

Bemerkungen zur mathematischen Theorie der Zähler

Autor(en): **Jost, Res**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **20 (1947)**

Heft II

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111797>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bemerkungen zur mathematischen Theorie der Zähler

von Res Jost (Phys. Institut der ETH., Zürich).

(26. XI. 46.)

Ein allgemeines Schema zur Behandlung der Fragen, die mit dem Auflösungsvermögen von Zähl- anordnungen verbunden sind, scheint bisher nicht publiziert worden zu sein. Es mag daher gestattet sein, einige Rechnungen, die ich vor einigen Jahren ausführte, einem grösseren Kreis zur Kenntnis zu bringen, zumal in der Literatur einige irreführende Angaben gemacht sind.

§ 1. Grundbegriffe.

Unter einem *Zähler* verstehen wir irgendeine Anordnung, die zu zählende Impulse in neue Impulse umformt. So ist z. B. ein Zählrohr und ein Zählwerk ein Zähler, aber auch eine Verstärkerstufe oder ein Untersetzer.

Die zu zählenden Impulse nennen wir die *Ereignisse*, die Impulse, die den Zähler verlassen *gezählte* oder *registrierte Ereignisse*.

Eine *Zähl- anordnung* besteht immer aus einer Hintereinanderschaltung von mindestens zwei Zählern.

Verändert ein Zähler die zeitliche Aufeinanderfolge von Ereignissen nicht, so heisst er *ideal*.

§ 2. Der ideale Zähler.

Bei ihm haben wir zwischen gezählten Ereignissen und Ereignissen nicht zu unterscheiden.

Zur Beschreibung der Statistik der Ereignisse definieren wir die *Verteilungsfunktion für das erste Ereignis* $P(t)$: $P(t) dt$ ist die Zahl der ersten Ereignisse, die im Mittel im Zeitintervall $(t, t + dt)$ erfolgen, falls das nullte Ereignis zur Zeit $t = 0$ erfolgt.

Daraus leiten sich die Verteilungsfunktionen für das zweite, dritte, n -te Ereignis ab. Diese werden wir mit $P^{*2}(t)$, $P^{*3}(t)$, $P^{*n}(t)$

bezeichnen. Es soll $P(t) \geq 0$ und $\int_0^{\infty} P(t) dt = 1$ sein, dann gilt dasselbe auch für $P^{*n}(t)$.

Weiter gilt die Rekursion:

$$\int_0^t P^{*n}(t-\tau) P^{*m}(\tau) d\tau = P^{*(n+m)}(t) \quad (1)$$

Die Integralbildung links pflegt man als Faltung zu bezeichnen. Sie wird durch Laplace-Transformation in ein Produkt übergeführt:

$$p(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} P(t) dt = L\{P(t), z\}$$

dann ist

$$[p(z)]^n = L\{P^{*n}(t), z\} \quad ^1)$$

Schliesslich definieren wir die *Dichte der Ereignisse* $F(t): F(t) dt$ ist die Zahl der Ereignisse, die im Mittel im Zeitintervall $(t, t + dt)$ erfolgen. Es gelten offenbar:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{*n}(t) \quad (2)$$

und die Integralgleichung:

$$F(t) = P(t) + \int_0^t F(t-\tau) P(\tau) d\tau \quad (3)$$

die durch Laplacetransformation in

$$f(z) = p(z) \{1 + f(z)\} \quad (3')$$

übergeht. Es sei nun

$$\int_0^{\infty} t \cdot P(t) dt = \bar{t} = \frac{1}{N} < \infty \quad (4)$$

Dann leuchtet ohne weiteres ein, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = N \quad (5)^2)$$

N ist die mittlere Anzahl von Ereignissen pro Zeiteinheit und somit normalerweise die interessierende Grösse.

¹⁾ G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Dover Publications, S. 155ff. Wir werden Laplacetransformierte immer mit entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen.

²⁾ FELLER, Ann. Math. Statist. **12**, 243 (1941); H. RICHTER, Math. Ann. **118**, 145 (1942).

§ 3. Der nichtideale Zähler.

Hier unterscheiden sich die Statistiken der Ereignisse $P(t)$ und der gezählten Ereignisse $\tilde{P}(t)$. Wir setzen dabei voraus, dass das nullte Ereignis auch gezählt wird. Handelt es sich z. B. um einen idealen Untersetzer, so gilt $\tilde{P}(t) = P^{*n}(t)$, und man rechnet leicht nach, dass unabhängig von der Statistik gilt: $\tilde{N} = N/n$.

Im allgemeinen werden $P(t)$ und $\tilde{P}(t)$ durch irgendeine Funktionalgleichung miteinander verbunden sein. Zwei Fälle lassen sich leicht charakterisieren, die in praxi allerdings nie rein auftreten werden:¹⁾

Zähler 1. Art: Massgebend dafür, ob ein Ereignis gezählt wird oder nicht, ist die Zeit, die seit dem letzten *gezählten Ereignis* verflossen ist.

Zähler 2. Art: Massgebend dafür, ob ein Ereignis gezählt wird oder nicht, ist die Zeit, die seit dem letzten *Ereignis* verflossen ist.

Wir definieren weiter als *Auflösungscharakteristik* $J(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis, das zur Zeit t erfolgt, registriert wird, wobei t die Zeit ist, die seit dem letzten gezählten Ereignis resp. dem letzten Ereignis verflossen ist, je nachdem der Zähler 1. resp. 2. Art ist.

§ 4. Der Zähler 1. Art.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, einen geschlossenen Ausdruck für $\tilde{P}(t)$ anzugeben. Durch einfache Überlegung erhält man

$$\tilde{P}(t) = J(t) \left\{ P(t) + \int_0^t K(\tau) P(\tau) P(t-\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{\tau_2} K(\tau_1) P(\tau_1) K(\tau_2) P(\tau_2-\tau_1) P(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \right\}$$

wo $K(t) = 1 - J(t)$ ist.

Wir behandeln im Folgenden wichtige Spezialfälle.

a) *Fall einer bestimmten Auflösungszeit:* Dieser Fall ist definiert durch die folgende Charakteristik:

$$J(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t \leq \sigma \\ 1 & \text{für } t > \sigma \end{cases} \quad \sigma \text{ heisst Auflösungszeit.}$$

¹⁾ RUARK and BRAMMER, Phys. Rev. **52**, 322 (1937).

N. HOLE, Arkiv för Math. Astr. och Fys. **33 A** No. 11. (Anmerk. b. d. Korr.)

Dann wird

$$\tilde{P}(t) = J(t) \left\{ P(t) + \int_0^{\sigma} F(t) P(t-\tau) d\tau \right\} \quad (6)$$

oder auch, wie man unter Verwendung von (3) erkennt

$$\tilde{P}(t) = J(t) F(t) - \int_0^t J(\tau) F(\tau) P(t-\tau) d\tau \quad (6')$$

und

$$\tilde{F}(t) = J(t) F(t) - \int_0^t F(\tau) K(\tau) F(t-\tau) d\tau \quad (7)^1$$

woraus man nach (5) leicht findet

$$N = \tilde{N} \left(1 + \int_0^{\sigma} F(t) dt \right). \quad (8)$$

Man erkennt leicht, dass die Substitution: $P(t) \rightarrow \lambda P(t \cdot \lambda)$ für $\lambda \rightarrow \infty$ zu $\tilde{N} = 1/\sigma$ führt. Steigert man also bei „gleichartiger Betrachtung“ die „Betrahlungsintensität“ unbegrenzt, so strebt die registrierte Ereignisdichte gegen die reziproke Auflösungszeit.

Dieser Sachverhalt dient in bekannter Weise zur Bestimmung von σ .

b)
$$\underline{P(t) = N \cdot e^{-Nt}} \quad (9)$$

diese „Betrachtung“ entspricht dem POISSON'schen Gesetz. Es ergibt sich:

$$\tilde{P}(t) = N J(t) \cdot e^{-N \int_0^t J(\tau) d\tau} \quad (10)$$

für beliebiges $J(t)$.

Daraus lässt sich in einem konkreten Fall \tilde{N} als Funktion von N bestimmen. (10) mag auch deshalb von Interesse sein, weil sie auf einfache Weise eine Bestimmung von $J(t)$ gestattet:

$$J(t) = \tilde{P}(t) \left[N \int_t^{\infty} \tilde{P}(\tau) d\tau \right]^{-1} \quad (11)$$

¹⁾ Zwischenrechnungen, wie sie hier und im Folgenden ausgelassen sind, führt man am besten nach LAPLACE-Transformation der entsprechenden Gleichungen durch. Zum Schluss geht man wieder zur LAPLACE-Inversen über und erhält das Resultat. Die Hauptrolle spielt immer der Faltungssatz.

c) Schliesslich setzen wir in a). $P(t) = N \cdot e^{-Nt}$ ein; dann folgt nach (8):

$$N = \tilde{N}/1 - \sigma \tilde{N} \quad (12)$$

welches eine bekannte Formel ist¹⁾.

§ 5. Der Zähler 2. Art.

Hier können wir die Behandlung des allgemeinen Falles weiter treiben als in § 4. Man findet leicht:

$$\tilde{F}(t) = J(t) P(t) + \int_0^t F(\tau) P(t - \tau) J(t - \tau) d\tau \quad (13)$$

woraus nach (5) folgt:

$$\tilde{N} = N \int_0^{\infty} J(t) P(t) dt \quad (14)$$

Auf die Formeln für $\tilde{P}(t)$ verzichten wir, da sie von geringem Interesse sind.

Will man in ähnlicher Weise wie in § 4 das $J(t)$ bestimmen, so greift man passend auf die Formel

$$\tilde{F}(t) = J(t) P(t) + \int_0^t \tilde{F}(t - \tau) P(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Doch wird die Bestimmung von $J(t)$ in praxi (z. B. bei mechanischen Zählwerken) auf andere Weise erfolgen. Spezialisieren wir auch hier auf

$$J(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t \leq \sigma \\ 1 & \text{für } t > \sigma \end{cases} \quad \text{und} \quad P(t) = N \cdot e^{-Nt},$$

so ergibt (14) die bekannte Beziehung

$$\tilde{N} = N \cdot e^{-N\sigma} \quad (16)^1$$

§ 6. Zählansordnungen aus zwei Zählern.

Wir betrachten die Hintereinanderschaltung von 2 Zählern mit den Auflösungszeiten σ_1 für den ersten Zähler und $\sigma_2 \geq \sigma_1$ für den zweiten.

$$P(t) = N \cdot e^{-Nt} \rightarrow \boxed{\text{1. Zähler}}_{\sigma_1} \rightarrow \tilde{P}(t) \rightarrow \boxed{\text{2. Zähler}}_{\sigma_2} \rightarrow \tilde{\tilde{P}}(t).$$

¹⁾ RUARK and BRAMMER l. c.

Der erste Zähler sei 1. Art., dann ist nach (6')

$$\tilde{P}(t) = J_1(t) N \cdot e^{-N(t-\sigma_1)} \quad \text{mit} \quad J_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t \leq \sigma_1 \\ 1 & \text{für } t > \sigma_1. \end{cases}$$

und

$$\tilde{P}^{*n}(t) = J_1\left(\frac{t}{n}\right) \cdot N \cdot \frac{[N(t-n\sigma_1)]^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-N(t-n\sigma_1)}$$

womit sich $\tilde{F}(t)$ nach (2) bestimmt.

a) *Der zweite Zähler sei 1. Art.* Nach (8) hat man dann $\int_0^{\sigma_2} \tilde{F}(t) dt$ zu berechnen, was ergibt

$$\gamma - \sum_{n=1}^{\gamma} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{[N(\sigma_2 - n\sigma_1)]^\nu}{\nu!} e^{-N(\sigma_2 - n\sigma_1)} \quad \text{oder} \quad \sum_{n=1}^{\gamma} \frac{\Gamma[N(\sigma_2 - n\sigma_1), n]}{\Gamma(n)}$$

wo $\gamma = \left\lfloor \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right\rfloor$ die grösste ganze Zahl mit der Eigenschaft $\gamma < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ ist.

Damit wird schliesslich

$$\frac{1}{\tilde{N}} = \left(\frac{1}{N} + \sigma_1\right) \left\{ 1 + \gamma - \sum_{n=1}^{\gamma} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{[N(\sigma_2 - n\sigma_1)]^\nu}{\nu!} e^{-N(\sigma_2 - n\sigma_1)} \right\}$$

oder

$$\frac{1}{\tilde{N}} = \left(\frac{1}{N} + \sigma_1\right) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\gamma} \frac{\Gamma[N(\sigma_2 - n\sigma_1), n]}{\Gamma(n)} \right\} \quad (17)^1$$

mit $\Gamma(x, n) = \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$ (unvollständige Γ -Funktion).

Man erkennt, dass die Formel für die Spezialfälle $\sigma_2 = \sigma_1$ und $N \rightarrow \infty$ das Richtige liefert.

b) *Der zweite Zähler sei 2. Art.* Wendet man (14) an, so kommt

$$\tilde{N} = N(1 + \sigma_1 N \cdot e^{-N(\sigma_2 - \sigma_1)})^{-1} \quad (18)$$

wobei die bekannte Paradoxie auftritt, dass die Zählordnung um so besser zählt, je schlechter das Auflösungsvermögen des ersten Zählers ist, vorausgesetzt aber, dass $\sigma_1 \leq \sigma_2$.

¹⁾ RUARK und BRAMMER l. c. leiten unter denselben Voraussetzungen Formel (18) statt (17) her. ALAOGU und SMITH übernehmen den Irrtum. Phys. Rev. **53**, 832, 1937.

7. Schwankungerscheinungen¹⁾.

In den vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, wie man für eine Zählordnung die Statistik der schliesslich gezählten Ereignisse und damit die mittlere Zahl der Ereignisse pro Zeiteinheit bestimmen kann. $P(t)$, $F(t)$, N sollen sich im Folgenden auf die wirklich vom Zählwerk gezählten Ereignisse beziehen. Was uns in diesem Paragraphen interessiert, ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, in einem Zeitintervall eine bestimmte Zahl von Ereignissen zu registrieren. Dabei halten wir vorläufig noch daran fest, dass das nullte Ereignis zur Zeit $t = 0$ erfolgen soll.

$W(n, t)$ sei die Wahrscheinlichkeit, im Intervall $0 < \tau \leq t$ genau n -Ereignisse zu registrieren. Offenbar ist

$$\sum_{n=0}^{M-1} W(n, t) = \int_0^t P^{*M}(\tau) d\tau$$

woraus folgt

$$W(n, t) = \int_0^t [P^{*n}(\tau) - P^{*(n+1)}(\tau)] d\tau \quad (19)$$

oder nach Laplacetransformation

$$w(n, z) = p^n(z) [1 - p(z)]/z. \quad (19')$$

Bildet man mit dieser Wahrscheinlichkeit den Erwartungswert von n , so folgt leicht

$$\sum_{n=0}^{\infty} n W(n, t) = \int_0^t F(\tau) d\tau$$

was man etwa nach (19') mit Hilfe der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} nu^n = u/(1-u)^2$$

einsieht (verwende (3')). In entsprechender Weise findet man für den Erwartungswert von n^2

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 W(n, t) = \int_0^t S(\tau) d\tau \quad (20)$$

mit

$$S(t) = \Sigma(2n-1) P^{*n}(t) = F(t) + \int_0^t F(t-\tau) F(\tau) d\tau \quad (21)$$

$$s(z) = f(z) [1 + f(z)]. \quad (21')$$

¹⁾ VAN DER VELDEN und ENDT, Physica IX, 641 (1942); LEVERT und SCHEEN, Physica X, 225 (1943); GILTAY, Physica X, 725 (1943); KOSTEN, Physica X, 749 (1943).

Mit diesen letzten Formeln erhält man sofort das mittlere Schwankungsquadrat

$$\Sigma(n - \bar{n})^2 W(n, t) = \int_0^t S(\tau) d\tau - \left[\int_0^t F(\tau) d\tau \right]^2 \quad (22)$$

Anwendungen liegen auf der Hand.

Wir wollen uns nun von der speziellen Wahl des Zeitnullpunktes befreien und definieren zu diesem Zweck die folgende Wahrscheinlichkeit:

$A(n, t)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem beliebigen auf der positiven Zeitaxe liegenden Intervall der Länge t genau n -Ereignisse zu finden.

Wir bestimmen zunächst eine Hilfsfunktion. $T > 0$ sei ein beliebiger Zeitpunkt. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeitsdichte $P_T(t)$ dafür, dass zur Zeit $T + t$ das erste Ereignis nach dem Zeitpunkt T erfolgt. Diese Wahrscheinlichkeitsdichte haben wir im wesentlichen schon in § 4a bestimmt. Dort spielte σ die Rolle von T . Nach (6') ist

$$P_T(t) = F(T + t) - \int_0^t F(T + \tau) P(t - \tau) dt$$

Mittelt man $P_T(t)$ über alle T , so erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichte $\hat{P}(t)$ dafür, nach einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkt t Sekunden später das erste Ereignis nach diesem Zeitpunkt zu finden. Nach (5) findet man

$$\hat{P}(t) = N \left[1 - \int_0^t P(\tau) d\tau \right] \quad (23)$$

$$\hat{p}(z) = N[1 - p(z)]/z \quad (23')$$

Nun ist offenbar

$$A(o, t) = \int_t^\infty \hat{P}(\tau) d\tau \quad (24)$$

$$a(o, z) = 1/z - N(1 - p(z))/z^2 \quad (24')$$

und

$$A(n, t) = \int_0^t \hat{P}(\tau) W(n - 1, t - \tau) d\tau \quad (25)$$

und nach (19')

$$a(n, z) = N p^{n-1}(z) (1 - p(z))^2 / z^2. \quad (25')$$

Man erkennt mit (24') und (25'), dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n, z) = 1/z \quad \text{also} \quad \sum_{n=0}^{\infty} A(n, t) = 1 \text{ ist.}$$

Bilden wir mit $A(n, z)$ Erwartungswerte, so folgt:

$$M_1(t) = \sum n A(n, t) = Nt \quad (26)$$

$$M_2(t) = \sum n^2 A(n, t) = Nt + 2N \int_0^t (t - \tau) F(\tau) d\tau \quad (27)$$

wobei man (27) über (27') gewinnt:

$$m_2(z) = N[1 + 2f(z)]/z^2 = N[1 + p(z)]/z^2[1 - p(z)]. \quad (27')$$

Für das mittlere Schwankungsquadrat $\Delta^2(t) = M_2(t) - M_1^2(t)$ ergibt sich

$$\Delta^2(t) = Nt + 2N \int_0^t (t - \tau) F(\tau) d\tau - N^2 t^2 \quad (28)$$

$$\delta^2(z) = N[1 + 2f(z)]/z^2 - 2N^2/z^3. \quad (28')$$

In Fällen, wo (28') keine handliche Rücktransformation gestattet, lässt sich oft wenigstens eine asymptotische Formel für $Nt \gg 1$ erreichen: $f(z)$ habe im Nullpunkt folgende Entwicklung

$$f(z) = N/z + a + \dots \quad (29)$$

dann ist

$$\delta^2(z) = N(1 + 2a)/z^2 + \dots$$

und

$$\Delta^2(t) \sim N(1 + 2a)t. \quad (30)$$

Zur Illustration, wie man die Formeln dieses Paragraphen anzuwenden hat, leite ich als Beispiel eine Formel von L. KOSTEN ab¹⁾.

Ein Zähler zweiter Art mit der Auflösungszeit σ werde „nach dem POISSON'schen Gesetz bestrahlt“.

Nach (16) ist, mit einer kleinen Bezeichnungsänderung $N = N_0 e^{-\sigma N_0}$ und nach (13) $F(t) = N J(t)$, $f(z) = N e^{-\sigma z}/z$.

Aus (25') folgt mit (3')

$$a(n, z) = N f^{n-1}/z^2 (1 + f)^{n+1}.$$

Entwickelt man hierin nach f , so kommt

$$a(n, z) = \frac{N}{z^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)!}{n! \nu!} (-1)^\nu f^{n+\nu-1},$$

¹⁾ KOSTEN, l. c.

setzt man den Wert für $f(z)$ ein und geht zur Laplaceinversen, so erhält man die gewünschte Formel:

$$A(n, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} J\left(\frac{t}{(\nu+n-1)}\right) \frac{\langle N [t - (\nu+n-1)\sigma] \rangle^{\nu+n}}{\nu! n!}.$$

Man beachte, dass die Summe wegen des Auftretens von $J(t)$ nur scheinbar unendlich ist, tatsächlich aber nur bis $[t/\sigma] - n + 1$ läuft.

Weiter rechnet man nach (28') mühelos das mittlere Schwankungsquadrat:

$$\Delta^2(t) = Nt(1 - 2N\sigma) + N^2\sigma^2 \quad \text{für } t > \sigma.$$

Die ganze Rechnung kann ebenso für einen Zähler erster Art mit der Auflösungszeit σ durchgeführt werden. Einen geschlossenen Ausdruck für das mittlere Schwankungsquadrat findet man allerdings nicht. Wendet man aber (30) an, so findet man asymptotisch

$$\Delta^2(t) \sim N_0 t / (1 + N_0 \sigma)^3. \quad 1)$$

Schlussbemerkung: Es geht mir in dieser Note nicht darum, möglichst viele Beispiele durchzurechnen, als vielmehr darum, einen allgemeinen Formalismus anzugeben, der mir zur mathematischen Behandlung komplizierterer Zählansordnungen geeignet erscheint. Wie die Methode auf andere Probleme (Untersetzer u. dgl.) anzuwenden ist, dürfte klar sein.

1) VAN DER VELDEN und ENDT, lc.