

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 21 (1948)  
**Heft:** I

**Artikel:** Zwei Bemerkungen zur Theorie der Streumatrix  
**Autor:** Wentzel, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111896>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 21.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zwei Bemerkungen zur Theorie der Streumatrix

von G. Wentzel.

(1. XII. 1947.)

I. Beim Problem der Streuung an mehreren Streuzentren ist die HEITLER'sche Integralgleichung, da sie auf akausale Vorgänge im Sinne von STUECKELBERG führt, nicht anwendbar. Für den Fall, dass der Abstand der Streuer gross ist, wird eine abgeänderte Integralgleichung für die Streumatrix angegeben.

II. Die Methode der analytischen Fortsetzung in die komplexe Energie-Ebene, auf die der KRAMERS-HEISENBERG'schen Dispersionsformel entsprechende Streumatrix angewendet, führt zu einer Beschreibung der spontanen Emission von Licht.

### I.

Wir betrachten die Streuung einer Partikel durch ein System, das aus zwei Streukörpern besteht. Wenn die Streumatrizen der einzelnen Körper gegeben sind, wie wird die Streumatrix des zusammengesetzten Streuers beschaffen sein? Diese Frage lässt sich rein „wellenoptisch“ beantworten, wenn der Abstand der beiden einzelnen Streuer voneinander so gross ist, dass sie in ihren gegenseitigen Wellenzonen liegen.

Wird die Streumatrix unkorrekt konstruiert, so kann sie, wie STUECKELBERG<sup>1)</sup> betont hat, Matrixelemente für „akausale Vorgänge“ enthalten. In unserem Problem besteht ein akausales Ereignis darin, dass die Partikel vom einen Streuer absorbiert und vom anderen emittiert wird derart, dass die Emission zeitlich *vor* der Absorption stattfindet, mit einer Zeitdifferenz  $\geq d/c$ , wo  $d$ , der Abstand der beiden Streuer, beliebig gross sein kann. Die Energie-Erhaltung würde erfordern, dass in der Zeit zwischen Emission und Absorption ein Teilchen negativer Energie vorhanden wäre. Wellenoptisch interpretiert, beruht eine Akausalität immer auf einer Verwechslung von auslaufenden und einlaufenden Kugelwellen: wenn bei einem kausalen Vorgang etwa eine vom ersten Streuer ausgehende Kugelwelle auftritt (Streuung vom ersten zum zweiten Körper), so erscheint fälschlich an Stelle der auslaufenden eine einlaufende Welle. Das Verbot akausaler Ereignisse, wenigstens für „makroskopische“ Abstände  $d$ , wird von STUECKELBERG als ein oberstes Postulat zur Bestimmung der  $S$ -Matrix in einer relativistischen Theorie der Wechselwirkungen von Elementarteilchen herangezogen. Es mag daher von Interesse sein, an einem einfachen

Beispiel, wo die korrekte  $S$ -Matrix elementar berechnet werden kann, zu untersuchen, welche Züge für eine „kausale“  $S$ -Matrix charakteristisch sind.

Die einzelnen Streuer seien einfachheitshalber als isotrop angenommen. Das heisst, denken wir den  $n$ -ten Streuer (allein) an den Koordinatenursprung gesetzt, und schreiben wir mit HEISENBERG für die Wellenfunktion im Impulsraum ( $\mathfrak{f}^0$ ,  $\mathfrak{f}$  = Impulse des Teilchens im Anfangs- und Endzustand):

$$(\mathfrak{f} | \psi | \mathfrak{f}^0) = (\mathfrak{f} | 1 | \mathfrak{f}^0) + (\mathfrak{f} | R_n | \mathfrak{f}^0) \delta_+(E^0 - E), \quad (1)$$

so ist das Matrixelement  $(\mathfrak{f} | R_n | \mathfrak{f}^0)$  nur von den Beträgen  $|\mathfrak{f}^0| = k^0$ ,  $|\mathfrak{f}| = k$  abhängig, und zwar ist nur der Wert für  $k = k^0$  massgebend für das asymptotische Verhalten in der Wellenzone. Wir setzen deshalb

$$(\mathfrak{f} | R_n | \mathfrak{f}^0) = \frac{1}{G} R_n'(k) \quad (2)$$

( $G$  = Periodizitätsvolumen für die Wellen  $e^{i\mathfrak{f}r}$ ). Die Wellenfunktion im Ortsraum wird dann asymptotisch:

$$\sum_{\mathfrak{f}} e^{i\mathfrak{f}r} (\mathfrak{f} | \psi | \mathfrak{f}^0) \underset{\approx}{=} e^{i\mathfrak{f}^0 r} + R_n'(k) \frac{\varrho(k) e^{ikr}}{2 i k r}, \quad (1a)$$

wo

$$\varrho(k) = \frac{1}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{dE}.$$

Die Matrix

$$(\mathfrak{f} | \underline{S} | \mathfrak{f}^0) = (\mathfrak{f} | 1 | \mathfrak{f}^0) + (\mathfrak{f} | \underline{R} | \mathfrak{f}^0) = (\mathfrak{f} | 1 | \mathfrak{f}^0) + (\mathfrak{f} | R | \mathfrak{f}^0) \delta(E^0 - E)$$

muss bekanntlich unitär sein; dies bedeutet für (2) die Forderung

$$R_n' + R_n'^* + \varrho R_n'^* R_n' = 0. \quad (3)$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, genügt es,  $R_n'$  in der Form

$$R_n' = \frac{2\pi i K_n'}{1 - \pi i \varrho K_n'} \quad (4)$$

anzusetzen, wo  $K_n'$  eine beliebige *reelle* Funktion von  $k$  ist (genauer gesagt: für reelle  $k$ -Werte soll  $K_n'$  reell sein). Der Ansatz (4) ist äquivalent der HEITLER'schen Integralgleichung für die Matrix  $\underline{R}_n$ :

$$\underline{R}_n - \pi i \underline{K}_n \cdot \underline{R}_n = 2\pi i \underline{K}_n, \quad (4a)$$

wenn die hermitische Matrix

$$(\mathfrak{f} | \underline{K}_n | \mathfrak{f}') = \frac{1}{G} K_n'(k) \delta(E' - E)$$

als wellenmechanisch *gegeben* betrachtet wird, wie etwa in HEITLER's Strahlungsdämpfungstheorie<sup>2)</sup>. Für das Folgende ist es aber gleichgültig, welche der beiden Matrizen  $K_n$  oder  $R_n$  als die primär gegebene angesehen wird; durch (4) bzw. (4a) (mit reellem  $K_n'$  bzw.

hermitischem  $\underline{K}_n$ ) wird dann lediglich die Unitarität der Matrix  $\underline{S}_n$  ausgedrückt.

Nun seien die beiden Streuer an die Orte  $r_1, r_2$  gesetzt; ihr Abstand  $d = |r_1 - r_2|$  sei so gross, dass jeder Streuer in der Wellenzone des andern liegt. Die Matrix  $R$ , die dann in (1) an die Stelle von  $R_n$  tritt, kann elementar wellenoptisch berechnet werden, wobei zu berücksichtigen ist, dass die gestreute Partikel beliebig oft zwischen den Einzelstreuern hin und her laufen kann. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{f}|R|\mathfrak{f}^0) &= \frac{1}{G} \left\{ R_1' e^{i(t^0 - \mathfrak{f}) r_1} + R_2' e^{i(t^0 - \mathfrak{f}) r_2} \right. \\ &+ R_1' R_2' \frac{\varrho e^{ikd}}{2ikd} (e^{i\mathfrak{f}^0 r_1 - i\mathfrak{f} r_2} + e^{i\mathfrak{f}^0 r_2 - i\mathfrak{f} r_1}) \left. \right\} \cdot \left[ 1 - R_1' R_2' \left( \frac{\varrho e^{ikd}}{2ikd} \right)^2 \right]^{-1} \quad (5) \end{aligned}$$

Entwickelt man nämlich den letzten Faktor in eine geometrische Reihe, so entspricht jeder Summenterm von  $R$  in leicht erkennbarer Weise einem bestimmten Streuweg (vgl. (1a)). Die direkte Ausrechnung lehrt, dass die Matrix  $\underline{S} = 1 + \underline{R}$  unitär ist, wenn alle  $\underline{S}_n$  unitär sind, d. h. wenn die Relationen (3) gelten.

Wir fragen nun, ob die Matrix (5) einer Integralgleichung vom Typus der HEITLER'schen Gleichung (4a) genügt. Dabei ist von vornherein zu erwarten, dass die massgebende  $K$ -Matrix folgende Struktur hat:

$$(\mathfrak{f}|K|\mathfrak{f}') = \frac{1}{G} \sum_n K_n'(k) e^{i(t' - \mathfrak{f}) r_n}. \quad (6)$$

Bildet man aber, gemäss der Regel

$$(k|\underline{F}|\mathfrak{f}') = (\mathfrak{f}|F|\mathfrak{f}') \delta(E' - E), \quad (6a)$$

die Matrizen  $\underline{R}$  und  $\underline{K}$  mit (5) und (6), so zeigt sich, dass die der HEITLER'schen Gleichung (4a) entsprechende Integralgleichung (ohne Indices  $n$ ) *nicht* erfüllt ist. Zwar wäre sie erfüllt, wenn man in  $R$  (5)  $e^{ikd}$  jeweils durch  $\frac{1}{2}(e^{ikd} - e^{-ikd})$  ersetzen würde<sup>3</sup>); diese teilweise Vertauschung von auslaufenden und einlaufenden Wellen würde aber akausalen Streuvorgängen im Sinne von STUECKELBERG entsprechen und ist deshalb unzulässig. Hier zeigt sich klar, dass die Anwendung der HEITLER'schen Integralgleichung auf ein System von mehreren Streuern zu Akausalitäten führen muss.

Indessen lässt sich eine abgeänderte Integralgleichung angeben, der die korrekte  $\underline{R}$ -Matrix genügt. Wir schreiben sie:

$$\underline{R} - \pi i \bar{K} \cdot \underline{R} = 2 \pi i \underline{K}; \quad (7)$$

dabei ist

$$(\mathfrak{f}|\bar{K}|\mathfrak{f}') = (\mathfrak{f}|K|\mathfrak{f}') \cdot 2 \bar{\delta}(E' - E), \quad (8)$$

wo  $K$  gemäss (6) definiert ist, und wo  $\bar{\delta}$  einen Operator bedeutet,

der der DIRAC'schen oder HEISENBERG'schen  $\delta_-$ -Funktion verwandt, wenn auch nicht damit identisch ist: Sei  $f(k)$  eine langsam variierende Funktion, und  $kr \gg 1$ , so soll für  $\bar{\delta}(k' - k) = \delta^+(k - k')$  gelten:

$$\int dk' \bar{\delta}(k' - k) e^{+ik'r} f(k') = e^{ikr} f(k), \quad (9a)$$

$$\int dk' \bar{\delta}(k' - k) e^{-ik'r} f(k') = 0, \quad (9b)$$

$$\int dk' \bar{\delta}(k' - k) f(k') = \frac{1}{2} f(k). \quad (9c)$$

Die Gleichungen (9a, b) — sie sollen natürlich nur asymptotisch gelten ( $kr \gg 1$ ) — werden auch durch die DIRAC'sche und die HEISENBERG'sche  $\delta_-$ -Funktion erfüllt, während in (9c), im Falle der DIRAC'schen  $\delta_-$ -Funktion, rechterhand noch der Hauptwert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} dk' \frac{f(k')}{k' - k}$$

hinzuzufügen wäre. Derartige Terme, welche Übergängen  $k' \rightarrow k$  ohne Energie-Erhaltung entsprechen würden, müssen in (7) — im Matrixprodukt  $\bar{K} \cdot R$  — ausgeschlossen werden, schon damit (7) im Falle eines *einzigsten* Streuers in die HEITLER'sche Integralgleichung (4a) übergeht ( $\bar{K} = \underline{K}$ ). Mit anderen Worten: die Matrixmultiplikation darf nur Zustände auf der gleichen „Energieschale“ koppeln; dieser Forderung entsprechen die Definitionsformeln (9). Um dies hervorzuheben, mag man auch schreiben:

$$\bar{\delta}(k' - k) = \delta^+(k - k') = I_+(k') \cdot \frac{1}{2} \delta(k' - k), \quad (10)$$

wo  $I_+(k')$  ein Operator ist, der auslaufende Wellen ( $e^{+ik'r}$ ) verdoppelt, einlaufende Wellen ( $e^{-ik'r}$ ) zu Null macht, während er langsam variierende Funktionen unverändert lässt.

Freilich gibt weder (9) noch (10) eine vollständige Definition der in Frage stehenden Operatoren. Nähert man die beiden Streuer einander so weit, dass der eine nicht mehr in der Wellenzone des andern liegt, so ist die Streumatrix nicht mehr durch (5) gegeben, und wenn überhaupt noch eine Gleichung vom Typus (7) gilt, so wird die Art und Weise, wie das Streufeld aus der Wellenzone in die Nahzone übergeht, für die Struktur der  $\bar{K}$ -Matrix massgebend sein müssen. Ohne korrespondenzmässige Anleihen bei speziellen Feldtheorien wird sich diese Lücke kaum ausfüllen lassen.

STUECKELBERG<sup>1)</sup> gelangt in seinen auf relativistischen Feldtheorien beruhenden Überlegungen dazu, für die Streumatrix den Ansatz zu machen:

$$\underline{R} = \frac{2i\alpha}{1-i\alpha}, \quad \underline{S} = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}; \quad (11)$$

dabei wird  $\alpha$  nach einem Kopplungsparameter entwickelt, und die höheren Terme dieser Entwicklung werden so bestimmt, dass keine makroskopischen Akausalitäten auftreten. Der Ansatz (11) ist formal äquivalent den Ansätzen (4), (4a), d. h. der HEITLER'schen Integralgleichung (mit  $\alpha = \pi \underline{K}$ ). Da wir gesehen haben, dass diese Gleichung im Falle mehrerer Streuer nicht mehr gilt, wenigstens sofern  $\underline{K}$  gemäss (6), (6a) gebildet wird, erscheint es fraglich, ob der Ansatz (11) wirklich durch Einfachheit ausgezeichnet ist, d. h., ob er allgemein auf ein einfaches Bildungsgesetz für die Matrix  $\alpha$  führt. Durch Vergleich von (11) mit (7) findet man:

$$\alpha = [1 - \pi i \cdot \frac{1}{2} (\bar{K} - \overset{\dagger}{K})]^{-1} \cdot \pi \underline{K}, \quad (12)$$

wo  $\overset{\dagger}{K}$  aus  $\bar{K}$  durch Vertauschung der auslaufenden und einlaufenden Wellen hervorgeht:  $\overset{\dagger}{K} + \bar{K} = 2 \underline{K}$ . Im Vergleich zu (11), (12) scheint es jedoch einfacher, gemäss (7)

$$R = [1 - \pi i \bar{K}]^{-1} \cdot 2 \pi i \underline{K} \quad (7a)$$

anzusetzen<sup>4)</sup> und nach dem allgemeinen Bildungsgesetz von  $\underline{K}$  und  $\bar{K}$  zu fragen.

Bei Beschränkung des Problems auf die Streuung eines Teilchens (beliebiger Art) durch mehrere ruhende (nicht notwendig isotrope) Streuer wird zweifellos (7) mit (8) gelten, wobei die  $K$ -Matrix sich additiv aus den  $K_n$ -Matrizen der einzelnen Streuer zusammensetzt. Aber auch bei weitergehenden Fragestellungen (bewegte Streuer, Prozesse mit Änderung der Teilchenzahl) mag die Gleichung (7) dienlich sein.

Schliesslich sei daran erinnert, dass nach KRAMERS und HEISENBERG<sup>5)</sup> die analytische Fortsetzung der  $R$ -Matrix (genauer gesagt: ihrer Eigenwerte) in die komplexe  $k$ -Ebene und die Aufsuchung ihrer Pole auf der positiv-imaginären Halbachse zur Bestimmung *stationärer Zustände* dienen kann, in denen das Teilchen an das Streuzentrum gebunden ist. Im Falle des einzelnen isotropen Streuers führt dies nach (4) auf die Gleichung

$$\frac{1}{R_n'(i\mu_n)} = \frac{1}{2\pi i K_n'(i\mu_n)} - \frac{1}{2} \varrho(i\mu_n) = 0.$$

Für zwei solche Streuer im Abstand  $d$  hat man statt dessen nach (5):

$$\frac{1}{R_1'(i\mu) R_2'(i\mu)} = \left( \frac{\varrho(i\mu) e^{-\mu d}}{2\mu d} \right)^2. \quad (13)$$

Die Lösungen  $\mu$  dieser Gleichung gehen im Limes  $d \rightarrow \infty$  gegen  $\mu_1$  oder  $\mu_2$ , und es ist leicht,  $\mu - \mu_n$  für grosse Werte von  $d$  asymp-

totisch zu bestimmen.  $E(i\mu)$  gibt das Potential der statischen Kräfte, welche die beiden Streuer durch Vermittlung des gebundenen Teilchens aufeinander ausüben. In der HEITLER'schen Theorie der Mesonstreuung (mit Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung) ergeben sich so die Kräfte zwischen „Nukleon-Isobaren“<sup>6)</sup> und „nackten Nukleonen“. Die HEITLER'sche Integralgleichung würde hier, da in (13)  $e^{-\mu d}$  durch  $\frac{1}{2}(e^{-\mu d} - e^{+\mu d})$  ersetzt wäre, zu unsinnigen Ergebnissen führen. Wir wollen aber auf diese Fragen hier nicht näher eingehen.

## II.

Die HEITLER'sche Integralgleichung kann in sehr einfacher Weise dazu dienen, die Strahlungsdämpfung beim Problem der Streuung von Licht an atomaren Systemen, speziell bei der *Resonanzfluoreszenz*, zu berücksichtigen. In der  $R$ -Matrix treten die bekannten Resonanznenner  $\nu^0 - \nu_{\text{Res}} + i\gamma$  auf, wo der imaginäre Term  $i\gamma$  den Dämpfungseffekt darstellt. Als analytische Funktionen von  $\nu^0$  besitzen daher die  $R$ -Eigenwerte *Pole* an den Stellen  $\nu_{\text{Res}} - i\gamma$ . Diese Pole, bzw. die entsprechenden Residuen der Matrix  $R \cdot \delta_+(E^0 - E)$ , entsprechen — wie wir zeigen wollen — den *spontanen Emissionsprozessen* des betrachteten Systems.

Betrachten wir nur Zustände, in denen das Strahlungsfeld ein einziges Lichtquant enthält, so ist ein Zustand des Gesamtsystems charakterisiert durch den Wellenzahlvektor  $\mathfrak{k}$  des Lichtquants ( $|\mathfrak{k}| = \nu/c$ ), dessen Polarisationsvektor  $\mathbf{e}$  ( $|\mathbf{e}| = 1$ ), und durch die Nummer  $n$  des Atomzustandes (Energie  $E_n$ ). Der HEITLER'schen Theorie entspricht es, wenn wir die  $K$ -Matrix, welche die Lichtstreuung beschreiben soll, als durch die KRAMERS-HEISENBERG'sche Dispersionsformel gegeben annehmen. In Dipolstrahlungsnäherung:

$$(\mathfrak{k} \mathbf{e} n | \underline{K} | \mathfrak{k}^0 \mathbf{e}^0 0) = \frac{2\pi}{G} \sqrt{\nu \nu^0} \sum_l \left\{ \frac{(\mathbf{e} \mathbf{p}_{nl}) (\mathbf{e}^0 \mathbf{p}_{l0})}{\omega_{l0} - \nu^0} + \frac{(\mathbf{e}^0 \mathbf{p}_{nl}) (\mathbf{e} \mathbf{p}_{l0})}{\omega_{ln} + \nu^0} \right\} \cdot \delta(\hbar \nu^0 + E_0 - \hbar \nu - E_n). \quad (14)$$

( $G =$  Periodizitätsvolumen,  $\hbar \omega_{ln} = E_l - E_n$ ,  $\mathbf{p} =$  Matrix des elektrischen Moments). Der Anfangszustand (0) des Atoms sei immer der Grundzustand, so dass nur die Terme mit den Nennern  $\omega_{l0} - \nu^0$  zu Resonanzen Anlass geben können.

Nehmen wir einfachheitshalber zunächst an, dass der Grundzustand nicht-entartet ist, und dass die eingestrahlte Frequenz  $\nu^0$  so klein sei, dass — wegen Energie-Erhaltung und Auswahlregeln — kein Ramansprung möglich sei, d. h. dass als Endzustand  $n$

wieder nur der Grundzustand in Betracht komme (elastische Streuung), so reduziert sich  $\underline{K}$  auf

$$(\mathfrak{f}e0|\underline{K}|\mathfrak{f}^0e^00) = \frac{2\pi\nu}{G} (ee^0) \alpha(\nu) \delta(\nu^0 - \nu),$$

wo  $\alpha(\nu)$  die Polarisierbarkeit des Grundzustandes bedeutet. Das Eigenwertproblem dieser Matrix

$$\sum_{\mathfrak{f}^0e^0} (\mathfrak{f}e0|\underline{K}|\mathfrak{f}^0e^00) u(\mathfrak{f}^0e^0) = \beta(\nu) \cdot u(\mathfrak{f}e)$$

führt, mit den Eigenfunktionen  $u(\mathfrak{f}e) = (e \cdot a)$  [ $a =$  konstanter Vektor], zu den Eigenwerten

$$\beta(\nu) = \frac{2\nu^3}{3\pi c^3} \alpha(\nu).$$

Beachtet man, dass  $\underline{K}^2 = \beta(\nu^0) \cdot \underline{K}$ , so findet man als Lösung der HEITLER'schen Integralgleichung (vgl. (4a)) die Streumatrix:

$$\underline{R} = \frac{2\pi i \underline{K}}{1 - \pi i \beta(\nu^0)}. \quad (15)$$

Wird ferner angenommen, dass in dem betrachteten Frequenzbereich ( $\nu^0 < \omega_{n0}$ ,  $n \neq 0$ ) eine Resonanzfrequenz  $\omega_{l0}$  liegt, so wird dort  $\alpha(\nu^0)$  wie  $\text{const.} (\omega_{l0} - \nu^0)^{-1}$  unendlich. In der Umgebung der Resonanzstelle kann man daher für den Nenner in (15) näherungsweise schreiben:

$$1 - \pi i \beta(\nu^0) \cong 1 + \frac{i}{2} \frac{A_{l0}}{\nu^0 - \omega_{l0}} = \frac{\nu^0 - \omega_{l0} + \frac{i}{2} A_{l0}}{\nu^0 - \omega_{l0}}, \quad (16)$$

wo  $A_{l0}$  den EINSTEIN'schen Koeffizienten (Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit) des spontanen Emissionsprozesses  $l \rightarrow 0$  darstellt. Folglich variiert  $\underline{R}$  in der Resonanznähe wie

$$\frac{\alpha(\nu^0)}{1 - \pi i \beta(\nu^0)} \cong \text{const.} \frac{1}{\nu^0 - \omega_{l0} + \frac{i}{2} A_{l0}}, \quad (16a)$$

was der wohlbekanntten Theorie der Resonanzfluoreszenz entspricht<sup>7)</sup>.

$1 - \pi i \beta(\nu^0)$ , als analytische Funktion von  $\nu^0$ , hat Nullstellen bei  $\nu^0 \cong \omega_{l0} - \frac{i}{2} A_{l0}$ ; dies sind die oben erwähnten Pole des  $\underline{R}$ -Eigenwerts. Die zugehörige „Energie“ des Gesamtsystems ist  $E_l - \frac{i\hbar}{2} A_{l0}$ ; ihr Imaginärteil entspricht nach MÖLLER<sup>8)</sup> einer zeitlich-exponentiellen Abklingung des Zustandes mit der Wahrscheinlichkeit  $A_{l0}$  pro Zeiteinheit. Dass es sich hier um die spontane Emission (Übergang  $l \rightarrow 0$ ) handelt, wird auch durch die Struktur des zu-



gehörigen Strahlungsfeldes belegt. Um diese zu bestimmen, hat man nach den Regeln der  $S$ -Matrixtheorie folgendermassen zu verfahren: Aus den für reelle  $\nu^0$ -Werte erhaltenen Lösungen

$$(\mathfrak{f}e|\psi|\mathfrak{f}^0e^0) = (\mathfrak{f}e|1|\mathfrak{f}^0e^0) + (e|R|e^0) \delta_+(E^0 - E)$$

bilde man durch Superposition Eigenfunktionen von  $\underline{S}$ , d. h. von  $\underline{K}$ , was hier durch Multiplikation mit  $(e^0 \cdot a)$  und Mittelung über die Orientierungen von  $e^0$ ,  $\mathfrak{f}^0$  bei festem  $\nu^0$  geschehen kann. Dann führe man die analytische Fortsetzung in die komplexe  $E^0$ - oder  $\nu^0$ -Ebene aus und betrachte die Residuen der Eigenfunktion in den Polen von  $R$ . Da hier nicht ein stationärer, sondern ein zeitlich abklingender Zustand betrachtet wird, ist man genötigt, für die  $\delta_+$ -Funktion eine Darstellung zu verwenden, welche die Zeit  $t$  noch enthält; als natürlichster Ansatz bietet sich die aus der Störungstheorie folgende Darstellung

$$\delta_+(\nu^0 - \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \cdot e^{-i(\nu^0 - \nu)t'},$$

wo also  $t$  zwar beliebig gross aber endlich sein soll. Hiermit lässt sich die analytische Fortsetzung in die komplexe  $\nu^0$ -Ebene ohne weiteres durchführen (wobei  $\nu$  eine reelle Variable bleibt), und man erkennt leicht, dass das Residuum der Eigenfunktion im Pol  $\nu^0 = \omega_{l_0} - \frac{i}{2} A_{l_0}$  dem Emissionsfeld eines gedämpften Oszillators (Frequenz  $\omega_{l_0}$ , Dämpfung  $A_{l_0}$ , Schwingungsrichtung  $a$ ) entspricht. Die räumliche Struktur des Feldes kann man durch Anwendung der Feldoperatoren auf die Eigenfunktion bestimmen. Das Ergebnis deckt sich völlig mit der WEISSKOPF-WIGNER-Theorie der Dämpfung beim spontanen Emissionsvorgang<sup>9)</sup>.

Es sei daran erinnert, dass wir bei dieser Betrachtung von der KRAMERS-HEISENBERG'schen Dispersionsformel ausgegangen sind, also von einer  $K$ -Matrix, die primär *nur Streuprozesse* darstellt. Trotzdem sind wir, durch die Methode der analytischen Fortsetzung, auch zu einer Beschreibung der *spontanen Emission* gelangt. Während in der üblichen störungsmässigen Behandlung der Strahlungsprozesse die KRAMERS-HEISENBERG-Formel aus den Matrixelementen für Emission und Absorption abgeleitet wird, ergibt sich hier der Zusammenhang auch in der umgekehrten Richtung. Sieht man mit HEISENBERG die  $S$ -Theorie als den Rahmen für eine zukünftige allgemeine Theorie an, so möchte man vermuten, dass einem solchen Zusammenhang eine mehr als nur formale Bedeutung zukommt.

Zu den obigen Formeln (16), (16a) ist noch zu bemerken, dass in ihnen Terme der Ordnung  $A_{l_0}/\omega_{l_0}$  vernachlässigt sind. Für die analytische Fortsetzung in die unmittelbare Umgebung der reellen  $\nu^0$ -Achse ist dies unbedenklich. In der nächsten Näherung werden die Pole von  $R$ :  $\nu^0 = \omega_{l_0} - \frac{i}{2} A_{l_0} + \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  reell und von der Grössenordnung  $A_{l_0}^2/\omega_{l_0}$  ist. Die hierdurch gegebene Linienverschiebung ist klein gegen die natürliche Linienbreite und deshalb uninteressant. Eine durch Selbstenergien (Bindungsabhängigkeit der Selbstenergie) bedingte Linienverschiebung<sup>10)</sup> steht hier nicht zur Diskussion; in der Tat ist es ja für die HEITLER'sche Strahlungsdämpfungstheorie charakteristisch, dass die Selbstenergie (durch die Weglassung der entsprechenden Terme in der  $K$ -Matrix) subtrahiert wird.

Bisher haben wir  $\nu^0$  so klein angenommen, dass keine Raman-sprünge  $0 \rightarrow n$  auftreten können ( $\nu^0 < \omega_{n_0}$ ). Für höhere Frequenzen lässt sich immerhin die *Resonanzstreuung* noch in einfacher Weise behandeln, indem man in der  $K$ -Matrix nur die Terme mit kleinen Nennern ( $\omega_{l_0} \cong \nu^0$ ) berücksichtigt. Allerdings ist die einfache Lösbarkeit der HEITLER'schen Integralgleichung, ähnlich wie dies aus der WEISSKOPF'schen Arbeit<sup>7)</sup> bekannt ist, noch an die Bedingung gebunden, dass

$$\sum_{(n)} (\mathbf{p}_{ln} \cdot \mathbf{p}_{n'l'}) = 0 \quad \text{für} \quad l \neq l', E_l \cong E_{l'} \cong E_0 + h\nu^0, \quad (17)$$

wo die Summe über die Endzustände  $(n)$  in einem schmalen Energie-Intervall läuft. Im Falle einer Richtungsentartung ist (17) erfüllt. Dann erhält man die  $R$ -Matrix aus der Matrix  $2\pi i K$ , indem man die Resonanznenner  $\omega_{l_0} - \nu^0$  durch  $\omega_{l_0} - \frac{i}{2} \Gamma_l - \nu^0$  ersetzt, wo

$$\Gamma_l = \sum_{\substack{n \\ (E_n < E_l)}} A_{ln}. \quad (18)$$

Die Pole bei  $\nu^0 = \omega_{l_0} - \frac{i}{2} \Gamma_l$  entsprechen den spontanen Emissionsprozessen  $l \rightarrow 0$ , mit den richtigen Abklingungskonstanten  $\Gamma_l$ .

Hierbei ist aber folgendes zu beachten. Wenn man die *reelle* Variable  $\nu^0$  anwachsen und dabei einen Wert  $\omega_{n_0}$  überschreiten lässt, so dass ein neuer Ramansprung möglich wird, so ändert sich  $R$  als Funktion von  $\nu^0$  in *nicht-analytischer* Weise. Von verschiedenen Abschnitten der reellen  $\nu^0$ -Achse aus gelangt man daher zu verschiedenen analytischen Fortsetzungen, und die den spontanen Emissionen entsprechenden Pole werden — mit dem richtigen Imaginärteil (18) — nur dann erhalten, wenn man jeweils von dem

nächst benachbarten Abschnitt der reellen  $\nu^0$ -Achse aus analytisch fortsetzt.

Wird schliesslich  $\nu^0$  so gross gewählt, dass  $h\nu^0$  die Bindungsenergie des Grundzustandes übersteigt, so liegen die Resonanzniveaus  $E_l$  im kontinuierlichen Spektrum; die Resonanzabsorption  $0 \rightarrow l$  entspricht dem photoelektrischen Effekt. Durch analytische Fortsetzung sollte man nun auch die Emissionsprozesse  $l \rightarrow n$  erhalten können, die der *Bremsstrahlung* entsprechen. Die Lösung der HEITLER'schen Integralgleichung für diesen Fall wird aber dadurch erschwert, dass die Bedingung (17) nicht erfüllt ist für zwei Zustände  $l, l'$  im kontinuierlichen Spektrum, die die gleichen Drehimpulsquantenzahlen aber verschiedene Energie besitzen. Dies dürfte eine besondere Untersuchung nötig machen, auf die aber hier nicht eingetreten werden soll.

### Literatur.

<sup>1)</sup> E. C. G. STUECKELBERG, *Helv. Phys. Acta* **19**, S. 242, 1946. Von einer ausführlichen, noch unveröffentlichten Arbeit hat mir Herr Stueckelberg freundlicherweise das Manuskript zur Verfügung gestellt.

<sup>2)</sup> Vgl. W. HEITLER, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **37**, S. 291, 1941; W. PAULI, *Meson theory of nuclear forces*, New York 1946, Chapter IV; G. WENTZEL, *Rev. Mod. Phys.* **19**, S. 1, 1947, Abschnitt 5b.

<sup>3)</sup> J. M. BLATT (*Phys. Rev.* **72**, S. 466, 1947) hat bemerkt, dass die HEITLER'sche Integralgleichung darauf beruht, dass für die Rückwirkung der Streuwelle auf den Streuer die halbe Differenz von auslaufender und einlaufender Welle in Anrechnung gebracht wird. Für grosse Streuer (Ausdehnung gross gegen Wellenlänge) ist dies offenbar nicht haltbar. Die von B. FERRETTI und R. E. PEIERLS (*Nature* **160**, S. 531, 1947) erwähnten Schwierigkeiten der HEITLER'schen Strahlungsdämpfungstheorie dürften hiermit zusammenhängen. — Die auf der wellenmechanischen Störungstheorie fussende Begründung der HEITLER'schen Integralgleichung (vgl. Fussnote <sup>2)</sup>) ist auf den Fall mehrerer Streuer nicht anwendbar, da in den Zwischenzuständen nicht zwischen auslaufenden und einlaufenden Wellen unterschieden wird.

<sup>4)</sup> Dass  $\underline{S}$  unitär ist, d. h.  $\underline{R} + \underline{R}^* + \underline{R}^* \underline{R} = 0$ , folgt aus (7a) unmittelbar auf Grund der Beziehung

$$\underline{K} \overline{K}^* = \overline{K} \underline{K} = (2 \underline{K} - \overline{K}) \underline{K}$$

(vgl. (8) und (10)).

<sup>5)</sup> W. HEISENBERG, *Zeitschr. f. Naturforschung* **1**, S. 608, 1946, Abschnitt Id.

<sup>6)</sup> Vgl. W. HEITLER und N. HU, *Proc. Irish Roy. Acad.* **51**, S. 123, 1947.

<sup>7)</sup> Vgl. V. WEISSKOPF, *Ann. d. Phys.* **9**, S. 23, 1931.

<sup>8)</sup> C. MØLLER, *Kgl. Danske Vid. Selskab, Mat.-fys. Medd.* **22**, Nr. 19, 1946.

<sup>9)</sup> V. WEISSKOPF und E. WIGNER, *Zeitschr. f. Phys.* **63**, S. 54, 1930.

<sup>10)</sup> Vgl. H. A. BETHE, *Phys. Rev.* **72**, S. 339, 1947.