0}{\partial Q} \right) \cong 210 \text{ MeV}, \quad Q \left(\frac{\partial V^0}{\partial Q} \right) \cong -92,5 \text{ MeV}.$$

Demgegenüber erweisen sich die Werte von $E \cdot (\partial U^0/\partial E)$ und

$E \cdot (\partial V^0 / \partial E)$ als bedeutend kleiner*), so dass es genügt, in (22a, b) die Glieder $\sim (\tilde{Q} - Q)$ zu betrachten. Infolgedessen wird

$$\begin{aligned} U - U^0 &\cong - 210 \cdot 10^{-2} \text{ MeV} = - 2,1 \text{ MeV}, \\ V - V^0 &\cong + 92,5 \cdot 10^{-2} \text{ MeV} = + 0,92 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Diese Korrekturen sind aber für die Beurteilung der Theorie belanglos.

Abschliessend seien noch einige Angaben gemacht bezüglich des Verhaltens der Potentiale U und V bei einer Änderung der Reichweite r_0 und einer kleinen Änderung im Wert des Quadrupolmomentes Q . Eine Vergrösserung von r_0 zieht eine Vergrösserung des mittleren Abstandes der zwei Nukleonen nach sich. Infolgedessen wird das zur Hervorbringung von Q notwendige Potential U kleiner werden und damit V anwachsen. Den gleichen Effekt bringt, bei gleichbleibendem r_0 , eine Verkleinerung des Wertes von Q hervor. Wir geben nachstehend zwei Beispiele:

a) Eine Abänderung von r_0 : $r_0 = 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$, $\varepsilon = 30 \text{ MeV}$. Es wird

$$U = 52,6 \text{ MeV}, \quad V = 27,4 \text{ MeV};$$

die Beimischungen werden

$$10^3/2: 1,16\%, \quad 12^1/2: 2,47\%, \quad 12^3/2: 0,07\%, \quad 32^3/2: 0,57\%.$$

Mit abnehmendem r_0 nimmt auch V ab, um schliesslich negativ zu werden. Dieser Fall wäre an sich interpretierbar im Rahmen einer pseudovektoriellen Mesontheorie (vgl. ⁹⁾); sie muss aber hier ausgeschlossen werden, da nach COESTER¹⁰⁾ positives V notwendig ist, um die Stabilität der schweren Kerne zu garantieren. Die Forderung $V > 0$ beschränkt aber die zulässigen r_0 -Werte nach unten und zwar um so stärker, je kleiner die Anregungsenergie der Isobaren ist; es gehören

$$\begin{aligned} \text{zu } \varepsilon = 30 \text{ MeV: } & (r_0)_{\text{Min}} = 2,6 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \\ \varepsilon = 60 \text{ MeV: } & (r_0)_{\text{Min}} = 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \\ \varepsilon = \infty & : (r_0)_{\text{Min}} = 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \end{aligned}$$

Diese Feststellungen sind wichtig im Hinblick auf die nachfolgende Behandlung des Singlett- S -Zustandes. Um dessen Bindungsenergie in Übereinstimmung mit der Erfahrung zu bringen, stehen noch die zwei Parameter r_0 und ε zur Verfügung, die aber beide in ihrer Bewegungsfreiheit ziemlich eingeschränkt sind.

*) $(\partial U^0 / \partial E)$ und $(\partial V^0 / \partial E)$ wurden abgeschätzt unter Verwendung von Ergebnissen der Rechnungen von Herrn A. KIND (unveröffentlicht). Es ergab sich $E \cdot (\partial V^0 / \partial E) \cong 30 \text{ MeV}$ und $|\partial U^0 / \partial E| \lesssim |\partial V^0 / \partial E|$.

(Dies gilt bezüglich ε natürlich nur, falls man sich an die Bedingung starker Kopplung hält.)

b) Eine Abänderung von Q . Unter Zugrundelegung der Daten: $r_0=2,8 \cdot 10^{-13}$ cm, $\varepsilon=30$ MeV und $Q=0,8 \cdot 2,73 \cdot 10^{-27}$ cm² erhält man

$$U = 70,7 \text{ MeV}, \quad V = 30,6 \text{ MeV}$$

und die Beimischungen

$$10^{3/2}: 1,24\%, \quad 12^{1/2}: 2,27\%, \quad 12^{3/2}: 0,09\%, \quad 32^{3/2}: 0,71\%.$$

IV. Der Singlett- S -Zustand.

Dieser Zustand ist charakterisiert durch die Quantenzahlen $K = 1$, $I = 0$, L und J gerade. Wegen $K = 1$ ist für $J > 0$: $j_1 - j_2 = 0, \pm 1$; der tiefste angeregte Zustand gehört infolgedessen zu $j_1 = 1/2$, $j_2 = 3/2$ (resp. umgekehrt); seine Anregungsenergie ist $3/2 \varepsilon$, d. h. die Hälfte der Anregungsenergie der Isobaren im Deuteron-Grundzustand. Zur Hauptkomponente $JLj_1j_2 = 00^{1/2}1^{1/2}$ gesellen sich die Beimischungen:

$$00^{3/2}, 00^{5/2}, \dots ({}^1S), (j_1 = j_2 \text{ wegen } J = 0; \text{ vgl. (1)})$$

$$22^{1/2}3^{3/2}, 22^{3/2}1^{1/2}, 22^{3/2}, \dots ({}^5D), \dots$$

Wegen $I = 0$ treten nach (2) nur Komponenten mit $J = L$ auf. Wir geben im folgenden eine Tabelle der interessierenden Matrixelemente von Ω und T' (Tabelle 3). Durch das Indextripel $22s$

Tabelle 3.

Jj	Jj'	$(Jj \Omega Jj')$	JLj	$J'L'j'$	$(JLj T' J'L'j')$
$0^{1/2}$	$0^{1/2}$	$-\frac{1}{3}$	$00j$	$00j'$	0
$0^{1/2}$	$0^{3/2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{5}$	$00^{1/2}$	$22s$	$\frac{4}{9}$
$0^{3/2}$	$0^{3/2}$	$\frac{11}{15}$		$22^{3/2}$	$-\frac{1}{9}\sqrt{5}$
$2s$	$2s$	$-\frac{1}{6}$	$00^{3/2}$	$22s$	$-\frac{2}{9}\sqrt{1/5}$
$2s$	$2^{3/2}$	$\frac{4}{3}\sqrt{1/5}$		$22^{3/2}$	$\frac{44}{225}$
$2^{3/2}$	$2^{3/2}$	$\frac{11}{75}$	$22s$	$22s$	$\frac{5}{18}$
				$22^{3/2}$	$-\frac{2}{9}\sqrt{1/5}$
			$22^{3/2}$	$22^{3/2}$	$\frac{44}{225}$

ist daselbst der aus $22^{1/2} 3^{3/2}$ und $22^{3/2} 1^{1/2}$ gebildete, in $j_1 j_2$ symmetrische Zustand angedeutet.

Wir werden nun so vorgehen, dass wir für bestimmte Werte von r_0 und ε und unter Benützung der für diese Werte in III erhaltenen Potentialkonstanten U und V eine Eigenwertbestimmung durchführen. Das Verfahren ist dabei grundsätzlich dasselbe wie in III, doch müssen folgende Bemerkungen noch gemacht werden:

a) Die Hauptkomponente $\sigma = 00^{1/2}$ hat im Aussenraum $x > 1$ im Falle eines negativen Eigenwertes E den Verlauf

$$F_\sigma(x) = e^{-\kappa_1(x-1)}, \quad \text{mit} \quad \kappa_1^2 = \frac{Mr_0^2}{\hbar^2} |E|.$$

Für den Innenraum setzen wir infolgedessen an

$$F_\sigma(x) = \frac{1}{2} \{ (3 + \kappa_1) \cdot x - (1 + \kappa_1) \cdot x^3 \}, \quad (31)$$

womit alle erforderlichen Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind.

b) In den Ausdrücken für die den angeregten Zuständen entsprechenden F -Komponenten treten im Aussenraum die Konstanten

$$\kappa_s = \sqrt{\frac{Mr_0^2}{\hbar^2} \left(\frac{3}{2} \varepsilon - E \right)} \quad \text{und} \quad \kappa_3 = \sqrt{\frac{Mr_0^2}{\hbar^2} (3\varepsilon - E)}$$

auf. Hier vernachlässigen wir E gegen $3^{3/2} \varepsilon$ und 3ε ; dadurch wird der Gang der Rechnung sehr vereinfacht.

Das System der Gleichungen (10) gestattet dann die Bestimmung der relativen Amplituden $a_s^{(r)}$ ($a_\sigma = 1$) und des Eigenwertparameters κ_1 . Wir geben einige Resultate: Mit

a) $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm, $\varepsilon = 30$ MeV, $U = 113$ MeV, $V = 11,55$ MeV

b) $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm, $\varepsilon = 60$ MeV, $U = 106$ MeV, $V = 20,9$ MeV

c) $r_0 = 2,6 \cdot 10^{-13}$ cm, $\varepsilon = 180$ MeV, $U = 150$ MeV, $V = 18,2$ MeV

wird

a) $E = -1,58$ MeV

b) $E = -1,17$ MeV

c) $E = -0,28$ MeV.

In allen drei Fällen würde es also, im Widerspruch mit der Erfahrung, einen stabilen 1S -Zustand geben. Bei genügend kleinen Werten von ε (< 30 MeV bei $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm) kann der 1S -Zustand sogar stabiler werden als der Grundzustand. Dieses überraschende Resultat ist dem Umstand zuzuschreiben, dass in dem

hier benützten Modell im Gegensatz zu den älteren Theorien ohne Isobaren (schwache Kopplung) die Tensorkraft für diesen Zustand des Systemes nicht identisch verschwindet. Für nicht zu grosse Isobarenanregungsenergien hat dann die starke Ankopplung der Komponente $22s$ (5D) an die Hauptkomponente eine wesentliche Vergrößerung der Bindungsenergie zur Folge. Um die Energie des 1S -Zustandes Null oder positiv zu machen, wie es die Erfah-

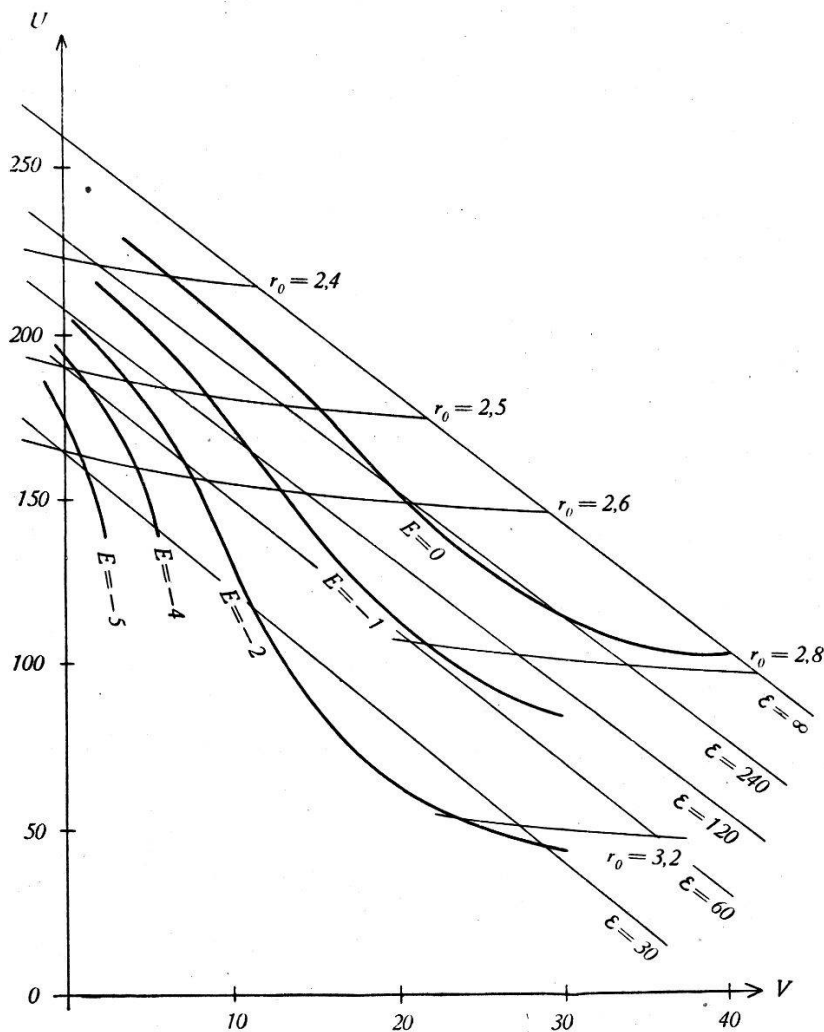


Fig. 1.

Die Bindungsenergie des Singlett-S-Zustandes. Alle Energien in MeV; r_0 in 10^{-13} cm. rung verlangt, muss man demnach die Anregungsenergie der Isobaren sehr gross wählen, d. h. grösser als die übrigen, in den Diagonalelementen $(s|H|s)$ stehenden Energien. Um ein Beispiel zu geben: für obige Werte von r_0 ist $(\bar{E}_{\text{Kin}})_{22s} \sim 100$ MeV; daraus ergibt sich sofort, dass man zu einer richtigen Darstellung der Bindungsenergie zu Werten von $\epsilon > 100$ MeV greifen muss. Wie ungünstig die Sachlage ist, kann aus der beiliegenden graphischen Darstellung (Fig. 1) ersehen werden. Ausgehend von den oben

berechneten Werten sind dort weitere, mit Hilfe von Formel (17a) bestimmte Werte von $E = E(\varepsilon, r_0)$ in Funktion dieser zwei Parameter aufgetragen. Die Darstellung ist folgendermassen zu lesen: Das Netz der Kurven $\varepsilon = \text{const.}$ und $r_0 = \text{const.}$ ist so auf die U, V -Ebene aufgelegt, dass die Wertegruppe U, V, r_0, ε richtige Bindungsenergie und richtiges Quadrupolmoment für den Deuteron-Grundzustand ergibt. (Der Grenzfall $\varepsilon = \infty$ entspricht dem bei RARITA und SCHWINGER¹¹⁾ behandelten Problem.) Die zugehörigen 1S -Energien können aus den Kurven $E = \text{const.}$ qualitativ abgelesen werden. Aus dem Verlauf der Kurve $E = 0$ ersieht man, dass die kleinsten ε -Werte in der Gegend von $r_0 = 2,6 \cdot 10^{-13}$ cm zu erhalten sind, und auch dort sind noch rund 200 MeV erforderlich*).

Abschliessend sei noch bemerkt, dass die zu den vorliegenden Rechnungen verwendete Methode unbrauchbar wird, sobald man zu ε -Werten $<$ etwa 10 MeV übergeht. In diesem Falle werden nämlich grössere Werte von j_1, j_2 massgebend, und es existieren dann diesem Falle besser angepasste Näherungsmethoden (Adiabatenverfahren, vgl. ³⁾). Nach Fig. 1 ist es aber sehr unwahrscheinlich, dass so kleine Werte von ε mit der Erfahrung verträglich sein könnten. Es wurde daher auf diese Seite des Problems nicht näher eingetreten.

V. Die Proton-Neutron-Streuung.

Wie in der Einleitung bemerkt wurde, war die Annahme der Existenz von Isobaren mit nicht allzuhoher Anregungsenergie vor allem von Interesse im Hinblick auf die Anisotropie der Proton-Neutron-Streuung. Um die P -Potentiale in wirksamer Weise herabzudrücken (insbesondere den in der symmetrischen Theorie tiefstliegenden 3P_0 -Term), wären aber Werte von $\varepsilon < 30$ MeV erforderlich (dies für $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm, vgl. ³⁾). Die in IV erhaltenen Ergebnisse bedeuten also, dass es nicht möglich ist, den das Vorzeichen und den Betrag der Anisotropie betreffenden Einwand gegen die ladungssymmetrische Theorie ganz zu entkräften.

*) Man könnte hier die Frage aufrollen, wieweit dieses Ergebnis durch die tatsächliche (hier nicht berücksichtigte) Verschiedenheit des räumlichen Verlaufes der Potentiale $U(r)$ und $V(r)$ betroffen wird. Eine qualitative Überlegung zeigt jedoch leicht, dass dadurch keine wesentliche Änderung des obigen Ergebnisses zu erreichen ist.

Für den günstigsten, in IV berechneten Fall (c) erhalten wir nämlich nur

$$\sigma(\pi) / \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,97, \quad \text{für } E_{\text{kin}} = 14 \text{ MeV.}$$

(Für die Berechnung dieses Quotienten siehe Anhang 2.)

Demgegenüber erhält AMALDI¹⁾ für den gleichen Wert von E_{kin} :

$$\sigma(\pi) / \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,52 \pm 0,03.$$

In diesem Zusammenhang soll nun aber einmal die Frage aufgeworfen werden, wie schwerwiegend eigentlich der Einwand des Experimentes gegen die symmetrische Theorie ist, m. a. W. welches Gewicht den Ergebnissen von AMALDI zukommt. Ausgangspunkt dieser Betrachtung ist der auffällig kleine Unterschied zwischen den gemessenen Werten des Gesamtstreuquerschnittes und den berechneten Werten für S -Streuung allein (berechnet auf Grund einer kurzreichweitigen Zentralkraft); demnach würde auch bei 14 MeV Neutronenenergie im wesentlichen nur erst S -Streuung vorliegen. Die Phasen der P -Wellen müssten also noch klein sein; in diesem Falle ist aber auch eine wesentliche Anisotropie der Streuung ausgeschlossen. Nun hatten zwar RARITA und SCHWINGER¹¹⁾ bemerkt, dass man bei Annahme nichtzentraler Kräfte (Tensorkräfte) kleinere Werte des S -Streuquerschnittes erhält als für zentrale Kräfte; dies gilt aber nur für kleine Energien (die Reduktion beträgt dort 2—3%), für Energien um 15 MeV ist der Unterschied belanglos. Daran kann auch die Annahme isobarer Zustände nichts ändern, solange letztere nur mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten angeregt sind. Eine Durchrechnung dieses Problemes ist auf Grund der in II dargestellten Methode leicht möglich und ergibt folgendes Bild für 15 MeV-Neutronen: Der integrale Querschnitt für (${}^3S_1 + {}^3D_1$)-Streuung wird, unter Annahme der in III für $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm und $\varepsilon = 30$ MeV erhaltenen Werte von U und V , innerhalb der Rechengenauigkeit ($\sim 1/2\%$) gleich gross wie der Querschnitt für 3S -Streuung unter Zugrundelegung eines gewöhnlichen Kastenpotentials gleicher Reichweite, nämlich zu

$$\sigma_{\text{Tripl.}} = 0,695 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

(Im Anhang, Abschnitt 3, ist eine kurze Beschreibung der Rechnung gegeben.)

Damit bleibt der oben erwähnte Einwand gegen die Messresultate von AMALDI bestehen; des weiteren sagt obiges Resultat aus, dass es zur Bestimmung der S -Streuquerschnitte genügt, zentrale Kräfte anzunehmen. Eine gewisse Schwankungsbreite

erhalten die Werte von σ noch infolge unserer Unkenntnis der genauen r -Abhängigkeit der Wechselwirkung. Die unter verschiedenen diesbezüglichen Annahmen durchgeführten Rechnungen ergeben jedoch nur wenig voneinander abweichende Ergebnisse,

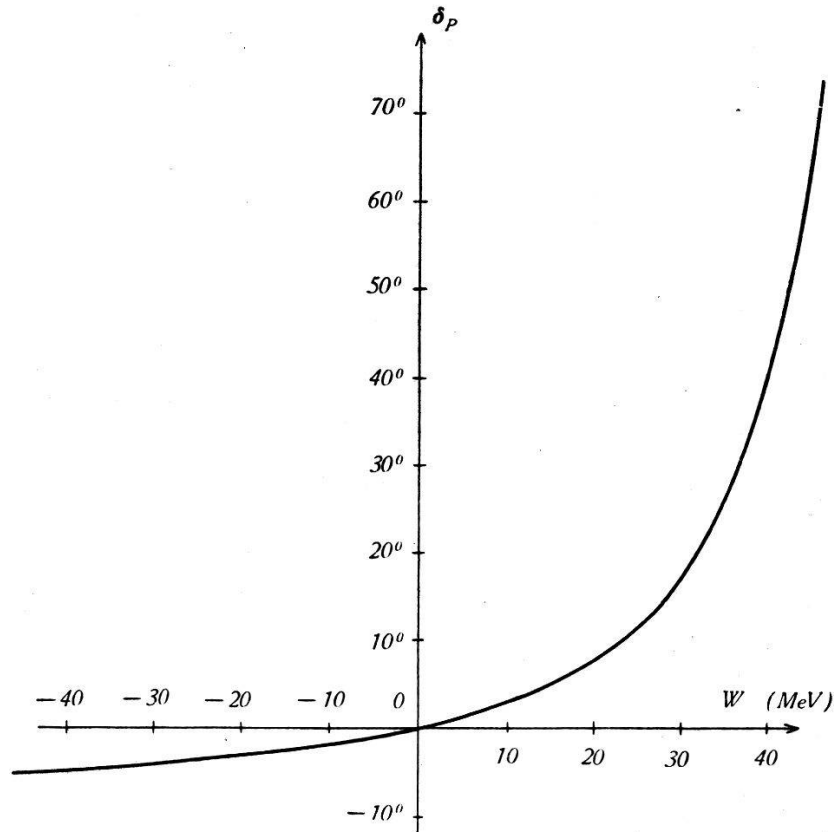


Fig. 2.

Beziehung zwischen Potentialtiefe W und der Phase δ_p der P -Wellen für $E_{\text{kin}} = 15$ MeV. Kastenpotential mit $r_0 = 2,6 \cdot 10^{-13}$ cm.

und wir werden für das Folgende einfach die minimalen so erhaltenen Werte zuziehen. Wir stellen nun einiges Material zusammen:

a) Berechnete Werte für S -Streuung ($\frac{1}{4} \sigma(^1S) + \frac{3}{4} \sigma(^3S)$) für $E = 14$ MeV, in Einheiten 10^{-24} cm²:

1: Kastenpotential	mit $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm:	$\sigma_s = 0,685$
2: „	mit $r_0 = 2,0 \cdot 10^{-13}$ cm:	$\sigma_s = 0,710$
3: Yukawapotential*)	mit $a = 1,92 \cdot 10^{-13}$ cm:	$\sigma_s = 0,621$
4: Exponentialpotential**)	mit $a = 2,0 \cdot 10^{-13}$ cm:	$\sigma_s = 0,616$
5: „	mit $a = 1,5 \cdot 10^{-13}$ cm:	$\sigma_s = 0,643$

*) $V = V_0 \frac{1}{r} \exp(-r/a)$; im Sinne der Mesontheorie ist $a = h/Mc$, wo M die Mesonmasse darstellt. Der hier gegebene Wert von a entspricht $M = 200$ me; die Berechnung des Streuquerschnittes stammt von HULTHÉN¹²).

***) $V = V_0 \exp(-r/a)$; für die Berechnung der entsprechenden Streuquerschnitte siehe Anhang, 4.

b) Gemessene Werte des totalen Streuquerschnittes für $E = 14$ MeV:

1: Nach AGENO¹³): $\sigma_{\text{tot}} = 0,694 \pm 0,019$

2: Nach SALANT und RAMSEY¹⁴): $\sigma_{\text{tot}} = 0,70 \pm 0,06$

1) ist wohl der genaueste z. Z. bekannte Wert. Ein Vergleich der minimalen berechneten Werte: $\sigma_s \gtrsim 0,615$ mit der Obergrenze des Wertes von AGENO: 0,713 ergibt als Beitrag der P -Wellen zum Gesamtstreuquerschnitt den Höchstwert von

$$\underline{\sigma_P \lesssim 0,10 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.} \quad (32)$$

Auf Grund der in Fig. 2 dargestellten Beziehung zwischen Phase und Potentialtiefe für P -Wellen erkennt man, dass man im Falle grosser Aufspaltung der Triplett- P -Terme den Einfluss der P -Wellen schon mit guter Näherung beschreibt, falls man nur die zum tiefstliegenden der drei Potentiale gehörende Phase berücksichtigt. Unter dieser Voraussetzung kann man für die in Frage kommenden Fälle eine Beziehung zwischen dem Wert von σ_{tot} und dem des Quotienten $\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ aufstellen. Ausgehend von der Formel für $\sigma(\vartheta)$ (siehe z. B. bei KITTEL und BREIT¹⁵); in Gleichung (33) ist das $I-I'$ -Interferenzglied etwas anders dargestellt als bei den genannten Autoren):

$$\begin{aligned} k^2 \cdot \sigma(\vartheta) = & \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \delta_{1S} + \frac{3}{4} \cdot \sin^2 \delta_{3S} + 6 \cdot \cos \vartheta \left\{ \frac{1}{4} \cdot \sin \delta_{1S} \cdot \sin \delta_{1P} \cdot \right. \\ & \cdot \cos(\delta_{1S} - \delta_{1P}) + \frac{3}{4} \cdot \sin \delta_{3S} \left[\frac{5}{9} \sin \delta_{3P_2} \cdot \cos(\delta_{3S} - \delta_{3P_2}) + \frac{3}{9} \sin \delta_{3P_1} \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot \cos(\delta_{3S} - \delta_{3P_1}) + \frac{1}{9} \sin \delta_{3P_0} \cdot \cos(\delta_{3S} - \delta_{3P_0}) \right] \right\} \\ & + 9 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \left\{ \frac{1}{4} \sin^2 \delta_{1P} + \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{5}{9} \sin^2 \delta_{3P_2} + \frac{3}{9} \sin^2 \delta_{3P_1} + \frac{1}{9} \sin^2 \delta_{3P_0} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos^2 \vartheta - 1) \left\{ \sin^2(\delta_{3P_2} - \delta_{3P_0}) + \frac{9}{4} \sin^2(\delta_{3P_2} - \delta_{3P_1}) \right\} + \dots \quad (33) \end{aligned}$$

erhält man durch Spezialisierung auf die Fälle

a): $\delta_{3P_1}, \delta_{3P_2}, \delta_{1P} \cong 0$. b): $\delta_{3P_0}, \delta_{3P_2}, \delta_{1P} \cong 0$.

c): $\delta_{3P_0}, \delta_{3P_1}, \delta_{1P} \cong 0$

den folgenden Zusammenhang zwischen σ_P und $\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

Tabelle 4.

δ_{3F_0}	σ_P	$\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$	δ_{3P_1}	σ_P	$\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$	δ_{3F_2}	σ_P	$\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$
90°	0,189	0,570	60°	0,425	0,438	45°	0,472	0,242
60	0,142	0,644	49 1/3	0,324	0,520	30	0,236	0,520
45	0,094	0,741	45	0,284	0,560	22 1/2	0,138	0,678
30	0,047	0,854	30	0,142	0,731	15	0,063	0,825

Die Interpretation dieser Werte im Rahmen der Mesontheorie erlaubt es, anhand von (32) den Höchstwert der massgebenden Phase δ_{3P} abzuschätzen und damit zu einer Aussage über die möglichen Werte von $\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ zu gelangen:

1) Symmetrische Theorie.

Der tiefstliegende Term ist hier 3P_0 ; nach (32) und Tabelle 4 ist die maximal zulässige Phase etwa 45°; damit wird aber der AMALDISCHE Wert von $\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,52$ bei weitem nicht erreicht.

2) Charged Theory.

Die relative Lage der Triplett- P -Terme ist hier die gleiche wie in 1), die Aufspaltung aber grösser (dreimal, gleichen Wert von U wie in 1) vorausgesetzt). Es gilt also hier das in 1) Gesagte.

3) Neutrale Theorie.

Die 3P -Terme liegen umgekehrt wie in 1) und 2); zutiefst liegt 3P_1 ; nach Tabelle 4 ist die Situation hier wesentlich ungünstiger als in den Fällen 1) und 2); zum AMALDISCHEN Wert von 0,52 gehört ein $\sigma_P = 0,324 \cdot 10^{-24}$ cm²; dadurch würde der Gesamtstreuquerschnitt auf rund $0,94 \cdot 10^{-24}$ cm² erhöht, in völligem Widerspruch mit der Erfahrung.

Wir beachten, dass die Unmöglichkeit, die AMALDISCHEN Werte in Übereinstimmung mit der Forderung (32) zu bringen, weitgehend unabhängig vom benützten Modell ist; sie beruht einfach darauf, dass in jedem denkbaren Falle durch den Wert 0,52 von $\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ zu grosse Phasen für die massgebenden P -Wellen angefordert werden. Die Vermutung liegt daher nahe, dass die von AMALDI gemessenen Werte etwas zu klein sind; diese Feststellung würde jedenfalls nicht im Widerspruch stehen mit den bisheri-

gen Messungen von CHAMPION und POWELL¹⁾*). Auf alle Fälle kann gesagt werden, dass hier eine Schwierigkeit liegt, von der jedes der genannten Modelle betroffen wird. Es erscheint daher beim derzeitigen Stand der experimentellen Daten als nicht angebracht, die drei obengenannten Varianten gegeneinander auszuspielen; insbesondere erscheint die symmetrische Theorie nicht unbedingt gegenüber den andern benachteiligt.

VI. Anhang.

1) Zum Variationsverfahren im kontinuierlichen Eigenwertspektrum.

Falls man nicht mit einem Kastenpotential operiert, muss man das Problem folgendermassen formulieren: Man definiert zuerst

$$\overline{(H-E)} = \sum_s \int_0^\infty k dr F_s(r) \sum_{s'} (H_{ss'} - E \delta_{ss'}) F_{s'}(r).$$

Falls E kleiner ist als die Anregungsenergie der Isobaren, so sind die $F_{JL\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(r)$ ($J=1$ oder 0) die einzigen oszillatorischen Komponenten. Mit

$$\begin{aligned} \delta F_{JL\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(r \rightarrow \infty) &= a_L \cos\left(kr - \frac{L\pi}{2} + \varphi_L\right) \delta \varphi_L + \\ &+ \delta a_L \sin\left(kr - \frac{L\pi}{2} + \varphi_L\right) \end{aligned}$$

wird dann

$$\delta \overline{(H-E)} = 2 \sum_s \int_0^\infty k dr \delta F_s(r) \sum_{s'} (H_{ss'} - E \delta_{ss'}) F_{s'}(r) + E \sum_{(L)} a_L^2 \delta \varphi_L.$$

Die Schrödingergleichung ist also äquivalent dem Variationsproblem: Es soll die Variation von $\overline{(H-E)}$ verschwinden, unter der Bedingung, dass die Phasen der oszillatorischen Komponenten nicht variiert werden. Im Gegensatz zur Formulierung dieses Problems bei HULTHÉN¹²⁾ halten wir hier darauf, von vornherein die Stationarität der Phasen zu verlangen: Diese Bedingung ist in der Tat gleichwertig den üblichen, an die in Frage kommenden Funktionen gestellten Randbedingungen: Setzt man nämlich etwa für $r > a$ in $\overline{(H-E)}$ die exakten Lösungen ein, so legt die Forde-

*) Anm. bei der Korrektur: Nach einer Mitteilung von C. F. POWELL am Internat. Physik-Kongress in Cambridge vom Juli 1946 ergibt die Auswertung seiner neuesten Messungen eine sehr schwache, möglicherweise sogar negative Anisotropie, also ein Resultat, das qualitativ mit den Aussagen der symmetrischen Theorie im Falle schwacher Kopplung verträglich wäre.

rung $\delta\varphi_L = 0$ der nurmehr im Bereich $0 < r < a$ zu variierenden Funktion $F_s(r)$ die Randbedingung

$$\delta\left(\frac{d}{dr} \log F_s(r)\right)_{r=a} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \left(\frac{d}{dr} \log F_s(r)\right)_{r=a} = \left(\frac{d}{dr} \log \delta F_s(r)\right)_{r=a}$$

auf; dies ist aber die gleiche Bedingung, die den F -Komponenten im Falle eines eigentlichen Eigenwertproblemekes durch die Forderung $\lim_{r \rightarrow a} F_s(r) = 0$ auferlegt ist (vgl. (7)).

2) Die Bestimmung von $\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Wir stützen uns hier auf eine von WENTZEL angegebene Formel (Gleichung (2) in ³), welche für das in II beschriebene Deuteronmodell die adiabatischen P -Potentiale in Form einer Entwicklung nach U/ε und V/ε darstellt:

$$W({}^3P_I) = \frac{1}{27} (3V + 20 \cdot c_I U) - \frac{32(6V - 5 \cdot c_I U)^2 + 25(3V + 2 \cdot c_I U)^2}{2187 \varepsilon} - \delta_{I2} \frac{14 U^2}{675 \varepsilon} + \dots ;$$

die Konstante c_I hat für $I = 0, 1, 2$ den Wert:

$$c_0 = -\frac{1}{5}, \quad c_1 = \frac{1}{10}, \quad c_2 = -\frac{1}{50} \quad \left(\sum_I (2I + 1) \cdot c_I = 0 \right).$$

Mit den Werten $r_0 = 2,6 \cdot 10^{-13}$ cm, $U = 150$, $V = 18,2$, $\varepsilon = 180$ MeV erhält man

$$W({}^3P_0) = -20,2 - 5,4 = -25,6 \text{ MeV,}$$

$$W({}^3P_1) = +13,1 - 0,5 = +12,6 \text{ MeV,}$$

$$W({}^3P_2) = -0,2 - 4,0 = -4,2 \text{ MeV.}$$

Die entsprechenden Phasen sind: $\delta_{3P_0} = 11^\circ 50'$, $\delta_{3P_1} = -2^\circ 20'$, $\delta_{3P_2} = +1^\circ 0'$, und mit (33) folgt $\sigma(\pi)/\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,970$.

3) Die Bestimmung des Querschnittes für $({}^3S_1 + {}^3D_1)$ -Streuung.

Die Hamiltonfunktion dieses Problemekes ist die gleiche wie im Falle des Deuteron-Grundzustandes, d. h. entspricht den Quantenzahlen $I = 1$, $K = 0$, L gerade, J ungerade. Die F -Komponenten $10\frac{1}{2}$ und $12\frac{1}{2}$ haben im Aussenraum den Verlauf

$$F_{10\frac{1}{2}}(x) \sim \sin(kx + \varphi_0) \quad (34a)$$

$$F_{12\frac{1}{2}}(x) \sim \text{Sin}(kx, \varphi_2) \quad (34b)$$

mit $k^2 = \frac{M r_0^2}{\hbar^2} \cdot \frac{E_{\text{Kin}}}{2}$ und $\text{Sin}(y, \varphi) \equiv \left(1 - \frac{3}{y^2}\right) \sin(y + \varphi) + \frac{3}{y} \cos(y + \varphi)$.

Wir betrachten nur reelle Lösungen des Variationsproblem. Infolgedessen sind φ_1 und φ_2 zwei reelle Phasen; sie sind aber im allgemeinen nicht identisch mit den sogenannten „Phasen“ der gestörten Wellen. Für die gleichen Komponenten setzen wir im Innenraum an:

$$F_{10\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2} \cdot \{(3x - x^3) + \lambda_0(x - x^3)\} \quad (35a)$$

$$F_{12\frac{1}{2}}(x) = a_2 \cdot \{(2x^2 - x^4) + \frac{1}{2} \lambda_2(x^2 - x^4)\}. \quad (35b)$$

Die Bedingungen für den stetigen Anschluss der logarithmischen Ableitungen an die Ausdrücke (34) sind:

$$k \cdot \text{ctg}(k + \varphi_0) = -\lambda_0 \quad (36a)$$

$$\frac{k \cdot \cos(k + \varphi_2) - \sin(k + \varphi_2)}{\sin(k, \varphi_2)} = 2 - \lambda_2. \quad (36b)$$

Das Gleichungssystem (10) ergibt, mit den Ausdrücken (35a, b), nach Elimination aller übrigen Amplitudenparameter zwei Gleichungen zwischen den drei Größen λ_0 , λ_2 und a_2 . Wie schon in II bemerkt wurde, muss demnach zur vollständigen Festlegung des Problem die Ausstrahlungsbedingung zugezogen werden; diese verlangt, dass die oszillatorischen F -Komponenten, die zum Wertepaar $I, M_I = M$ (in der Planwelle ist $M_L = 0$; M bedeutet im folgenden immer den Anfangswert der Spin-komponente) gehören, von der folgenden asymptotischen Form sind:

$$F_{JL\frac{1}{2}}(x \rightarrow \infty) = \text{const } i^L \sqrt{2L+1} e^{i\delta} b_{0,M}^I(J, L) \cdot \sin\left(kx - \frac{L\pi}{2} + \delta_L\right) \quad (37)$$

Die $b_{M,M'}^I(J, L)$ bedeuten hier die normierten Koeffizienten der CLEBSCH-GORDANSchen Reihe für die Zusammensetzung der Drehimpulse $\vec{J} + \vec{L} = \vec{I}$.

Nach (37) hängen die Phasen δ ausser von L speziell noch von der „Anfangspolarisation“ M ab. Gehören nun zu einem durch I, M_I, K und die Paritäten von J und L festgelegten Problem wie im Falle der (${}^3S_1 + {}^3D_1$)-Streuung zwei oszillatorische Komponenten, so ist die Bedingung (37) nicht mit reellen Phasen zu erfüllen. Zur Lösung der Aufgabe mit Hilfe des genannten Variationsverfahrens geht man daher praktisch wie folgt vor: Man zerlegt (37) nach Abspaltung eines passend gewählten Phasen-

faktors in einen Real- und einen Imaginärteil; in dem hier betrachteten Falle also mit $\delta = \eta + i\zeta$:

$$\begin{aligned}
 F_{10\frac{1}{2}}(x) &= \text{const } e^{i\delta_0} \cdot \sin(kx + \delta_0) \\
 &= \text{const } e^{i\delta_0} \left\{ Ch \zeta_0 \sin(kx + \eta_0) - i Sh \zeta_0 \sin\left(kx + \eta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \right\}, \\
 F_{12\frac{1}{2}}(x) &= \text{const } e^{i\delta_0} \{ b_{0,M}^1(1, 2) \sqrt{5} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \text{Sin}(kx, \delta_2) \} \\
 &= \text{const } e^{i\delta_0} \{ b_{0,M}^1(1, 2) \sqrt{5} e^{-(\zeta_2 - \zeta_0)} (\sqrt{\cos^2(\eta_2 - \eta_0) + Sh^2 \zeta_2} \text{Sin}(kx, \eta_2 + \varepsilon) \\
 &\quad + i \sqrt{\sin^2(\eta_2 - \eta_0) + Sh^2 \zeta_2} \cdot \text{Sin}(kx, \eta_2 + \varepsilon^+)) \}
 \end{aligned}$$

mit $\text{tg } \varepsilon = \text{tg}(\eta_0 - \eta_2) Th \zeta_2$; $\text{tg } \varepsilon^+ = \text{ctg}(\eta_2 - \eta_0) Th \zeta_2$.

Wir setzen demnach

$$\Re F_{10\frac{1}{2}} \sim \sin(kx + \eta_0), \quad (38a)$$

$$\Re F_{12\frac{1}{2}} \sim \frac{\sqrt{5}}{Ch \zeta_0} b_{0,M}^1(1, 2) e^{-(\zeta_2 - \zeta_0)} \sqrt{\cos^2(\eta_2 - \eta_0) + Sh^2 \zeta_2} \cdot \text{Sin}(kx, \eta_2 + \varepsilon), \quad (38b)$$

$$\Im F_{10\frac{1}{2}} \sim \sin\left(kx + \eta_0 - \frac{\pi}{2}\right), \quad (39a)$$

$$\Im F_{12\frac{1}{2}} \sim \frac{-\sqrt{5}}{Sh \zeta_2} b_{0,M}^1(1, 2) e^{-(\zeta_2 - \zeta_0)} \sqrt{\sin^2(\eta_2 - \eta_0) + Sh^2 \zeta_2} \cdot \text{Sin}(kx, \eta_2 + \varepsilon^+). \quad (39b)$$

Diese Ausdrücke sind nun von der Form (34a, b), und eine Identifikation der Real- resp. der Imaginärteile ergibt:

$$\varphi_0 = \eta_0; \quad \varphi_2 = \eta_2 + \varepsilon;$$

$$a_2 \frac{\sin(k + \varphi_0)}{\text{Sin}(k, \varphi_2)} = \frac{\sqrt{5}}{Ch \zeta_0} b_{0,M}^1(1, 2) e^{-(\zeta_2 - \zeta_0)} \sqrt{\cos^2(\eta_2 - \eta_0) + Sh^2 \zeta_2},$$

$$\varphi_0^+ = \eta_0 - \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_2^+ = \eta_2 + \varepsilon^+;$$

$$a_2^+ \frac{\sin(k + \varphi_0^+)}{\text{Sin}(k, \varphi_0^+)} = \frac{\sqrt{5}}{Sh \zeta_0} b_{0,M}^1(1, 2) e^{-(\zeta_2 - \zeta_0)} \sqrt{\sin^2(\eta_2 - \eta_0) + Sh^2 \zeta_2}.$$

Dadurch sind die 6 Grössen $\varphi_0, \varphi_2, a_2$ und $\varphi_0^+, \varphi_2^+, a_2^+$, oder, vermittelt (36a, b), die 6 Grössen $\lambda_0, \lambda_2, a_2$ und $\lambda_0^+, \lambda_2^+, a_2^+$ als Funktionen der vier Parameter $\eta_0 \zeta_0 \eta_2 \zeta_2$ dargestellt. Wie oben bemerkt wurde, sind indes durch Gleichung (10) zwischen diesen 6 Grössen gerade vier Beziehungen aufgestellt; diese erlauben die Festlegung der vier Parameter $\eta_0 \zeta_0 \eta_2 \zeta_2$.

Wir bemerken noch, dass für den Fall der (${}^3S_1 + {}^3D_1$)-Streuung infolge der zu $J = 1$ möglichen zwei Werte von $|M|$ bei diesem

Problem insgesamt 8 Phasen η_L^M, ζ_L^M auftreten. Wegen des Bestehens von Differentialbeziehungen erster Ordnung zwischen den Lösungen der Schrödingergleichung (diese sind in ¹¹⁾ ausführlich dargestellt) sind aber nur drei dieser Phasen unabhängig. Man braucht infolgedessen das Problem nur für einen Wert von M zu lösen; dass bei obiger Fassung des Lösungsverfahrens vier Phasen explicite eingehen, gibt eine Möglichkeit, die Güte des Verfahrens zu kontrollieren.

Nach (37) erhält man für den Gesamtstreuquerschnitt für Tripletstreuung

$$\sigma_{\text{tripl}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_L (2L+1) \frac{1}{3} \sum_{I,M} e^{-2\zeta_L^{IM}} |b_{0,M}^I(1, L)|^2 (\sin^2 \eta_L^{I,M} + Sh^2 \zeta_L^{I,M})$$

und speziell für die (${}^3S_1 + {}^3D_1$)-Streuung unter Berücksichtigung der zwischen den Phasen bestehenden Beziehungen:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \{ e^{-2\zeta_0^{1,0}} (\sin^2 \eta_0^{1,0} + \sin^2 \eta_2^{1,1}) + (1 - e^{-2\zeta_0^{1,0}}) \}.$$

Für $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ cm und mit einer Neutronenenergie von 15 MeV werden

$$\eta_0^{1,0} = 1,482, \quad \eta_2^{1,1} = -0,019, \quad \zeta_0^{1,0} = -0,093.$$

Ein isotropes Kastenpotential gleicher Reichweite, dessen Tiefe der Bindungsenergie des Deuteron-Grundzustandes angepasst ist, ergibt dagegen $\delta_0 = 1,461$. Der sich daraus ergebende Wert von σ_{tripl} ist in beiden Fällen praktisch gleich gross.

4) Die Bestimmung der Streuquerschnitte.

Das Eigenwert- und Streuproblem für die S -Zustände eines Zweikörpersystemes mit einem Wechselwirkungspotential $U(r) = -V_0 \exp(-r/a)$ lässt sich auf die Diskussion einer Besselfunktion zurückführen. Es sei

$$A = \frac{M a^2}{\hbar^2} V_0 \quad \text{und} \quad z^2 = -\frac{M a^2}{\hbar^2} E$$

d. h. z ist rein imaginär für $E > 0$, reell für $E < 0$.

Die Berücksichtigung der Randbedingung für die Eigenfunktion $f(r)$ führt auf eine Funktion $K_z(A)$, definiert durch

$$K_z(A) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A^n \cdot \prod_{\epsilon=1}^n \frac{1}{2z+\epsilon} = \Gamma(1+2z) \frac{1}{A^z} \cdot J_{2z}(2\sqrt{A}). \quad (40)$$

Die Eigenwerte sind dann festgelegt (bei vorgegebenem a und A)

durch die Nullstellen der Funktion $K_z(A)$ für positiv reelle z -Werte ($z = \kappa$):

$$J_{2\kappa}(2\sqrt{A}) = 0.$$

(Siehe z. B. bei BETHE und BACHER¹⁶); daselbst ist eine Tabelle von Wertepaaren a, A angegeben, die die richtige Bindungsenergie für den Deuteron-Grundzustand ergeben.) Zur Bestimmung von $A(^1S)$ wurde hier $E(^1S) = 0$ angenommen.

Die Phasen der gestörten S -Wellen sind ebenfalls durch $K_z(A)$ festgelegt; es ist nämlich

$$\delta = \arg K_{ik}(A);$$

k bedeutet die Wellenzahl der S -Welle in Einheiten $1/a$.

Die Reihe (40) konvergiert nun sehr rasch, so dass die Bestimmung der Phasen ohne Mühe durchgeführt werden kann.

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. G. WENTZEL. Ich möchte ihm an dieser Stelle für die vielen, freundlichst gewährten Ratschläge meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidg. Techn. Hochschule.

Literatur.

- 1) C. F. POWELL, H. HEITLER, F. C. CHAMPION, *Nature* **146**, 716 (1940). E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. FERRETTI, C. TRABACCHI, *Naturwiss.* **30**, 482 (1942). H. TATEL, *Phys. Rev.* **61**, 450 (1942). C. F. POWELL, F. C. CHAMPION, *Proc. Roy. Soc. A* **183**, 64 (1944).
- 2) J. SCHWINGER, *Bull. American Phys. Soc.* **16**, Nr. 7, S. 7 (1941).
- 3) G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **18**, 430 (1945).
- 4) M. FIERZ und G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **17**, 215 (1944). G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **17**, 252 (1944).
- 5) M. FIERZ, *Helv. Phys. Acta* **17**, 181 (1944), und **18**, 158 (1945).
- 6) W. PAULI und S. M. DANCOFF, *Phys. Rev.* **62**, 85 (1942). G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **16**, 551 (1943).
- 7) M. FIERZ, *Helv. Phys. Acta* **18**, 158 (1945).
- 8) J. M. B. KELLOGG, I. I. RABI, N. F. RAMSEY, J. R. ZACHARIAS, *Phys. Rev.* **57**, 677 (1940).
- 9) N. KEMMER, *Proc. Roy. Soc. A* **166**, 127 (1938).
- 10) F. COESTER, *Helv. Phys. Acta* **17**, 35 (1944).
- 11) W. RARITA und J. SCHWINGER, *Phys. Rev.* **59**, 436 (1941).
- 12) L. HULTHÉN, *Kungl. Fys. Sälls. i Lund Förhandl.* **14**, No 21 (1944).
- 13) M. AGENO, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, C. TRABACCHI, *Il nuovo Cimento I/3* (1943).
- 14) E. O. SALANT und N. F. RAMSEY, *Phys. Rev.* **57**, 1075 (1940).
- 15) C. KITTEL und G. BREIT, *Phys. Rev.* **56**, 744 (1939).
- 16) H. A. BETHE und R. F. BACHER, *Rev. of Modern Physics* **8**, 82 (1936).