# Une méthode d'élimination des infinités en théorie des champs quantifiés : Application au moment magnétique du neutron

Autor(en): **Rivier, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **22 (1949)**

Heft III

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112006

# Une méthode d'élimination des infinités en théorie des champs quantifiés. Application au moment magnétique du neutron*)

par **D. Rivier.**

(28. I. 1949)

*Introduction.* La méthode utilisée est due à M. Stueckelberg. Elle s'appuie sur la forme intégrale qu'il a donnée à la théorie des champs quantifiés ([1]), ([2]), ([3]), ([4]), et que nous exposons dans un premier chapitre. A l'étude d'un opérateur hamiltonien $\boldsymbol{h}$, la nouvelle forme de la théorie substitue celle de l'opérateur intégral $\boldsymbol{S}$, donnant par l'équation:

$$\psi[\tau''] = \boldsymbol{S}[\tau'', \tau']\,\psi[\tau']$$

l'évolution entre deux époques quelconques $\tau''$ et $\tau'$ de la fonctionnelle $\psi$ décrivant le système.

Dans un deuxième chapitre, nous appliquons cette forme de la théorie au calcul du moment magnétique du neutron en troisième approximation. Comme on le sait cette valeur est infinie. Nous montrons alors comment il est possible de la rendre finie par une modification convenable de l'opérateur $\boldsymbol{S}$, lui conservant toutefois ses propriétés essentielles d'invariance, de causalité et d'unitarité. Mais ces conditions pour $\boldsymbol{S}$ ne suffisent pas pour le déterminer complètement. Il s'en suit que la valeur du moment magnétique du neutron n'est pas déterminée; il est possible toutefois de donner une règle simple déterminant sans ambiguïté cette valeur.

Nous avons groupé dans un appendice un ensemble de résultats mathématiques, pour la plupart connus, relatifs principalement aux fonctions $D$, et dont le développement fera l'objet d'une note à part. C'est à cet appendice que renvoient les indications telles que (A. I. 12).

## Chapitre I^er^.

### La forme intégrale de la théorie des champs.

#### 1. *La description des quanta dans l'espace homogène.*

#### *I. Champ scalaire.*

Considérons un quantum d'énergie-impulsion $(k) = (\vec{k}, k^4)$; si $\varkappa_u$ est sa masse (de repos), nous avons:

$$k^4 = +\sqrt{|\vec{k}|^2 + \varkappa_u^2}. \tag{1.1}$$

*) Ce travail constitue, à des détails près, une thèse présentée à l'Université de Lausanne, le 2 juillet 1948, pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences.

*

L'état du quantum est caractérisé par l'amplitude de probabilité $\psi(\vec{k}/)$ satisfaisant comme telle à la relation:

$$\int dV(\vec{k})\, \psi^+(/\vec{k})\, \psi(\vec{k}/) = 1 \qquad dV(\vec{k}) = \frac{(d\,k)^3}{k^4} \text{ invariant.} \tag{1.2}$$

Les phénomènes de diffraction auxquels sont sujets les ensembles de quanta permettent de les décrire par des paquets d'ondes planes dans l'espace:

$$u\,(x/) = (2\,\pi)^{-3/2} \int dV(\vec{k})\, e^{i\,(k\,x)}\, \psi(\vec{k}/) = U(x/\vec{k})\, \psi(\vec{k}/) \tag{1.3}$$

en utilisant la notation abrégée $(\ldots/\vec{k})\,(\vec{k}/\ldots) = \int dV(\vec{k})\,(\ldots/\vec{k})\,(\vec{k}/\ldots)$ pour le produit matriciel et la matrice:

$$U(x/\vec{k}) = (2\,\pi)^{-3/2}\, e^{i\,(k\,x)} \tag{1.3a}$$

Si en un point $(\vec{x}, t)$ de l'espace-temps on a $u(x/) \neq 0$, il y a une probabilité non nulle d'interaction entre le quantum et un champ «extérieur» $C(x)$ différent de zéro en ce point. On a d'ailleurs:

$$(\Box - \varkappa_u^2)\, u\,(x/) = 0 \qquad \Box = \partial^\alpha\, \partial_\alpha \tag{1.4}$$

La matrice $U\,(x/\vec{k})$ satisfait aux relations:

$$\int\limits_{\tau(x)} d\sigma^\alpha\, U^+(\vec{k}''/x)\, \boldsymbol{p}_\alpha\, U(x/\vec{k}') = \delta(\vec{k}''/\vec{k}'); \qquad \boldsymbol{p}_\alpha = \frac{1}{i}\, \boldsymbol{\partial}_\alpha \tag{1.5}$$

$$\int dV(\vec{k})\, U(x''/\vec{k})\, U^+(\vec{k}/x') = D_\varkappa^+(x''/x') \tag{1.6}$$

où $\int\limits_{\tau(x)} d\sigma^\alpha$ désigne une intégrale étendue à une hypersurface spatiale $\tau(x) = 0$ (à normale $(d\sigma, d\sigma) < 0$) de l'espace-temps. La première de ces relations exprime que le système des paquets d'onde $k'', k'$, est orthonormal, c'est-à-dire formé d'ondes planes représentées par des fonctions orthogonales et normalisées à l'unité; et la seconde que ces fonctions représentatives forment un système complet ou «*saturé*». Nous appelons pour abréger ces deux relations: relations d'*orthogonalité* et de «*saturation*» du système de paquets.

Nous avons envisagé dans ce qui précède des paquets d'ondes formés d'ondes planes; cette restriction n'est pas nécessaire; dans bien des cas, au contraire, il est préférable de décrire la particule par des paquets d'ondes tout à fait généraux, pourvu qu'ils forment un système orthogonal et saturé.

Soit donc $v, v', \ldots$ un ensemble de paquets d'ondes. Nous pouvons décomposer la fonction d'onde $u(x)$ décrivant la particule dans l'espace $x$ suivant ce système, en écrivant:

$$u(x/) = U(x/v)\, \psi(v/) \tag{1.7}$$

avec:

$$U(x/v)\,\psi\,(v/) = \int dV(v)\,U(x/v)\,\psi\,(v/) \tag{1.8}$$

Le système de paquets est orthogonal et saturé si nous imposons les relations analogues à (1.5) et (1.6):

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha\,U^+(v''/x)\,\boldsymbol{p}_\alpha\,U(x/v') = \delta\,(v''/v') \tag{1.9}$$

$$\int dV(v)\,U(x''/v)\,U^+(v/x') = D_\varkappa^+(x''/x') \tag{1.10}$$

où $dV(v)$ est l'élément de volume invariant dans l'espace des paquets, et $\delta(v''/v')$ la fonction singulière invariante satisfaisant à:

$$\int dV(v')\,\delta\,(v'/v'') = 1 \tag{1.11}$$

Dans l'espace $k$, que nous avons considéré pour commencer, on avait par exemple:

$$\delta\,(\vec{k}'/\vec{k}'') = k^{1''}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}'') \tag{1.12}$$

De cette manière la fonction $\psi(v/)$ est une amplitude de probabilité, puisqu'il résulte de (1.7) et (1.12):

$$\int dV(v)\,\psi^+(/v)\,\psi\,(v/) = 1 \tag{1.13}$$

On peut passer directement de l'espace $\vec{k}$ à l'espace $v$ par une matrice $S(v/\vec{k})$:

$$\psi\,(v/) = S\,(v/\vec{k})\,\psi(\vec{k}/) \tag{1.14}$$

Les conditions (1.2) et (1.13) entraînent l'unitarité de cette matrice:

$$S(v''/\vec{k})\,S^+(\vec{k}/v') = \delta(v''/v') \qquad S^+(\vec{k}''/v)\,S\,(v/\vec{k}') = \delta(\vec{k}''/\vec{k}') \tag{1.15}$$

Il est clair que les matrices $U(x/\vec{k})$, $U(x/v)$,... considérées comme fonctions de $x$, $\vec{k}$, $v$,... étant constants, décrivent des paquets d'ondes correspondant à des états $\vec{k}$, $v$,... bien déterminés du quantum. Nous pouvons écrire:

$$U(x/\vec{k}') = u(x/\vec{k}') = u'(x); \quad U(x/v'') = u(x/v'') = u''(x) \tag{1.16}$$

et, pour les relations d'orthogonalité et de saturation utiliser les formes condensées:

$$\int_\tau d\sigma^\alpha\,u''^+(x)\,\boldsymbol{p}_\alpha\,u'(x) = \delta\,(u''/u') \tag{1.17}$$

$$\int dV(u)\,u(x'')\,u^+(x') = D_\varkappa^+\,(x''/x') \tag{1.18}$$

Enfin, pour les applications, notons que (1.17) peut s'écrire, en prenant pour hypersurface $\tau$ un plan $\tau(x) = x^4 - a = 0$:

$$\int (dx)^3\, u''^{+}(x)\, \boldsymbol{\Omega}\, u'(x) = \delta(u''/u') \tag{1.19}$$

avec l'opérateur $\frac{1}{i}\,\partial_t = \boldsymbol{\Omega}$.

Cette dernière relation montre que dans l'espace $x$ la fonction:

$$\boldsymbol{\Omega}^{1/2}\, u(x)$$

joue le rôle d'une amplitude de probabilité. Soit alors $\boldsymbol{G}$ un opérateur lié à une grandeur physique: il est défini par ses représentations $G(x''/x')$ dans l'espace ou $G(u''/u')$ dans l'espace (des paquets) $u$. On passe d'une représentation à l'autre par la relation:

$$G(u''/u') = \int (dx)^3\, u''^{+}(x)\, (\boldsymbol{\Omega}^{1/2}\, \boldsymbol{G}\, \boldsymbol{\Omega}^{1/2})\, u'(x) \tag{1.20}$$

Nous n'avons maintenant envisagé que le cas d'un seul quantum $k$ dans l'espace homogène. Mais la description utilisée se généralise immédiatement au cas de plusieurs quanta *sans interaction* dans l'espace homogène. Par exemple dans le cas de 2 quanta, le premier étant décrit par $\psi(\vec{k})/$, $\psi(u/),\ldots$, nous représentons le second, si $l$ est son énergie impulsion, par une amplitude de probabilité $\psi(\vec{l}/)$, $\psi(v/),\ldots$ Nous avons une description simultanée des deux quanta (sans interaction) dans un seul espace de configuration $(\vec{k}, \vec{l})$, $(u, v)\ldots$ au moyen d'une amplitude de probabilité $\psi(\vec{k}, \vec{l}/)$, $\psi(uv/)\ldots$ On peut décrire ces deux quanta dans un espace $(x_u, x_v)$ (à temps multiples) en introduisant la fonction:

$$u(x_u, x_v/) = U(x_u/\vec{k})\; U(x_v/\vec{l}\,)\; \psi(\vec{k}, \vec{l}\,/) \tag{1.21}$$

Comme on le voit, le passage à plusieurs quanta sans interaction s'opère sans difficulté.

Pour achever la description du champ de quanta scalaire il est utile d'introduire une densité de courant $\boldsymbol{J}^\alpha$ définie par la matrice:

$$J_\alpha(u''/u')\,(x) = \frac{1}{2\,i}\,(u''^{+}\,\partial_\alpha\, u' - \partial_\alpha\, u''^{+}\cdot u')\,(x)\,;\ \partial_\alpha J^\alpha \equiv 0 \qquad (1.22)^{*})$$

permettant de représenter la charge totale par:

$$e(u''/u') = \int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha\, J_\alpha(u''/u')\,(x) \tag{1.23}$$

On voit facilement que, en particulier:

$$e(\vec{k}''/\vec{k}\,') = \delta(\vec{k}''/\vec{k}\,'). \tag{1.24}$$

---

*) Nous écrivons, d'une manière générale $(u\, v\, h)\,(x)$ pour $u(x)\cdot v(x)\cdot h(x)$.

## 2. *La description des quanta dans l'espace homogène.*
## II. *Champ spinoriel.*

La description que nous venons de donner des quanta scalaires s'étend sans difficulté aux quanta vectoriels et spinoriels. Pour le montrer traitons rapidement ce dernier cas.

L'état d'une particule spinorielle est donné par son quadrivecteur impulsion énergie $(k) = (\vec{k}, k^4) = +\sqrt{\varkappa_u^2 + |\vec{k}|^2}$ d'une part, et par sa polarisation $n$ d'autre part. On doit donc décrire cette particule par une amplitude de probabilité $\psi(\vec{k}, n/)$, avec:

$$\sum_n \int \frac{(d\,k)^3}{k^4} \psi^+(/\vec{k}, n)\, \psi(\vec{k}, n/) = \int dV(\vec{k}, n)\, \psi^+(/\vec{k}, n)\, \psi(\vec{k}, n/) = 1 \qquad (2.1)$$

dans l'espace $(\vec{k}, n)$. Dans l'espace $x$, la particule est décrite par la fonction spinorielle:

$$u^A(x/) = U^A(x/\vec{k}, n)\, \psi(\vec{k}, n/) = \int dV(\vec{k}, n)\, U^A(x/\vec{k}, n)\, \psi(\vec{k}, n/) \qquad (2.2)$$

paquet d'ondes planes, où:

$$U^A(x/\vec{k}, n) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \pi^A(\vec{k}, n)\, e^{i(k,x)} \qquad (2.3)$$

est l'onde plane correspondant à une particule dans l'état $(\vec{k}, n)$. (2.2) satisfait à l'équation de M. Dirac:

$$((\gamma, \partial) + \varkappa)^A{}_{A'}\, u^{A'}(x/) = 0 \qquad (\gamma, \partial) = \gamma^\alpha \partial_\alpha; \qquad (2.4)$$

à cause de l'identité:

$$((\gamma, k) - i\varkappa)\,((\gamma, k) + i\,\varkappa) = ((k, k) + \varkappa^2) = 0 \qquad (2.5)$$

on a:

$$\pi^A(\vec{k}, n) = ((\gamma, k) + i\,\varkappa)^A{}_n\, a \qquad (2.6)$$

où $a$ est une constante. L'indice $A'$ allant de 1 à 4, il peut sembler qu'il y a 4 polarisations. Mais, comme on le déduit facilement de (2.5), la dégénerescence de $((\gamma, k) + i\varkappa)^A{}_{A'}$ est 2: il n'y a que deux polarisations indépendantes: $n = 1$, pour $A' = 1{,}3$ $n = 2$ pour $A' = 2{,}4$*).

La nécessité d'introduire dans la théorie une densité de courant $J^\alpha$ définie par la matrice:

$$J^\alpha(u''/u')\,(x)$$

satisfaisant à l'équation de continuité:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \qquad (2.7)$$

*) Nous utilisons pour les matrices $\gamma$ la représentation réelle de Majorana (5).

nous oblige d'introduire pour décrire la même particule dans l'état $\psi(\vec{k}, n/)$, à côté de $u^A(x/)$, un autre spineur satisfaisant à l'équation adjointe de celle de M. Dirac. Le plus simple est de poser, $c$ étant un facteur numérique:

$$J^\alpha (v''/u')(x) = c \cdot (v^+{}_A \gamma^{\alpha A}{}_B u^B)(x); \tag{2.8}$$

puis, au moyen de (2.7), nous déterminons l'équation adjointe pour $v_A^+(/x)$. On trouve facilement:

$$v_{A'}^+(/x)\,((\partial, \gamma) - \varkappa)^{A'}{}_A = 0 \tag{2.9}$$

qu'il faut lire de droite à gauche ($\partial$ opère sur $v_A^+(/x)$). Nous écrivons la décomposition du paquet $v_A^+(/x)$ en ondes planes:

$$v_A^+(/x) = \psi^+(/\vec{k}, n)\; V_A^+(\vec{k}, n/x);$$

$$V_A^+(\vec{k}, n/x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, \varrho_A^+(\vec{k}, n) \cdot e^{-i(k, x)} \tag{2.10}$$

d'une manière analogue à (2.2), avec:

$$\varrho_A^+(\vec{k}, n) = ((k, \gamma) + i\varkappa)^n{}_A \cdot b^+ \tag{2.11}$$

où $b^+$ est un nombre constant et l'indice $n$, allant de 1 à 2, numérote les polarisations, comme en (2.6). Posant:

$$\varkappa a b^+ = 1 \tag{2.12}$$

il vient:

$$\sum_{n=1}^{2} \pi^A(\vec{k}, n)\, \varrho_{A'}^+(\vec{k}, n) = i(\gamma, k + i\varkappa)^A{}_{A'} \tag{2.13}$$

Les spineurs $U^A(x/\vec{k}, n)$ et $V_A^+(\vec{k}, n/x)$ vérifient les relations d'orthogonalité et de saturation:

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha V_A^+(\vec{k}'', n''/x)\, \frac{i}{4}\, \gamma_\alpha U^A(x/\vec{k}'\, n') = \delta(\vec{k}''\, n''/\vec{k}'\, n')\ ^{*)} \tag{2.14}$$

$$\int dV(\vec{k}, n)\; U^{A''}(x''/\vec{k}, n)\; V_{A'}(\vec{k}, n/x')$$
$$= ((\gamma, \partial'') - \varkappa)^{A''}{}_{A'} D_\varkappa^+(x''/x') = D_\varkappa^{+A''}{}_{A'}(x''/x') \tag{2.15}$$

Nous avons jusqu'ici considéré la décomposition en ondes planes. Comme dans le cas scalaire, il est préférable de ne point s'y limiter.

---

*) Cette relation impose certaines conditions pour les paquets $u^A$, $v_A^+$, car elle signifie que la matrice $e\,(\vec{k}''\, n''/\vec{k}' n')$ est diagonale; or en toute généralité, la charge ne commute pas avec le spin.

Soit donc $w^A$, $w'^A$..., un ensemble de paquets d'ondes spinoriels. Nous pouvons effectuer la décomposition:

$$u^A(x/) = U^A(x/w)\,\psi(w/) = \int dV(w)\, U^A(x/w)\,\psi(w/) \tag{2.16}$$

$$v_A^+(/x) = \psi^+(/w)\, V_A^+(w/x) \tag{2.17}$$

où $\psi(w/)$ est une amplitude de probabilité dans l'espace de ces paquets. Le système de paquets est orthogonal et saturé si:

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha V^+(w''/x)\,\frac{i}{4}\,\gamma_\alpha U(x/w') = \delta(w''/w') \tag{2.18}$$

$$\int dV(w)\, U^{A''}(x''/w)\, V_{A'}^+(w/x') = D_{\varkappa}^{+A''}{}_{A'}(x''/x') \tag{2.19}$$

Toute l'écriture se simplifie encore par l'introduction d'un spineur fondamental $\xi_{AB}$ (c'est la «matrice $B$» de M. PAULI[6])) permettant le passage entre composantes spinorielles de variance différente:

$$u_A = \xi_{AB}\, u^B;\; u^B = u_A\, \xi^{AB} \qquad \xi_{AB} = \xi^{AB} = -\gamma^{4A}{}_B \tag{2.20}$$

entraînant les identités importantes:

$$u_A\, v^A = \xi_{AB}\, u^B\, v^A = -u^B\, \xi_{BA}\, v^A = -u^B v_B = -v_A\, u^A. \tag{2.21}$$

Nous écrivons maintenant:

$$v_A^+ = u_A^+ = (\xi_{AB}\, u^B)^+ = u^{B+}\, \xi_{BA} \tag{2.22}$$

ce qui donne pour les relations d'orthogonalité et de saturation en utilisant la notation condensée $U^A(x/u'') = u''^A(x)$, $V_A^+(x/u') = u'^+_A(x)$:

$$\int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha\, u''^+(x)\,\frac{i}{4}\,\gamma_\alpha\, u'(x) = \delta(u''/u') \tag{2.23}$$

$$\int dV(u)\, u^{A''}(x'')\, u_{A'}^+(x') = D_{\varkappa}^{+A''}{}_{A'}(x''/x') \tag{2.24}$$

Une grandeur physique $G$ à laquelle correspond l'opérateur $\boldsymbol{G}$ est représentée dans l'espace $u$, par la matrice:

$$G(u''/u') = \int (dx)^3\, u''(x)\,\frac{i}{4}\,\gamma_4\, \boldsymbol{G}\, u'(x) \tag{2.25}$$

Par exemple, celle qui représente la densité de courant:

$$J^\alpha(u''/u')(x) = \frac{i}{4}\,(u''^+\gamma^\alpha\, u')(x) \tag{2.26}$$

où on a fait dans (2.8) $c = \frac{1}{4}$, afin que la charge totale soit donnée par:

$$e\,(u''/u') = \int_{\tau(x)} d\sigma^\alpha J_\alpha(u''/u')(x) = \delta(u''/u') \tag{2.27}$$

3. *La description de l'évolution des quanta dans l'espace inhomogène.*

Dans l'espace homogène, des quanta sans interaction mutuelle n'évoluent pas: la fonctionnelle $\psi(u, v, w/\ldots)$ qui les décrit dans l'espace des paquets $u, v, \ldots$ ne varie pas. Mais dans l'espace inhomogène ou lorsqu'il y a interaction entre quanta, il y a évolution. Des observations faites à différentes époques ordonnées $\tau'(x)$, $\tau''(x)$ révèlent une variation en fonction de celles-ci. Une époque est définie par une hypersurface spatiale $\tau(x) = 0$ de l'espace-temps $x$ caractérisée par sa normale $d\sigma^\alpha(x)$ temporelle en chaque point. Ainsi l'état du système physique est décrit par une fonctionnelle:

$$\psi[\tau(\,), u, v, \ldots /] \tag{3.1}$$

de l'époque $\tau(x)$ et des paquets contenant les différents quanta; la variation de cette fonctionnelle en fonction de l'époque est décrite par un opérateur unitaire $\boldsymbol{S}$ donnant par l'équation:

$$\psi[\tau''(\,)] = \boldsymbol{S}[\tau''(\,), \tau'(\,)]\,\psi[\tau'(\,)];\ \boldsymbol{S}^+\boldsymbol{S} = 1 \tag{3.2}$$

la relation entre la fonctionnelle à l'époque $\tau''$ et celle à l'époque $\tau'$. L'unitarité de $\boldsymbol{S}$ découle immédiatement de la propriété pour la fonctionnelle d'être une amplitude de probabilité. Si les deux époques sont infiniment voisines l'une de l'autre $\tau''(x) - \tau'(x) = \delta\tau(x)$, $\boldsymbol{S}$ est un opérateur infinitésimal:

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{1} - i\boldsymbol{\delta S} \qquad \boldsymbol{\delta S} = \int_{\tau'} \left(d\sigma\,\delta\tau\left[-(\partial\tau, \partial\tau)\right]^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{h}(x)^*\right) \tag{3.3}$$

dont l'unitarité entraîne:

$$\boldsymbol{\delta S}^+ = \boldsymbol{\delta S} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{h}^+(x) = \boldsymbol{h}(x) \tag{3.4}$$

L'équation d'évolution (3.2) devient l'équation différentielle de MM. Stueckelberg(0) et Tomonaga(7)

$$-\frac{1}{i}\frac{\delta\psi}{\delta\tau(x)} = \left[-(\partial\tau, \partial\tau)\right]^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{h}(x)\,\psi \tag{3.5}$$

Il est possible de trouver pour $\boldsymbol{S}$ une expression en fonction de $\boldsymbol{h}$; il suffit pour cela d'intégrer (3.5) entre les limites $\tau''$ et $\tau'$. Nous le faisons en développant $\boldsymbol{h}$ suivant un paramètre de couplage $\varepsilon$:

$$\boldsymbol{h} = \varepsilon\boldsymbol{h}^{(1)} + \varepsilon^2\boldsymbol{h}^{(2)} + \varepsilon^3\boldsymbol{h}^{(3)} + \ldots \tag{3.6}$$

ce qui donne aussi pour $\boldsymbol{S}$ le développement correspondant:

$$\boldsymbol{S}[\tau''(\,), \tau'(\,)] = \mathbf{1} + \varepsilon\boldsymbol{S}^{(1)}[\tau''(\,), \tau'(\,)] + \varepsilon^2\boldsymbol{S}^{(2)}[\tau''(\,), \tau'(\,)] + \ldots \tag{3.7}$$

---

*) Avec nos définitions, l'élément de volume quadridimensionnel est en effet $d\delta V = (d\sigma\,\delta\tau[-(\partial\tau, \partial\tau)]^{-\frac{1}{2}}(x)$, où $(\partial\tau, \partial\tau) = \partial\tau_\alpha\,\partial\tau^\alpha$ et $d\sigma^\alpha = d\sigma \cdot \dfrac{d\sigma^\alpha}{\sqrt{-(d\sigma, d\sigma)}}$.

On trouve alors facilement les relations:

$$\left.\begin{aligned}
&S^{(1)}[\tau'', \tau'] = (-i)\int_L (dx')^4\, h^{(1)'} \\
&S^{(2)}[\tau'', \tau'] = (-i)^2\Big[i\int_L (dx')^4 h^{(2)'} + \int_L (dx'')^4 \cdot \int_L (dx')^4 \cdot \theta^{+'';'}\, h^{(1)''} \cdot h^{(1)'}\Big] \\
&S^{(3)}[\tau'', \tau'] = (-i)^3\Big[-\int_L (dx')^4 h^{(3)'} + i\int_L (dx'')^4 \cdot \int_L (dx')^4 \cdot \theta^{+'';'}[h^{(1)''} \cdot h^{(2)'} \\
&\quad + h^{(2)'} \cdot h^{(1)''}] + \int_L (dx''')^4 \cdot \int_L (dx'')^4 \cdot \int_L (dx')^4\, \theta^{+''';''} \cdot \theta^{+'';'} \cdot h^{(1)'''} \cdot h^{(1)''} \cdot h^{(1)'}\Big]
\end{aligned}\right\}(3.8)$$

où nous avons utilisé les notations abrégées:

$$\left.\begin{aligned}
&h^{(i)'} = h^{(i)}(x');\ h^{(1)''} = h^{(1)}(x'');\ldots \\
&\theta^{+'';'} = \theta^{+}(\tau''(x) - \tau'(x));\ldots \qquad \theta^{+}(z) = \theta^{-}(-z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}
\end{aligned}\right\}(3.9)$$

$(dx')^4 = \delta\tau\, d\sigma\, [-(\partial\tau, \partial\tau)]^{-\frac{1}{2}}(x')$: élément de volume de l'espace-temps; $\boldsymbol{L}$: hypervolume de l'espace temps limité par les 2 surfaces $\tau'(x)$ et $\tau''(x)$ et par le cylindre $R = \infty$.

La théorie habituelle des champs quantifiés utilise l'équation (3.5); l'opérateur $\boldsymbol{h}$ qui y figure est la densité d'énergie d'interaction caractérisant l'inhomogénéité de l'espace. On l'obtient dans le cadre d'un formalisme lagrangien assurant la *covariance* de la théorie, bien que la variance même de $\boldsymbol{h}$ ne soit pas définie en général. L'*hermicité* de $\boldsymbol{h}$ conserve à $\psi$ son caractère d'amplitude de probabilité. Enfin, la *causalité* de la théorie est assurée par l'équation d'évolution différentielle (3.5).

Sous la forme que lui donne M. STUECKELBERG, la théorie s'appuie sur l'équation intégrale (3.2). Les critères de validité de la théorie sont alors appliqués à l'opérateur $\boldsymbol{S}$. La *covariance* relativiste demande que $\boldsymbol{S}$ soit un scalaire invariant, puisque les amplitudes de probabilité $\psi[\tau'']$ et $\psi[\tau'']$ le sont. Le caractère probabiliste de $\psi$ entraîne l'*unitarité* de $\boldsymbol{S}$. Enfin la *causalité*, qui n'est plus assurée par l'existence d'une équation différentielle a priori, exige pour l'opérateur $\boldsymbol{S}$ la structure particulière suivante: dans les différents termes $\boldsymbol{S}^{(i)}$ du développement (3.7) ne peuvent apparaître dans les noyaux des intégrales qui les représentent qu'un seul type de fonctions potentielles, les fonctions $D^c_\varkappa$ (A. III. 19).

Ce dernier point peut être justifié de manière axiomatique: si par *causale* on entend une théorie qui permette l'énoncé d'un principe de causalité, et si l'on remarque qu'une condition nécessaire pour celui-ci est l'exclusion d'états d'énergie négative, on peut montrer que la seule fonction potentielle d'une théorie quantique, invariante et causale est précisément la fonction:

$$D^c_\varkappa(x) = \frac{i}{2}\left[\theta^+(x^4)\, D^+_\varkappa(x) + \theta^-(x^4)\, D^-_\varkappa(x)\right] \qquad (3.10)$$

qui contient dans le futur ($x^4 > 0$) uniquement des ondes à fréquences positives, et dans le passé ($x^4 < 0$) uniquement des ondes à fréquences négatives. Elle traduit cet aspect du principe de causalité quantique selon lequel une inhomogénéité $\delta(x)$ de l'espace peut: ou bien *émettre* (futur) un quantum dans un paquet $u''(x)$, ou bien *absorber* (passé) un *quantum* dans un paquet $u'(x)$.

Mais on peut aussi démontrer la présence nécessaire des $D^c_\varkappa(x)$ dans les $\boldsymbol{S}^{(i)}$ d'une manière directe, en construisant l'opérateur $\boldsymbol{S}$ à partir d'un scalaire $\boldsymbol{h}$ représentant un type défini d'interaction (c'est un des termes de l'hamiltonien de la théorie habituelle, lorsqu'on le développe suivant les demi-champs). On se sert pour cela des relations (3.9). Schématiquement on procède comme suit:

1. On choisit le type d'interaction: nombre, variance et degré de chaque champ $u, v, \varphi, \chi$ en se donnant une matrice de transition:

$$\varepsilon h(u'' v'' / \varphi' \chi') = \varepsilon\,(u''^{+} \ldots v''^{+} \ldots \varphi' \ldots \chi' \ldots)\,(x) \qquad (3.12)$$

(décrivant un processus élémentaire où il y a absorption des paquets $\varphi', \chi'$, et création des paquets $u'', v'', \ldots$).

2. On construit, au moyen des relations (3.9), les différents $S^{(i)}$, représentation des $\boldsymbol{S}^{(i)}$. On remarque qu'ils ne sont pas invariants.

3. On complète ces $S^{(i)}$ en faisant intervenir tous les processus possibles du type (3.12), en ayant soin de les combiner en accord avec le principe de causalité énoncé plus haut. Dans certains cas, cela suffit pour faire apparaître les fonctions $D^c_\varkappa(x)$. L'opérateur $\boldsymbol{S}''$ convenable (c'est-à-dire unitaire, invariant et causal) est construit. Mais en général, pour obtenir celui-ci, il faut encore ajouter des termes correspondant à un processus additionnel d'ordre supérieur en $\varepsilon$ en (3.12) (cf. § 4. B).

L'*invariance* des différents $\boldsymbol{S}^{(i)}$ est assurée sans autre par l'invariance des fonctions $D^c_\varkappa(x)$.

Par contre, l'*unitarité* de $\boldsymbol{S}$ doit faire l'objet d'une démonstration. On peut premièrement montrer que le $\boldsymbol{S}$ est engendré par un opérateur $\boldsymbol{h}$ qui est hermitien; $\boldsymbol{S}$ est unitaire *ipso facto*. Mais la démonstration n'est pas générale: c'est une vérification a posteriori.

On peut aussi démontrer directement l'unitarité de $\boldsymbol{S}$, sans faire appel à l'existence d'un opérateur $\boldsymbol{h}$. Cette démonstration a deux avantages. Premièrement elle libère la théorie de l'équation différentielle (3.5); secondement — et grâce à cela —, elle permet de trouver, à partir de l'opérateur $\boldsymbol{S}$ «convenable», d'autres opérateurs $\bar{\boldsymbol{S}}$, convenables aussi, mais ayant un sens physique, tandis que l'opérateur $\boldsymbol{S}$ n'en a pas toujours, comme c'est le cas si des $\boldsymbol{S}^{(i)}$ sont *infinis*. Le deuxième chapitre du travail a précisément pour objet l'étude d'un de ces cas.

## 4. *Applications élémentaires. I. Un seul champ quantifié.*

Les quatre cas très simples étudiés dans ce paragraphe ont pour but d'illustrer l'invariance de la méthode par rapport aux différents types d'interaction. Nous ne quantifions qu'un seul champ afin de simplifier les raisonnements et l'écriture. La généralisation à plusieurs champs quantifiés est l'affaire du § 5.

### A. *Champ de quanta scalaires; champ extérieur scalaire.*

Le type d'interaction est donné par:

$$\varepsilon h\,(u''/u') = \varepsilon\,(u''^{+} C\,u')\,(x) \qquad C\,(x)\text{: nombre C} \tag{4.1}$$

Les relations (3.8) donnent, avec

$$\tau''\,(x) = x^{4''} - x^{4} = 0,\ \ \tau'\,(x) = x^{4'} - x^{4} = 0:$$

$$S^{(0)}(u''/u') = \delta\,(u''/u') \qquad S^{(1)}(u''/u') = (-\,i)\int\limits_{L} (dx)^4\,(u''^{+} C u')\,(x)$$

$$S'^{(2)}(u''/u') = (-i)^2\int\limits_{L}(dx'')^4\int\limits_{L}(dx')^4$$

$$\int dV(u)\ (u''^{+} C\,u)\ (x'')\ (u^{+} C\,u')\,(x')\ \theta^{+}(x^{4''} - x^{4'})\ldots \tag{4.2}$$

$S'^{(2)}(u''/u')$ peut s'écrire en utilisant les relations de saturation (10.12a):

$$S^{(2)}\,(u''/u') = (-\,i)^2\int\limits_{L}(dx'')^4\int\limits_{L}(dx')^4\cdot(u^{+''}\,C)\ (x'')$$

$$\cdot\ \theta^{+}\,(x''^{4} - x'^{4})\ D^{+}_{\varkappa}\,(x''/x')\cdot(C\,u')\ (x') \tag{4.3)*}$$

Il n'est pas invariant, comme les $S^{(3)}$, $S^{(4)}$,... On ajoute alors les interactions:

$$h_c(u''\ u'/\mathrm{o}) = \varepsilon\,(u''^{+}\,C\,u'^{+})\,(x) \tag{4.4}$$

$$h_a\,(\mathrm{o}/u''u') = \varepsilon\,(u''\ C u')\,(x) \tag{4.5}$$

correspondant à des créations et à des annihilations de paires.

---

*) Dans la suite, nous écrivons $\int$ pour $\int\limits_{L}$

L'opérateur $\boldsymbol{S}^{(1)}$ n'est pas modifié par la correction de $\boldsymbol{h}$, puisqu'il ne décrit qu'une seule transition. Par contre à l'opérateur $\boldsymbol{S}'^{(2)}$ s'ajoute la contribution nouvelle, représentée par:

$$S^{(2)''}(u''/u') = (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \int dV(u)\,(u'\,C\,u)\,(x'')\cdot(u^+ C\,u^{+''})\,(x')$$
$$\cdot\,\theta^+(x^{4''}-x^{4'}) = (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u'\,C)\,(x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})$$
$$\cdot\, D_\varkappa^+(x''/x')\cdot(C\,u^{+''})\,(x')$$

ou encore, en changeant l'ordre des facteurs en échangeant les variables $x'$ et $x''$ (cf. A. III. 12):

$$S^{(2)''}(u''/u') = (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u^{+''}\,C)\,(x'')\cdot\theta^-(x^{4''}-x^{4'})$$
$$\cdot\, D_\varkappa^-(x''/x')\cdot(C\,u')\,(x') \tag{4.6}$$

On obtient alors:

$$S^{(2)}(u''/u') = (S^{(2)'} + S^{(2)''})\,(u''/u') = (-i)^2 \frac{2}{i} \int (dx'')^4$$
$$\int (dx')^4 \cdot (u^{+''}\,C)\,(x'')\cdot D_\varkappa^c(x''/x')\cdot(C\,u')\,(x') \tag{4.7}$$

Les mêmes calculs et les mêmes raisonnements doivent être faits pour obtenir $\boldsymbol{S}^{(3)}$, $\boldsymbol{S}^{(4)}$,... On trouve sans difficulté:

$$S^{(n)}(u''/u') = (-i)^n \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^{n-1} \cdot \int^{(n)} \cdots \int^{\prime} \cdot (u''^{+}\,C)\,(x^{(n)})\cdot D_\varkappa^c(x^{(n)}/x^{(n-1)})$$
$$\cdot\, C(x^{n-1})\ldots C(x'')\,D_\varkappa^c(x''/x')\,(C\,u')\,(x') \tag{4.8}$$

en ne faisant intervenir que les trois interactions (4.1), (4.4) et (4.5).

B. *Champ de quanta scalaires chargés; champ extérieur vectoriel.*

L'interaction type est donnée maintenant par (cf. 1.22):

$$\varepsilon\,h(u''_\pm/u'_\pm) = \mp\,\varepsilon\,(A^\alpha J_\alpha(u''_\pm/u'_\pm))\,(x) =$$
$$\pm\,\frac{i}{2}\,\varepsilon\,A^\alpha(x)\,(u''^{+}_\pm\,\partial_\alpha u'_\pm - \partial_\alpha u''^{+}_\pm\cdot u'_\pm)\,(x) \tag{4.9}$$

$u_\pm$ suivant qu'il s'agit de quanta ou d'antiquanta. On trouve:

$$S^{(2)}(u''_+/u'_+) = \frac{(-i)^4}{4} \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot [(\partial_{\alpha''} u''^{+}_+ \cdot A^{\alpha''})\,(x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})$$
$$\cdot\, D^+_{;\beta}(x''/x')\cdot(A^{\beta'}\cdot u'_+)\,(x')$$
$$-(\partial_{\alpha''} u''^{+}_+ \cdot A^{\alpha''})\,(x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})\,D^+(x''/x')\cdot(A^{\beta'}\cdot\partial_{\beta'} u'_+)\,(x')$$
$$-(u''^{+}_+\cdot A^{\alpha''})\,(x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})\,D^{\;+}_{;\alpha''\beta'}(x''/x')\cdot(A^{\beta'}\,u'_+)(x')$$
$$+(u''^{+}_+\cdot A^{\alpha''})(x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})\,D^+_{;\alpha''}(x''/x')\cdot(A^{\beta'}\,\partial_{\beta'} u'_+)(x')] \tag{4.10*}$$

*) Pour alléger l'écriture, nous laissons tomber l'indice $\varkappa$ dans $D_\varkappa(x)$.

qui, manifestement n'est pas invariant. Pour la correction introduisons comme précédemment les invariants correspondant aux processus de création et d'annihilation de paires:

$$\varepsilon\, h_c (u''_- \; u'_+ /)$$
$$= \frac{1}{2}\, \varepsilon A^\alpha J^c_\alpha (u''_- \; u'_+ /) = \varepsilon\, \frac{i}{2}\, A^\alpha(x)\, (u''^+_- \, \partial_\alpha u'^+_+ - \partial_\alpha u''^+_- \cdot u'^+_+)\,(x) \quad (4.11)$$

$$\varepsilon\, h_a (/ u''_+ \, u_-)$$
$$= \frac{1}{2}\, \varepsilon A^\alpha J^a_\alpha (/ u''_+ \, u'_-) = \varepsilon\, \frac{i}{2}\, A^\alpha(x)\, (u''_+ \, \partial_\alpha u'_- - \partial_\alpha u''_+ \cdot u'_-)\,(x) \quad (4.12)$$

Compte tenu des identités évidentes (cf. III. 2):

$$D^+_{;\alpha''}(x''/x') = -D^-_{;\alpha''}(x'/x'') \qquad D^+_{;\alpha''\beta'}(x''/x') = D^-_{;\alpha''\beta'}(x'/x'')$$

et en effectuant les transformations indiquées déjà pour le cas précédent, on trouve une correction:

$$\begin{aligned} S^{(2)''}(u''_+/u'_+) = \frac{(-i)^4}{4} \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot \big[ & (u''^+_+ \cdot A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{4''} - x^{4'}) \\ & \cdot D^-_{;\alpha''}(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ & - (\partial_{\alpha''} u''^+_+ A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{4''} - x^{4'}) \cdot D^-(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ & - (u^{+''}_+ A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{4''} - x^{4'}) \cdot D^-_{;\alpha''\beta'}(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot u'_+)(x') \\ & + (\partial_{\alpha''} u^{+''} \cdot A^{\alpha''})(x'') \cdot \theta^-(x^{4''} - x^{4'}) \cdot D^-_{;\beta'}(x''/x') \cdot (A^{\beta'} \cdot u'_+)(x') \big] \end{aligned} \quad (4.13)$$

donnant pour la matrice corrigée:

$$\begin{aligned} \overline{S}^{(2)}(u''_+/u'_+) = \frac{1}{2i} \int (dx'')^4 \cdot \int (dv')^4 \cdot \big[ & (u''^+_+ \cdot \varphi^{\alpha'})(x'') \cdot D^c_{;\alpha''}(x''/x') \\ & \cdot (\varphi^{\beta'} \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ & - (\partial_{\alpha''} u^{+''}_+ \cdot \varphi^{\alpha'})(x') \cdot D^c(x'')/x') \cdot (\varphi^{\beta'} \cdot \partial_{\beta'} u'_+)(x') \\ & - (u^{+''}_+ \varphi^{\alpha''})(x'') \cdot D^c_{;\alpha''\beta'}(x''/x') \cdot (\varphi^{\beta'} u'_+)(x') \\ & + (\partial_{\alpha''} u^{+''}_+ \cdot \varphi^{\alpha''})(x'') \cdot D^c_{;\beta'}(x''/x') \cdot (\varphi^{\beta'} \cdot u'_+)(x') \big] \\ & - S^{(2)'''}(u''_+/u'_+) \end{aligned} \quad (4.14)$$

où le terme $S^{(2)'''}(u''_+/u'_+)$ vaut (cf. A. III. 24):

$$S^{(2)'''}(u''_+/u'_+) = (-i)^2 \cdot i \int (dx')^4 \cdot \frac{1}{2}\, (u''^+_+ A^4 A_4 \, u')(x') \quad (4.15)$$

$\overline{S}^2(u''/u')$ n'est pas invariant, tandis qu'en vertu des propriétés de la fonction $D^c$, les termes entre crochets donnent la contribution invariante et causale, seule admissible. Force nous est donc de prendre pour représentation de $\boldsymbol{S}^2$:

$$S^{(2)}(u''_+/u'_+) = S^{(2)\prime}(u''_+/u'_+) + S^{(2)\prime\prime}(u''_+/u'_+) + S^{(3)\prime\prime\prime}(u''_+/u'_+) \quad (4.16)$$

De cette manière, nous avons montré que la correction par l'introduction des processus de création et d'annilation de paires ne suffit pas. Il faut encore corriger en additionnant à l'opérateur $\boldsymbol{S}^{(2)}$ issu de la première correction l'opérateur $\boldsymbol{S}^{(2)\prime\prime\prime}$, représenté par (4.15).

Si nous revenons maintenant à l'expression générale donnée en (3.8) pour les opérateurs $\boldsymbol{S}^{(i)}$, nous constatons que le terme additionnel $\boldsymbol{S}^{(2)\prime\prime\prime}$, qui est une intégrale *simple* sur l'espace temps, ne peut provenir que d'un terme en $\varepsilon^2$ dans le développement (3.6) du scalaire $\boldsymbol{h}$: (3.8) donne même la valeur de sa représentation, qui est:

$$\varepsilon^2 h^{(2)}(u''_+/u'_+) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(u''^{+}_{+}(A^4)^2 \cdot u'_+\right)(x) \quad (4.17)$$

Manifestement, elle n'est pas invariante par rapport au groupe de Lorenz.

Nous avons ainsi démontré, dans ce cas particulier, que les invariances des opérateurs $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{S}$ sont exclusives l'une de l'autre. Mais l'énoncé et la démonstration du théorème général correspondant sont immédiats si l'on remarque que l'addition d'un terme du type de (4.15) est due uniquement au fait que l'opérateur $\boldsymbol{h}$ contient des dérivées (seule la dérivée temporelle intervient, mais la covariance exige la présence simultanée des 4 dérivées). Ainsi nous avons le théorème suivant:

*Si l'opérateur hamiltonien de diffusion pure décrivant l'interaction d'un champ quantifié $u(x)$ avec un autre champ (quantifié ou non) contient des dérivées du champ $u(x)$, l'invariance de l'hamiltonien total $\boldsymbol{h}$ et l'invariance de l'opérateur intégral $\boldsymbol{S}$ sont incompatibles.*

Revenons à la formation des $S^{(i)}(u''/u')$; on voit que les interactions introduites, auxquelles il faut ajouter celles qui leur correspondent par changement de $u_+$ en $u_-$ et encore:

$$\varepsilon^2 h^{(2)}(u''_- u'_+/) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(u''^{+}_{+}(A^4)^2 u'^{+}_{-}\right)(x);$$

$$\varepsilon^2 h^2(/u''_+ u'_-) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left(u''_+(A^4)^2 u'_-\right)(x) \quad (4.18)$$

correspondant à (4.17), comme (4.11,12) correspondent à (4.9), permettent de donner aux $S^{(i)}$ la structure en $D^c_\varkappa$ prévue par la théorie.

C. *Champ de quanta spinoriel; champ extérieur scalaire.*

Le type d'interaction est ici:

$$\varepsilon h(u''/u') = \varepsilon\, i(u''^{+}_{A}\, C\, u'^{A})(x) \qquad C(x): \text{nombre } c \text{ réel.} \tag{4.19}$$

le facteur $i$ assure l'hermicité de $\boldsymbol{h}$. On obtient l'expression non invariante:

$$S^{(2)\prime}(u''/u') = -\int (d\,x'')^4 \cdot \int (dx')^4 \cdot (u^{+\,''}_{A''}\, C)\,(x'') \cdot \theta^{+}(x^{4''} - x^{4'}) \cdot D^{+A''A'}(x''/x') \cdot (C\,u'_{A'})\,(x') \tag{4.20}$$

Pour la correction, on introduit les interactions:

$$h_c(u''\,u'\,/o) = i(u''^{+}_{A}\, C\, u'^{+A})\,(x) \tag{4.21}$$

$$h_a\,(o/u''_{+}\, u') = -i\,(u''_{A}\, C\, u'^{A})\,(x) \tag{4.22}$$

Mais ici, il faut se souvenir que les particules spinorielles satisfont au principe d'exclusion de M. Pauli. Outre la condition d'hermicité:

$$(\boldsymbol{h}_c + \boldsymbol{h}_a)^{+} = (\boldsymbol{h}_c + \boldsymbol{h}_a) \tag{4.23}$$

qui entraîne:

$$h_a\,(o/u''\, u') = (h_c\,(u''\, u'/o))^{+} \tag{4.24}$$

nous devons donc avoir la condition d'antisymétrie:

$$h_c\,(u''\, u'/o) = -\,h_c\,(u'\, u''/o) \tag{4.25}$$

$$h_a\,(o/u''\, u') = -\,h_a\,(o/u'\, u'') \tag{4.26}$$

(En effet, l'amplitude de probabilité:

$$\psi\,(u'', u') = h_c\,(u''\, u'/o)\,\psi\,(o)$$

ne peut être antisymétrique que si $\boldsymbol{h}_c$ l'est aussi).

On trouve alors pour la correction, après les transformations convenables:

$$S^{2''}(u''_{+}/u'_{+}) = (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u^{+\,''}_{A''}\, C)\,(x'') \cdot \theta^{-}(x^{4''} - x^{4'}) \cdot D^{-A''A'}(x''/x') \cdot (C\,u'_{A'})\,(x') \tag{4.27}$$

Ce qui donne pour représentation de l'opérateur $\boldsymbol{S}^{(2)}$:

$$S^2\,(u''_{+}/u'_{+}) = (-i)^2 \frac{2}{i} \int (d\,x'')^4 \int (dx')^4 \cdot (u^{+\,''}_{A}\, C)\,(x'') \cdot D^{c\,A}{}_{A'}\,(x''/x') \cdot (C\,u'^{A'})\,(x') \tag{4.28}$$

invariant et causal, exactement comme en théorie scalaire. La correction effectuée est nécessaire et suffisante pour donner à $S^{(n)}(u''_+/u'_+)$ la forme:

$$S^{(n)}(u''_+/u'_+) = (-i)^n \left(\frac{2}{i}\right)^{n-1} \int (d\,x^{(n)})^4 \int (dx^{(n-1)})^4 \ldots$$

$$(\boldsymbol{u}^{+''}_{A(n)}\, C)\,(x^{(n)}) \cdot D^{c\,A(n)}_{\;A(n-1)}(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \ldots D^{c\,A''}_{\;A'}(x''/x')\,(C\,u'^{A'})\,(x') \quad (4.29)$$

Cette correction est complète, parce que, conformément au théorème que nous avons démontré tout à l'heure, le scalaire $\boldsymbol{h}$ (hamiltonien d'intéraction par diffusion pure) ne contient pas les dérivées du champ $u^A(x)$.

D. *Champ de quanta spinoriel chargé; champ extérieur vectoriel.*

Le calcul est analogue à celui développé en B. Mais le fait que $J^\alpha(u''_\pm/u'_\pm) = \frac{1}{4}\, u''^{+}_{+}\, \gamma^\alpha\, u'_\pm$ ne contient pas de dérivées n'impose pas correction en $\varepsilon^2$ pour $\boldsymbol{h}$.

## 5. *Applications élémentaires. II. Plusieurs champs quantifiés.*

Jusqu'ici, nous n'avons envisagé que le cas où le scalaire d'interaction $h$ est *bilinéaire* en *un seul* champ quantifié (scalaire ou spinoriel). Comme nous venons de le voir, les propriétés de transformation du champ ne jouent pas de rôle dans le raisonnement; celui-ci n'est pas non plus modifié par la présence éventuelle de dérivées des champs dans le scalaire $h$; le résultat lui-même n'est pas essentiellement changé par ces complications: c'est toujours la fonction $D^c_\varkappa(x)$ qui figure dans le noyau des intégrales au moyen desquelles s'expriment les termes $S^{(n)}$. C'est pourquoi, dans la généralisation qui nous occupe maintenant, il nous suffit de considérer le cas où le scalaire $\boldsymbol{h}$ dépend linéairement des champs scalaires eux-mêmes, et non de leur dérivées. Pour ne pas charger inutilement l'écriture, nous nous contentons de *trois champs*, $u$, $v$ et $\varphi$. (Le cas où $h$ est bilinéaire dans un champ $u$ est alors celui où deux des champs $u$ et $v$ sont identiques: $u = v$).

Dans ces conditions, les interactions types s'écrivent:

$$\begin{aligned} \varepsilon\, h\,(v''\,\varphi''/u') &= \varepsilon\,(v^{+''}\,\varphi''^{+}\,u')\,(x) \\ \varepsilon\, h\,(u''/v'\,\varphi') &= \varepsilon\,(u^{+''}\,v'\,\varphi')\,(x) \end{aligned} \quad (5.1)$$

elles décrivent en un point $x$, le premier, la création d'un «quantum $v''$» et d'un «quantum $\varphi''$», simultanée avec l'annihilation d'un «quantum $u'$», le second la transition inverse. Calculons alors les termes

$S'^{(2)}(u''/u')$ et $S'^{(2)}(v''\varphi''/v'\varphi')$ correspondant aux deux cas où, dans les états initial et final figurent un ou deux quanta; on obtient:

$$\left.\begin{aligned} S'^{(2)}(u''/u') &= (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 u^{+''}(x'') \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'}) \\ &\quad \cdot D_v^+(x''/x') \cdot D_\varphi^+(x''/x')\, u'(x') \\ S'^{(2)}(v''\varphi''/v'\varphi') &= (-i)^2 \int (dx'')^4 \int (dx')^4 (v^{+''}\varphi^{+''})(x'') \\ &\quad \cdot \theta^+(x^{4''} - x^{4'})\, D_u^+(x''/x') \cdot (v'\varphi')(x') \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Pour obtenir les expressions correctes, il faut, comme nous l'avons vu, ajouter à $h$ les invariants décrivant les processus de création et d'annihilation complémentaires à ceux de (5.1), tels que:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon h'(u''\varphi''/v') = \varepsilon(u^{+''}\varphi^{+''}v')(x);\ \varepsilon h'(v''\varphi''u''/o) = \varepsilon(v^{+''}\varphi^{+''}u^{+''})(x); \\ &\qquad \varepsilon h'(v''u''/\varphi') = \varepsilon(v''^{+}\varphi' u^{+''})(x); \\ &\varepsilon h'(v''/u'\varphi') = \varepsilon(v^{+''}u'\varphi')(x);\ \varepsilon h'(o/u'v'\varphi') = \varepsilon(u'v'\varphi')(x); \\ &\qquad \varepsilon h'(\varphi''/v'u') = \varepsilon(u'v'\varphi^{+''})(x); \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Reprenant alors les mêmes transformations qu'au § 4, on obtient dans le second des cas:

$$S^{(2)}(u''\varphi''/v'\varphi') = (-i)^2 \frac{2}{i} \int (dx'')^4 \int (dx')^4 (v^{+''}\varphi^{+''})(x'') \\ D_u^c(x''/x')(v'\varphi')(x') \tag{5.4}$$

contenant la fonction $D_u^c(x)$, conformément à la théorie générale: Remarquons en passant que la valeur de $S^{(2)}(v''/v')$ où le champ $\varphi$ n'est pas quantifié s'obtient à partir de (5.4); mais il faut alors que l'on ait $\varphi^+ = \varphi$, c'est-à-dire que le champ $\varphi(x)$ (nombre C) soit réel: on retrouve alors aux notations près l'expression (4.7).

Dans le second cas, en utilisant les identités:

$$\theta^+(x)\,\theta^+(x) \equiv \theta^+(x); \quad \theta^+(x)\,\theta^-(x) \equiv 0 \tag{5.6}$$

qui permettent en particulier d'ajouter des termes à noyaux de la forme:

$$\theta^+(x^{4''} - x^{4'})\, D_u^+(x''/x') \cdot \theta^-(x^{4''} - x^{4'})\, D_\varphi^-(x''/x')$$

on trouve pour le $S^{(2)}(u''/u')$ corrigé:

$$S^{(2)}(u''/u') = (-i)^2 \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^2 \cdot \int (dx'')^4 \int (dx)^4 u^{+''}(x'') \cdot D_v^c(x''/x') \\ \cdot D_\varphi^c(x''/x') \cdot u'(x') \tag{5.7}$$

où les deux fonctions $D_{v,\varphi}^c$ ont le même argument.

*

On peut maintenant passer au troisième ordre, et calculer par exemple le terme $S^2(v''\varphi''/u')$. Ici, comme il y a plus d'un champ quantifié et plus de deux points où création et annihilation peuvent avoir lieu, les sommations sur les états des quanta $u$, $\varphi$, $v$ peuvent se faire de diverses manières: chacune correspondant à un couple des points $x'''$, $x''$, $x'$ de l'espace-temps, qui est l'argument de la fonction $D$ consécutive à cette contraction (*contraction* est le mot que nous emploierons pour ce genre particulier de sommation sur les états). Le résultat de cette complication est que, dans le cas général, chaque terme $S^{(n)}(\ldots./\ldots.)$ se décompose en autant de sous-termes qu'il y a de combinaisons possibles entre les arguments et les contractions, dont le nombre est lui-même déterminé par l'ordre $n$ et l'argument de $S^{(n)}(\ldots/\ldots)$.*)

C'est ainsi que pour $S^{(3)}(v''\varphi''/u')$ sans correction, l'on obtient la somme des 4 termes (nous écrivons $\int''$ pour $\int(dx'')^4$:

$$\begin{aligned}S'^{(3)}(v''\varphi''/u') = (-i)^3\int'''\int''\int'\cdot\big[&v^{+''}(x''')\cdot\theta^+(x^{4'''}-x^{4''})\cdot D_u^+(x'''/x'')\\ &\cdot D_\varphi^+(x'''/x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})\,D_v^+(x''/x')\cdot\varphi''^+(x')\cdot u'(x'')\\ &+\varphi''^+(x''')\cdot\theta^+(x^{4'''}-x^{4''})\cdot D_u^+(x'''/x'')\cdot D_v^+(x'''/x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})\\ &\cdot D_\varphi^+(x''/x')\cdot v^{+''}(x')\cdot u'(x')\\ &+v^{+''}(x''')\,\varphi^{+''}(x''')\cdot\theta^+(x^{4'''}-x^{4''})\,D_u^+(x'''/x'')\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})\\ &\cdot D_v^+(x''/x')\,D_\varphi^+(x''/x')\cdot u'(x')\\ &+v^{+''}(x'')\,\theta^+(x^{4'''}-x^{4''})\,D_u^+(x'''/x'')\cdot\varphi^+(x'')\cdot D_\varphi^+(x'''/x')\\ &\cdot\theta^+(x^{4''}-x^{4'})\cdot D_v^+(x''/x')\cdot u'(x')\big]\end{aligned}\tag{5.8}$$

Utilisant alors le registre complet (donné par 5, 1 et 3) des processus d'interactions (au nombre de $2^3 = 8$), on obtient en utilisant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, le $S^{(3)}(v''\varphi''/u')$ corrigé, qui se décompose aussi en 4 termes, *séparément causals et invariants*:

$$\begin{aligned}S^3(u''/u') = (-i)^3\cdot\left(\frac{2}{i}\right)^3\int'''\int''\int'\big[&v^{+''}(x''')\cdot D_u^c(x'''/x'')\cdot D_\varphi^c(x'''/x'')\\ &\cdot D_v^c(x''/x')\cdot\varphi^{+''}(x')\,u'(x')\\ &+\varphi''(x''')\,D_u^c(x'''/x'')\cdot D_v^c(x'''/x'')\cdot D_\varphi^c(x''/x')\cdot v^{+''}(x')\cdot u'(x')\\ &+(v''^+\varphi''^+)\,(x'')\cdot D_u^c(x'''/x'')\cdot D_\varphi^c(x''/x')\cdot D_v^c(x''/x')\cdot u'(x')\\ &+v^{+''}(x''')\,D_u^c(x'''/x'')\cdot\varphi''^+(x'')\,D_\varphi^c(x'''/x')\cdot D_v^c(x''/x')\cdot u'(x')\big]\end{aligned}\tag{5.9}$$

Ce résultat est bien conforme à la théorie générale du § 3. Nous voyons maintenant que la présence des fonctions $D_u^c(x^{(n)}/x^{(l)})$ dans

*) Ces sous-termes correspondent à un type bien défini de *graphe* représentant ces contractions dans l'espace temps.

le noyau des intégrales représentant les différents $S^{(n)}(\ldots/\ldots)$ est due à la combinaison systématique de toute contraction du type:

$$\int dV(u)\,(\ldots\ldots\ldots\ldots u(x^{(m)}))\,(u^+(x^{(l)})\ldots.)$$

avec la contraction complémentaire:

$$\int dV(u)\,(\ldots\ldots\ldots\ldots u(x^{(l)}))\,(u^+(x^{(m)})\ldots.)$$

toutes choses restant égales d'ailleurs. Nous avons ici une démonstration, moins axiomatique que celle qui se fonde sur les propriétés causales de la fonction $D^c_\varkappa(x)$, de la proposition selon laquelle la structure d'un (sous-)terme d'ordre $n$ de l'opérateur $\boldsymbol{S}$ dans son développement en fonction du paramètre de couplage $\varepsilon$ est:

$$S^{(n)}(v''\ldots/\ldots u') = (-i)^n \left(\frac{2}{i}\right)^{N(n)} \int^{(n)} \int^{(n-1)} \cdots \int' v''^+(x^n)\cdot g_n(x^{(n)})$$

$$\cdot D^c(x^{(n)}/x^{(n-1)})\ldots g_i(x^{(i)})\,D^c(x^{(i)})/x^{(k)})\ldots D^c(x''/x')\,g_1(x')\cdot u'(x') \qquad (5.10)$$

$N(n)$ est le nombre de fonctions $D^c$ présentes dans le noyau. Dans le cas général où l'interaction fait intervenir les dérivées des champs, les fonctions $g_i(x^{(i)})$ contiennent les opérateurs de dérivée $\partial_{\alpha(i)}$.

On voit facilment que pour ce terme d'ordre $n$, le nombre de fonction $D^c$ intervenant dans le noyau, $N(n, m)$ est compris entre les limites:

$$(n-1) \leqslant N(n, m) \leqslant \begin{cases} \dfrac{nm}{2} - 1 & n \text{ ou } m \text{ pair} \\ \dfrac{nm-3}{2} & n \text{ et } m \text{ impair} \end{cases} \qquad (5.11)$$

si $m$ est le nombre de champs quantifiés ($m \geqslant 2$)*).

Quant au nombre d'arguments possibles pour ces fonctions il est évidemment $\nu(n) = C^n_2$.

## 6. *L'unitarité de l'opérateur* $\boldsymbol{S}$.

Pour fixer les idées nous donnons la démonstration de l'unitarité de $\boldsymbol{S}$ dans le cas où le scalaire d'interaction dépend linéairement des champs à l'exclusion de leur dérivées. Il est facile de voir que cette limitation n'est pas essentielle pour la démonstration.

Comme nous l'avons vu, la condition d'unitarité pour $\boldsymbol{S}$ découle de la nécessité pour $\psi(u''\ldots)$ de conserver au cours du temps la propriété d'une amplitude de probabilité.

*) Nous laissons de côté les transitions du vide au vide («énergie propre» du vide) entraînant une contraction supplémentaire.

On doit donc avoir:

$$\boldsymbol{S}^{+}\,\boldsymbol{S} = \mathbf{1} \tag{6.1}$$

Si l'on développe $\boldsymbol{S}$ suivant:

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{1} + \sum_{l} \varepsilon^{i}\,\boldsymbol{S}^{(l)} \tag{6.2}$$

la condition (6.1) se décompose dans la suite dénombrable de conditions:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(1)+} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{S}^{(2)} + \boldsymbol{S}^{(1)+}\,\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)+} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{S}^{(3)} + \boldsymbol{S}^{(1)+}\,\boldsymbol{S}^{(2)} + \boldsymbol{S}^{(2)+}\,\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{+(3)} = \mathbf{0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{S}^{(n)} + \boldsymbol{S}^{(1)+}\,\boldsymbol{S}^{(n-1)} + \cdots + \boldsymbol{S}^{(n-1)+}\,\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{+(n)} = \mathbf{0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

Nous savons que la représentation $S^{(n)}(\dots/\dots)$ se décompose en une somme de termes:

$$S^{(n)} = \sum_{l}^{L(n)} S_{l}^{(n)} \tag{6.4}$$

où les $S_{l}^{(n)}$ en nombre défini, sont tous de la forme (5.10).

A cause des propriétés des fonctions $D_{\varkappa}^{c}$ et $D_{\varkappa}^{a}$, on a:

$$S^{+(n)} = \sum_{l}^{L(n)} S_{(l)}^{(n)+} \tag{6.5}$$

avec:

$$S_{l}^{(n)+}(v''\dots/\dots u') = (-1)^{n+N(n,m)}\cdot(-i)^{n}\left(\frac{2}{i}\right)\int^{N(n,m)}\int^{n(n-1)}$$
$$\dots v^{+''}(x^{(n)})\cdot g_{n}(x^{(n)})\cdot D^{a}_{\dots}(x^{(n)}/x^{(n-1)})\dots g_{i}(x^{(i)})\,D^{a}_{\dots}(x^{(i)}/x^{(k)})$$
$$\dots D^{a}(x''/x')\,g_{1}(x')\cdot u'(x'). \tag{6.6}$$

On obtient donc $S_{l}^{+(n)}$ à partir du $S_{l}^{(n)}$ correspondant en y substituant $D^{a}_{\dots}(\;)$ aux $D^{c}_{\dots}(\;)$ et en multipliant par $(-1)^{n+N(n,m)}$, puisque l'ordre $n$, le nombre $m$ de champs et l'argument $(u'', \dots/u'\dots)$ de $S$ déterminent le nombre $N(n,m)$ de fonction $D^{c}(x)$ présentes dans $S_{l}^{(n)}$.

Dans les conditions (6.3) interviennent les produits du type:

$$\boldsymbol{S}^{+(i)}\,\boldsymbol{S}^{(n-i)} \tag{6.7}$$

Il faut bien en comprendre la signification: un de ces produits représente la somme de tous les produits entre des $S^{(i)+}(\dots/\dots)$ et des $S^{(n-i)}(\dots/\dots)$ dont les arguments contiennent outre les champs contractés communs à $S^{(i)}$ et à $S^{(n-i)}$, les champs figurant dans l'argument de $S^{(n)}(\dots/\dots)$, et cela naturellement dans le même état.

Démontrons d'abord l'unitarité dans le cas particulier où le nombre de champs quantifiés est $m = 2$ ($h$ bilineaire en $u$). On a alors

$$N\,(n, 2) = n - 1$$

fonctions $D^c$ dans le terme $S^{(n)}$, qui est toujours simple. Comme dans les contractions (6.7) un seul champ peut être contracté, mais par l'intermédiaire des demi-champs + et —, on a pour ce terme:

$$\begin{aligned} S^{+(i)} S^{(n-i)}(u''/u') &= (-1)^{2i-1} \cdot (-i)^i \left(\frac{2}{i}\right)^{i-1} \overset{(n)}{\int} \cdots \int' u''^{+}(x^{(n)}) \\ &\cdot D^a_u(x^{(i)}/x^{((i)-1)}) \ldots (D^a_u(x^{(n-i+2)}/x^{(n-i+1)}) \cdot (-i)^{n-i} \cdot \left(\frac{2}{i}\right)^{(n-i-1)} \\ &\cdot (D^+_u + D^-_a)\,(x^{n-i+1}/x^{n-1}) \cdot D^c_u(x^{n-i}/x^{n-i-1}) \\ &\ldots D^c_u(x''/x')\; u'(x'). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Les identités (6.3) à satisfaire peuvent s'écrire alors:

$$\begin{aligned} (-i)^n \left(\frac{2}{i}\right)^{(n-1)} \cdot \overset{(n)}{\int} \cdots \int' & u^{+''}(x^n)\,[D^c_u(x^{(n)}/x^{n-1})\, D^c_u(x^{n-1}/x^{n-2}) \ldots D^c_u(x''/x') \\ & - i\,\big(D^1_u(x^{(n)}/x^{(n-1)} D^c_u(x^{(n-1)}/x^{(n-2)}) \ldots D^c_u(x''/x') \\ & + D^a_u(x^{(n)}/x^{(n-1)})\, D^1(x^{(n-1)}/x^{(n-2)}) \cdot D^c(\;) \ldots D^c(x''/x') \\ & + \ldots + D^a_u(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \ldots D^a_u(x''''/x''')\, D^1_u(x'''/x'')\, D^c_u(x''/x') \\ & + D^a_u(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \ldots D^a_u(x'''/x'') \cdot D^1(x''/x')\big) - D^a_u(x^{(n)}/x^{(n-1)}) \ldots \\ & \ldots D^a_u(x''/x')]\; u'\,(x') \equiv 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

elles le sont pour $n$ quelconque, en vertu de l'identité vraie pour $n$ quelconque et quels que soient les arguments et indices (1), (2)... $(n-1)$:

$$\begin{aligned} D^c(1)\, D^c(2) \ldots D^c(n-1) & - i\,\big(D^1(1)\, D^c(2) \ldots D^c(n-1) \\ & + D^a(1)\, D^1(2)\, D^c(3) \ldots D^c(n-1) + \ldots D^a(1) \ldots \\ & \ldots D^a(n-3)\, D^1(n-2)\, D^c(n-1) + D^a(1) \ldots \\ & \ldots D^a(n-2)\, D^1(n-1)\big) \\ & - D^a(1)\, D^a(2) \ldots D^a(n-1) \equiv 0\,. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Cette identité se démontre par récurrence; multipliant tous les termes de (6.10) sauf le dernier par $D^c\,(n)$ et le dernier par $i D^1(n) + D^a_1(n)$ $(= D^c_{(n)})$, on obtient l'identité dans le cas de $n \equiv n+1$. Pour $n = 2$, c'est simplement l'identité:

$$D^c(1) - i\,D^1(1) - D^a(1) = 0 \tag{6.11}$$

dont toutes les autres sont une conséquence.

Dans le cas où $m$ est quelconque, on sait que le nombre $N$ de fonctions $D^c$ présentes dans le noyau de $S^{(n)}$ est compris entre les limites:

$$(n-1) \leqslant N(n, m) \leqslant \begin{cases} \frac{n\,m}{2} - 1 & m \text{ ou } n \text{ pair} \\ \frac{n\,m-3}{2} & m \text{ et } n \text{ impair} \end{cases}$$

Alors le facteur $(-1)^{n+N(n,m)}$ peut être $+1$ ou $-1$, suivant la parité de $n + N(n, m)$, qui n'est définie séparément ni par $m$, ni par $m$, ni par la structure de l'argument de $S$, mais seulement lorsque ces trois données sont fixées simultanément.

Si l'on remarque alors que (nous n'écrivons pas les arguments supposés distincts):

$$\begin{aligned} \underbrace{D^{\overset{c}{a}} D^{\overset{c}{a}} \ldots\ldots D^{\overset{c}{a}}}_{N} &= D^s D^s \ldots\ldots D^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum{}' D^1 D^1 D^s \ldots . D^s \\ &+ \left(\frac{i}{2}\right)^4 \sum{}' D^1 D^1 D^1 D^1 D^s \ldots . D^s + \ldots\ldots \\ &\pm \frac{i}{2} \Big[ \sum{}' D^1 D^s \ldots . D^1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum{}' D^1 D^1 D^1 D^s \ldots D^s \\ &+ \left(\frac{i}{2}\right)^6 \sum{}' D^1 D^1 D^1 D^1 D^1 D^s \ldots D^s + \ldots \Big] \\ &= Re_N \pm \frac{i}{2} I_N \end{aligned} \tag{6.12}$$

($\sum'$ signifiant que la somme s'effectue sur tous les termes où figurent le même nombre ($< N$) d'indices 1) on peut écrire, pour $N$ quelconque les deux identités:

$$D^c(1)\, D^c(2) \ldots\ldots D^c(N) - 2\, I_N - D^a(1) D^a(2) \ldots . D^a(N) \equiv 0 \tag{6.13a}$$

$$D^c(1) D^c(2) \ldots\ldots D^c(N) - 2\, Re_N + D^a(1)\, D^a(2) \ldots . D^a(N) \equiv 0 \tag{6.13b}$$

Ce sont ces identités qui assurent, de manière analogue à (6.10) (qui est une manière d'écrire (6.13a) pour le cas où $N = n - 1$) les relations (6.3) assurant l'unitarité de l'opérateur $S$.

Il faut remarquer que dans les conditions (6.13), les expressions:

$$I_N = \sum{}' D^1 D^s \ldots\ldots D^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum{}' D^1 D^1 D^1 D^s \ldots . D^s + \cdots \tag{6.14a}$$

$$Re_N = D^s D^s \ldots D^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum{}' D^1 D^1 D^s \ldots . D^s + \cdots \tag{6.14b}$$

figurent sous les intégrales multiples $\overset{(n)}{\int} \ldots \overset{\prime}{\int} \ldots$: de ce fait, et aussi parce que les arguments des fonctions $D(x)$ ne sont en général pas indépendants, il y a des simplifications et des regroupements possibles, différents suivant chaque sous terme $S_l^{(n)}$ d'un $S^{(l)}$. C'est ce qui peut rendre la vérification de ces relations souvent fastidieuse.

A titre d'exemple, prenons le cas de 3 champs quantifiés, examiné au paragraphe précédent; pour la relation du troisième ordre, où $n + N(n, m) = 6$, c'est donc l'identité:

$$D_u^c(1)\, D_\varphi^c(2)\, D_v^c(3) - 2\, Re_3 + D_u^a(1)\, D_\varphi^a(2)\, D_v^a(3) \equiv 0$$

avec

$$2\, Re_3 = 2\, D_u^s(1)\, D_\varphi^s(2)\, D_v^s(3) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 [D_u^1(1)\, D_\varphi^1(2)\, D_v^s(3) + D_u^1(1) D_\varphi^s(2)\, D_v^1(3) + D_u^s(1)\, D_\varphi^1(2)_v^1 D_v^1(3)] \tag{6.15}$$

qui intervient. Cette identité s'écrit de 4 manières différentes, suivant les 4 combinaisons possibles d'arguments des fonctions $D_u^c$, $D_\varphi^c$ $D_v^c$ dans (15.9):

Pour $D_u^c(x'''/x'') \cdot D_\varphi^c(x'''/x'') \cdot D_v^c(x''/x')$:

$$2\, Re_3 = -\, D_u^a D_\varphi^a D_v^1 + \frac{i}{4} (D_u^+ D_\varphi^+ + D_u^- D_\varphi^-)\, D_v^c; \tag{6.16}$$

pour $D_u^c(x'''/x'')\, D_v^c(x'''/x'')\, D_\varphi^c(x''/x')$ on échange simplement dans (6.16) les indices $v$ et $\varphi$.

Pour $D_u^c(x'''/x'')\, D_\varphi^c(x'''/x')\, D_v^c(x''/x')$:

$$2\, Re_3 = -\frac{1}{4} [D_u^s (D_\varphi^+ D_v^+ + D_\varphi^- D_v^-) + D_\varphi^s (D_u^+ D_v^- + D_u^- D_v^+) + (D_u^+ D_\varphi^+ + D_u^- D_\varphi^-)\, D_v^s] \tag{6.17}$$

et enfin pour $D_u^c(x'''/x'')\, D_\varphi^c(x''/x')\, D_v^c(x''/x')$:

$$2\, Re_3 = D_u^1 D_\varphi^c D_v^c + \frac{i}{4} D_u^a (D_\varphi^+ D_v^+ + D_\varphi^- D_v^-) \tag{6.18}$$

Ces identités font mieux apparaître les produits $\boldsymbol{S}^{(1)+}\, \boldsymbol{S}^{(2)}$ et $\boldsymbol{S}^{(2)+}\, \boldsymbol{S}^{(1)}$.

## 7. *Conséquences générales; passage à l'espace des quanta.*

Reprenons devant les yeux les applications de la théorie données au paragraphe 4, plus précisément les deux cas d'un champ une fois scalaire, l'autre fois de spin ½, l'inhomogénéité de l'espace étant scalaire ($A$ et $C$).

Pour trouver l'opérateur $\boldsymbol{S}$ correct, nous avions alors fait l'hypothèse de l'existence de processus d'interaction décrits par $h_c$ et $h_a$. Dans le cas scalaire, nous avons admis la symétrie:

$$h_c\, (u''\, u'/o) = h_c\, (u'\, u''/o), \ldots$$

tandis que dans le cas du champ spinoriel, nous avons écrit:

$$h_c\,(u''\,u'/o) = -\,h_c\,(u'\,u''/o),\ldots$$

nous appuyant sur le principe d'exclusion de M. PAULI.

On peut renverser le raisonnement: admettre a priori comme seule forme possible pour les différents $S^{(i)}$ celle où les noyaux contiennent la fonction potentielle.

Partant alors de la forme incomplète $S^{(2)\prime}(u''/u')$ pour $S^{(2)}(u''/u')$ nous déduisons que la seule correction possible est donnée par le terme $S^{(2)\prime\prime}(u''/u')$. Nous savons d'autre part qu'à cette correction doit correspondre des processus de création et d'annihilation de paires, c'est-à-dire des invariants scalaires du type $\boldsymbol{h}_c$, et $\boldsymbol{h}_a$ qu'il faut additionner à $\boldsymbol{h}$. Pour que ces invariants donnent bien la correction (4,27), il faut et il suffit qu'ils satisfassent à la condition d'antisymétrie (4.25, 26). Ainsi donc le principe de M. PAULI apparaît là comme une conséquence: 1. de la description relativiste des particules à spin $1/2$; 2. de l'invariance et de causalité de la théorie. Ce fait connu apparaît ici, nous semble-t-il, bien simplement. Les mêmes raisonnements peuvent être repris dans le cas de champs de quanta vectoriels ou scalaires, de spin 0,1,... On trouverait les résultats correspondants, à savoir la nécessité d'une statistique de Bose.

En outre, on peut remarquer que la différence de statistique entre les particules scalaires décrites par le champ $u(x)$ et les particules spinorielles décrites par le champ $u^A(x)$ tient entière dans les propriétés de symétries des fonctions $D^{+}_{\varkappa}(x''/x')$ scalaires et spinorielles:

$$D^{-}\,(x''/x') = D^{+}\,(x'/x'') \tag{7.1}$$

$$D^{-A''A'}\,(x''/x') = -\,D^{+A'A''}\,(x'/x'') \tag{7.2}$$

intervenant dans les relations (1.18) et (2.24) de saturation des systèmes de paquets. Ce sont elles en effet, qui nécessitent la symétrie des invariants $h_c(u''u'/o)$, $h_a\,(o/u''u')$ de la théorie scalaire et la dissymétrie des invariants correspondants de la théorie spinorielle. Une autre manière de le voir consiste à revenir au formalisme de la deuxième quantification dans l'espace des quanta, en introduisant les opérateurs $\boldsymbol{u}(x)$ et $\boldsymbol{u}^A(x)$. Les relations de commutation entre ces opérateurs ne peuvent faire intervenir au deuxième membre que la fonction $D^0(x''/x')$. (Pour s'en rendre compte, il suffit, d'utiliser les relations de saturation ou encore remarquer que le commutateur doit contenir une fonction singulière $\delta(x)$). Dès lors, l'antisymétrie de $D^0_\varkappa(x)$ d'une part, et la symétrie de $D^{0\,A''A'}_\varkappa\,(x''/x')$ d'autre part, montrent que dans le premier cas (champ scalaire) c'est le commutateur des opérateurs de champs qui doit intervenir:

$$i\left[\boldsymbol{u}^+(x''),\, \boldsymbol{u}(x')\right] = D^0_\varkappa\,(x''/x')\,\mathbf{1} \tag{7.3}$$

et que dans l'autre c'est l'anticommutateur:

$$\left[\boldsymbol{u}^{+A''}(x''),\, \boldsymbol{u}^A(x')\right]_+ = D^{0\,A''A'}_\varkappa\,(x''/x')\cdot\mathbf{1} \tag{7.4}$$

Pour passer des demi-champs $u_+(x)$, $u^A_+(x)$, aux opérateurs de champs $\boldsymbol{u}(x)$, $\boldsymbol{u}^A(x)$,... opérant dans l'espace des quanta de la deuxième quantification, on introduit les opérateurs:

$$\boldsymbol{a}_+(u),\ \boldsymbol{a}_-(u) \tag{7.5}$$

satisfaisant aux relations de commutations:

$$\left[\boldsymbol{a}_\pm(u'),\, \boldsymbol{a}^+_\pm(u'')\right] = \delta\,(u'/u'')\cdot\mathbf{1} \tag{7.6}$$

(les autres commutateurs s'annulant)

où interviennent le commutateur ou l'anticommutateur suivant la statistique (ou le spin).

Les opérateurs de demi champs sont alors donnés par:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\pm(x) &= \sum_{u'_\pm} \boldsymbol{a}_\pm(u'_\pm)\cdot u'_\pm(x) \\ \boldsymbol{u}^A_\pm(x) &= \sum_{u'_\pm} \boldsymbol{a}_\pm(u'_\pm)\, u'^A_\pm(x) \end{aligned} \tag{7.7}$$

les opérateurs de champ complet étant eux-mêmes:

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}_+(x) + \boldsymbol{u}^+_-(x);\quad \boldsymbol{u}^A(x) = \boldsymbol{u}^A_+(x) + \boldsymbol{u}^{A+}_-(x) \tag{7.8}$$

ils vérifient (7.3) ou (7.4), compte tenu des relations (7.6). L'on obtient alors facilement les opérateurs correspondant aux grandeurs apparaissant dans notre exposé comme des «nombres $c$». Par exemple, à la grandeur:

$$S^{(1)}(u''_+/u'_+) = (-\,i)\int_L (d\,x)^4\,(u''_+{}^+\,C\,u'_+)\,(x) \tag{7.9}$$

correspond l'opérateur, pour le champ entier:

$$\boldsymbol{S}^{(1)} = (-\,i)\int_L (d\,x)^4\,(\boldsymbol{u}^+\,C\,\boldsymbol{u})\,(x) \tag{7.10}$$

Il est clair que ces opérateurs sont appliqués à la fonctionnelle $\psi[N_+(u'), N_-(u');\ \ldots,\ \ldots]$ décrivant l'état du système dans l'espace des quanta.

Comme le montrent les applications particulières et générales que nous avons faites, la forme intégrale de la théorie proposée est équivalente à la forme hamiltonienne habituelle dans ses résultats relatifs aux phénomènes de diffusion ou de collision, les seuls étudiés ici.

Mais son point de vue est bien différent: l'opérateur caractéristique est l'opérateur intérgral $\boldsymbol{S}$, au lieu de $\boldsymbol{h}$. C'est sur cet opérateur que portent les tentatives d'amélioration de la théorie, en particulier dans les essais pour supprimer les infinités. C'est ce qu'illustre bien le chapitre suivant.

## Chapitre II.

### Une expression finie pour le moment magnétique du neutron.*)

#### 8. *La méthode d'évaluation du moment magnétique.*

Nous nous plaçons dans la première approximation par rapport au champ électromagnétique que nous ne quantifions pas. Nous supposons donc qu'il règne un champ extérieur constant $B_{\alpha\beta}$, correspondant au potentiel:

$$A_\alpha = -\frac{1}{2} B_{\alpha\mu}\, x^\mu \tag{8.1}$$

D'autre part il est utile pour les applications de faire dans les formules (3.8) $\tau' = T'$, $\tau'' = T''$ et $(dx')^4 = dt'\,(dx')^3$ où $T'$, $T''$ et $t'$ sont des valeurs particulières du *temps t*. Introduisant alors l'opéénergie $\boldsymbol{H} = \int (dx)^3\, \boldsymbol{h}$, on a en développant comme en (3.6, 7 et 8):

$$\varepsilon\, \boldsymbol{S}^{(1)} = (-i)\, \varepsilon \int_{T'}^{T''} dt\, \boldsymbol{H}^{(1)}\,, \text{ etc.} \tag{8.2}$$

Nous connaissons d'autre part la valeur de l'énergie d'un moment électromagnétique $\mu^{\alpha\beta}$ (c'est-à-dire d'un moment électrique $p^i = \mu^{i4}$ associé à un moment magnétique $\mu^i = \mu^{jk}$; $i, j, k = 1, 2, 3$) dans un champ constant: elle vaut:

$$\varepsilon\, \boldsymbol{H} = -(\vec{B}, \vec{\boldsymbol{\mu}}) - (\vec{E}, \vec{\boldsymbol{p}}) = -\frac{1}{2} B_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{\mu}^{\alpha\beta} \tag{8.3}$$

Nous pouvons donc écrire, en passant aux représentations dans l'espace des paquets:

$$\varepsilon\, S^{(1)}\,(u''_\pm / u'_\pm) = (-i) - \frac{1}{2} \cdot B_{\alpha\beta} \cdot \int_{T'}^{T''} dt \cdot \mu^{\alpha\beta}\,(u''_\pm / u'_\pm) \tag{8.4}$$

Cette expression est le point de départ de l'évaluation d'un moment magnétique.

Appliquons-là d'abord à une particule chargée, dans les deux cas de spin zéro et ½.

*) Un compte-rendu des résultats obtenus dans ce chapitre a fait l'objet d'une «Lettre à l'éditeur» de la Physical Review[9]).

a) *Particule scalaire.*

Comme l'a montré le § 4, le scalaire d'interaction est ici ($\pm \varepsilon =$ charge de la particule):

$$\varepsilon\, h\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \mp\, \varepsilon\left(A^{\alpha} J_{\alpha}\,(u''_{\pm}/u'_{\pm})\right)(x)$$

Nous obtenons alors pour l'opérateur $\boldsymbol{S}^{(1)}$ la représentation:

$$\varepsilon\, S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = (-i)\,\varepsilon \int (dx)^4\, h\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) =$$

$$(-i)\cdot \pm \frac{1}{4\,i}\,\varepsilon\, B_{\alpha\beta} \int (d\,x)^4 \cdot u''^{+}_{\pm}(\boldsymbol{x}^{\alpha}\,\partial^{\beta} - \boldsymbol{x}^{\beta}\,\partial^{\alpha})\, u'_{\pm} \qquad (8.6)^{*})$$

ou, d'après (1.20):

$$\varepsilon\, S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{i}{4}\,\varepsilon\, B_{\alpha\beta} \int dt\cdot(\Omega^{-\frac{1}{2}} L^{\alpha\beta}\, \Omega^{-\frac{1}{2}})\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) \qquad (8.7)$$

Le moment magnétique vaut donc:

$$\mu^{\alpha\beta}\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{\varepsilon}{2}\,(\Omega^{-\frac{1}{2}}\, L^{\alpha\beta}\, \Omega^{-\frac{1}{2}})\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) \qquad (8.8)$$

En particulier, dans le système de repos de la particule défini par:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{k}^4 = \varkappa\cdot \mathbf{1} \qquad (\vec{\boldsymbol{k}} \sim 0) \qquad (8.9)$$

on obtient la relation bien connue de LORENTZ:

$$\mu^{\alpha\beta}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{\varepsilon}{2\,\varkappa}\, L^{\alpha\beta}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) \qquad (8.10)$$

b) *Particule de spin ½.*

Le scalaire d'interaction $\boldsymbol{h} = \mp\,\varepsilon\, \boldsymbol{J}^{\alpha} A_{\alpha}$ est modifié en ce sens que le courant $\boldsymbol{J}^{\alpha}$ a pour représentation:

$$J^{\alpha}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \frac{1}{4}\, u''^{+}_{\pm}\, \gamma^{\alpha}\, u'_{\pm} \qquad (8.11)$$

On a donc pour $S^{(1)}\,(u''_{\pm}/u'_{\pm})$:

$$\varepsilon\, S^{(1)}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = -\,i\,\frac{\varepsilon}{16}\, B_{\alpha\beta} \int (d\,x)^4\, u''^{+}_{\pm}\,(x^{\beta}\,\gamma^{\alpha} - x^{\alpha}\,\gamma^{\beta})\, u'_{\pm} \quad (8.12)$$

En utilisant l'identité facile à démontrer:

$$i\,\varkappa\, u^{+\prime\prime}_{\pm}(x^{\beta}\gamma^{\alpha} - x^{\alpha}\gamma^{\beta})\, u'_{\pm} \equiv u^{+\prime\prime}_{\pm}\,(\boldsymbol{L}^{\beta\alpha} + 2\, \boldsymbol{S}^{\beta\alpha})\, u'_{\pm} \qquad (8.13)$$

il vient:

$$\varepsilon\, S^{(1)}\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \mp \frac{\varepsilon}{16\,\varkappa}\cdot B_{\alpha\beta} \int (dx)^4\cdot u^{+\prime\prime}_{\pm}\,(\boldsymbol{L}^{\beta\alpha} + 2\, \boldsymbol{S}^{\beta\alpha})\, u'_{\pm} \quad (8.14)$$

---

*) Nous écrivons $\int$ pour $\int\limits_{T'}^{T''}$

d'où, en vertu de (2.25) et (8.4):

$$\mu^{\alpha\beta}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm \frac{\varepsilon}{2\,i\,\varkappa}\left(\gamma^4 (L^{\alpha\beta} + 2\,S^{\alpha\beta})\right)(u''_{\pm}/u'_{\pm}) \tag{8.17}$$

Dans le système de repos de la particule, nous retrouvons le résultat connu:

$$\mu^{\alpha\beta}(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm\, 2\, \frac{\varepsilon}{2\,\varkappa}\, S^{\alpha\beta}(u''_{\pm}/u'_{\pm})\,. \tag{8.18}$$

Déduisons en passant des relations (8.6) et (8.7) d'une part, (8.12) et (8.14) d'autre part, la représentation des invariants $h$ dans les deux théories scalaires et de spin $\frac{1}{2}$:

$$\varepsilon\, h\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \pm\, \varepsilon\, \frac{1}{4}\, B_{\alpha\beta}\, u''^{+}_{\pm}\, \boldsymbol{L}^{\alpha\beta}\, u'_{\pm} \tag{8.19}$$

$$\varepsilon\, h\,(u''_{\pm}/u'_{\pm}) = \varepsilon\, \frac{i}{16\,\varkappa}\, B_{\alpha\beta}\, u''^{+}_{\pm}\, (\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} + 2\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta})\, u'_{\pm} \tag{8.20}$$

D'après les exemples qui précèdent, on voit qu'en première approximation le moment magnétique d'une particule est proportionnel à sa charge*). En première approximation donc, le moment magnétique du neutron est nul. Il faut dans ce cas aller à une approximation supérieure, c'est-à-dire faire appel à des états virtuels intermédiaires, le neutron se décomposant en un proton et en un méson de charges opposées, influencées par le champ électromagnétique.

Si $g$ est le paramètre de couplage entre la particule lourde et le champ de mésons, $\varepsilon$ restant le paramètre pour l'interaction d'une particule de charge $\pm\,\varepsilon$ avec le champ électromagnétique, la première approximation différente de zéro pour $\boldsymbol{S}$ est évidemment le terme en $\varepsilon g^2$ de son développement en $\varepsilon$ et $g$.

Nous obtenons donc le moment magnétique du neutron en troisième approximation en écrivant, selon la méthode générale:

$$\varepsilon\, g^2\, \boldsymbol{S}^{(3)} = (-\,i)\cdot \frac{1}{2}\, B_{\alpha\beta}\cdot \int_{+T'}^{+T''} dt\cdot \boldsymbol{\mu}^{\alpha\beta} \tag{8.21}$$

C'est la relation de base pour notre calcul.

---

*) Pour les particules spinorielles, il est possible comme l'on sait d'introduire dans l'équation de M. Dirac des termes invariants $\lambda\, S_{\alpha\beta}\, B^{\alpha\beta}$:

$$((\gamma\,\partial) + i\,\varepsilon\,(\gamma, A) + \lambda\, S_{\alpha\beta}\, B^{\alpha\beta} + \varkappa)\, u\,(x/) = 0$$

dont la conséquence est d'attribuer à la particule décrite par cette équation un moment magnétique:

$$\boldsymbol{\mu}^{\alpha\beta} = 2\left(\lambda + \frac{e}{2\,\varkappa}\right) \boldsymbol{S}^{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon}{2\,\varkappa}\, \boldsymbol{L}^{\alpha\beta} \tag{8.21}$$

au lieu de (8.17). $\lambda$ est appelé moment magnétique intrinsèque de la particule.

9. *La formation de l'opérateur* $\boldsymbol{S}^{(3)}$ *dans le cas d'un champ mésonique pseudo-scalaire. Une première expression pour le moment magnétique.*

Nous considérons le cas où le méson de masse $\varkappa_\varphi$ est décrit par un champ pseudoscalaire $\varphi(x)$.

Le neutron, de masse $\varkappa_u$, est une particule de spin ½, décrite par le champ d'onde spinoriel $v^A/x)$.

Il y a quatre types d'invariants scalaires d'interaction à considérer:

1. Celui qui décrit l'interaction pure entre les champs mésonique $\varphi(x)$ et neutronique $v^A(x)$:

$$g\,h^{(1)}(\varphi''_-\,u''_+/v') = g\,(u''^+\,i\,\tau^\alpha\,v'\,\partial_\alpha\,\varphi''^+)\,(x)$$
$$\tau^\alpha = \frac{1}{2}\,[\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4,\,\gamma^\alpha] \tag{9.1}$$

il décrit l'annihilation du neutron, avec création simultanée d'un proton (champ $u_A(x)$) et d'un méson négatif; il y a aussi le processus inverse correspondant à $(g\,\boldsymbol{h}^{(1)})^+$.

2. Celui qui décrit l'interaction pure entre le méson négatif et le champ électromagnétique, calculé déjà au § 8:

$$\varepsilon\,h^{(1)}(\varphi''_-/\varphi'_-) = -\varepsilon\,\frac{1}{4}\,B_{\alpha\beta}\,\varphi''^+_-\,\boldsymbol{L}^{\alpha\beta}\,\varphi'_- \tag{9.2}$$

3. Celui qui semblablement décrit l'interaction pure entre le proton et le champ électromagnétique, donné en (8.20).

4. Enfin celui qui décrit l'interaction mixte entre le champ neutronique, le champ mésonique et le champ électromagnétique:

$$\varepsilon\,g\,h^{(2)}(\varphi''_-\,u''_+/v') = \varepsilon\,g\,(u''^+\,\tau^\alpha\,v'\,A_\alpha\,\varphi''^+)\,(x) \tag{9.3}$$
$$A_\alpha = -\frac{1}{2}\,B_{\alpha\beta}\,x^\beta$$

Afin de présenter clairement les quatre processus différents qui vont apporter leur contribution à l'opérateur $\boldsymbol{S}^{(3)}$ (donc au moment magnétique dans l'approximation d'ordre 3), nous les distinguons par les indices Ia, Ib, IIa et IIb; le chiffre I caractérisant les contributions dues à trois interactions «pures», II désignant les contributions avec interactions mixtes.

A chacune des évolutions correspond une contribution à l'opérateur $\boldsymbol{S}^{(3)}$, contributions que nous désignons par:

$$\boldsymbol{S}^{(3)}_{\mathrm{Ia}},\ \boldsymbol{S}^{(3)}_{\mathrm{Ib}},\ \boldsymbol{S}^{(3)}_{\mathrm{IIa}}\ \text{et}\ \boldsymbol{S}^{(3)}_{\mathrm{IIb}}.$$

Nous avons ainsi, conformément à l'expression (3.8):

$$\varepsilon g^2 S^{(3)}_{\mathrm{Ia}}(v'/v''') = (-i)^3 \varepsilon g^2 \cdot \int (d x'')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot \int (dx')^4 \cdot \theta^+(x^{4''}-x^4)$$
$$\cdot\, \theta^+(x^4-x^4) \cdot \int d V_u'' \cdot \int dV'''_{\varphi-} \cdot \int d V''_{\varphi-}\, h^{(1)}(v'''/u''_+\,\varphi'''_-)\,(x'')$$
$$\cdot\, h^{(1)}(\varphi'''_-/\varphi''_-)\,(x)\; h^{(1)}(u''_+\,\varphi''_-/v')\,(x') \tag{9.4}$$

avec les matrices $h$ données ci-dessus.

En utilisant alors les relations de saturation, on obtient:

$$\varepsilon g^2 S^{(3)\prime}_{\mathrm{Ia}}(v'''/v') = (-i)^3 \cdot -\frac{1}{4} \cdot \varepsilon g^2 \cdot B_{\alpha\beta} \cdot \int (dx'')^4 \cdot \int (dx)^4 \cdot \int (dx')^4$$
$$\cdot\, v'''^+(x'') \cdot \tau^{\alpha''} \cdot \theta^+(x^{4''}-x^{4'})\, D^+_u(x''/x') \cdot \theta^+(x^{4''}-x^4)\, D^+_{\varphi;\,\alpha''}(x''/x)$$
$$\cdot\, \theta^+(x^4-x^{4'}) \cdot \boldsymbol{L}^{\alpha\beta}\, D^+_{\varphi;\,\alpha'}(x/x') \cdot \tau^{\alpha'}\, v'(x') \tag{9.5}$$

(nous écrivons $D_\varphi$ pour $D_{\varkappa\varphi}$). Car on a l'identité évidente:

$$\theta^+(x^{4''}-x^{4'}) \cdot \theta^+(x^{4''}-x^4) \cdot \theta^+(x^{4'}-x^4) = \theta^+(x^{4''}-x^4)\, \theta^+(x^4-x^{4'})$$

De manière tout à fait semblable, on obtient $\boldsymbol{S}^{(3)\prime}_{\mathrm{Ib}}$.

Calculons maintenant les contributions $S^{(3)}_{\mathrm{IIa}}{}'$ et $S^{(3)}_{\mathrm{IIb}}{}'$. Nous avons:

$$S^{(3)\prime}_{\mathrm{IIa}}(v'''/v') = (-i)^3\, \varepsilon g^2 \cdot i \int (dx)''^4 \int (dx')^4 \cdot \theta^+(x^{4''}-x^{4'})$$
$$\cdot\, h^{(1)}(v'''/u''_+\,\varphi''_-)\,(x'') \cdot h^{(2)}(u''_+\,\varphi''_-/v')\,(x')$$

et

$$S^{(3)\prime}_{\mathrm{IIb}}(v'''/v') = (-i)^3\, \varepsilon g^2 \cdot i \int (dx'')^4 \int (dx')^4\, \theta^+(x^{4''}-x^{4'})$$
$$h^{(2)}(v'''/u''_+\,\varphi''_-)\,(x'') \cdot h^{(1)}(u''_+\,\varphi''_-/v')\,(x')$$

où $h^{(1)}(v'''/u''_+\,\varphi_-)$, $h^{(2)}(v'''/u''_+\varphi''_-)$, etc. sont donnés par (9.1 et 3). Après usage des relations de saturation, on trouve:

$$\varepsilon g^2 S^{(3)\prime}_{\mathrm{IIa}}(v'''/v') = (-i)^3 \cdot \varepsilon g^2 \cdot -\frac{1}{2}\, B_{\alpha'\beta'} \cdot \int (dx'')^4 \int (dx')^4$$
$$\cdot\, v^{+'''}(x'') \cdot \tau^{\alpha''} \cdot \theta^+(x^{4''}-x^{4'})\, D^+_u(x''/x')$$
$$\cdot\, \theta^+(x^{4''}-x^{4'})\, D^+_{\varphi;\alpha''}(x''/x') \cdot x^{\beta'} \cdot \tau^{\alpha'} \cdot v'(x') \tag{9.6}$$

et une expression analogue pour $\varepsilon\, g^2\, S'^{(3)}_{\mathrm{IIb}}$.

Ces contributions sont causales, mais non pas invariantes. Utilisant la méthode générale que nous avons donnée au § 3, nous pouvons former directement les représentations des opérateurs $\boldsymbol{S}^{(3)}_{\mathrm{Ia}}$, $\boldsymbol{S}^{(3)}_{\mathrm{Ib}}$, $\boldsymbol{S}^{(3)}_{\mathrm{IIa}}$ et $\boldsymbol{S}^{)3)}_{\mathrm{IIb}}$ à la fois causals et invariants: il suffit de remplacer partout les combinaisons: $\theta^+(z^4-y^4)\, D^+_\varkappa(z/y)$ par $-2\,i\, D^c_\varkappa(z/y)$.

Utilisant alors la relation (8.21) où nous faisons $T'' = -T' = T \to \infty$, ce qui revient à prendre pour domaine invariant d'intégration $\boldsymbol{L}$ en (3.6) tout l'espace temps, nous obtenons pour le moment magnétique (moyen):

$$\begin{aligned}
2\,T\,\mu^{\alpha\beta}(v''/v') = i\,\varepsilon\,g^2 \Big\{&-4\cdot\int (dx'')^4\cdot\int (dx)^4\cdot\int (dx')^4\cdot\left(v''^{+}(x'')\,\tau^{\alpha''}\right)\\
&\cdot D^c_u(x''/x')\cdot D^c_{\varphi;\,\alpha''}(x''/x')\cdot \boldsymbol{L}^{\alpha\beta}\cdot D^c_{\varphi;\,\alpha'}(x/x')\cdot\left(\tau^{\alpha'}\,v'(x')\right)\\
&+\frac{i}{\varkappa}\cdot\int (dx'')^4\cdot\int (dx)^4\cdot\int (dx')^4\cdot\left(v''^{+}(x'')\cdot\tau^{\alpha''}\right)\\
&\cdot D^c_u(x''/x)\cdot D^c_{\varphi;\,\alpha''\alpha'}(x''/x')\cdot[\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} + 2\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}]\cdot D^c_u(x/x')\cdot\left(\tau^{\alpha'}\,v'(x')\right)\\
&-4\,i\int (dx')^4\cdot\int (dx)^4\cdot\left(v''^{+}(x')\,\tau^{\alpha'}\right)\cdot\\
&\cdot D^c_u(x'/x)\cdot D^c_{;\,\alpha'}(x'/x)\cdot x^\beta\cdot\left(\tau^{\alpha}\cdot v'(x)\right)\\
&+4\,i\int (dx')^4\cdot\int (dx)^4\cdot\left(v^{+''}(x)\,\tau^{\alpha}\right)\,x^\beta\\
&\cdot D^c_u\,(x/x')\cdot D^c_{;\,\alpha'}(x/x')\cdot\left(\tau^{\alpha'}\,v'\,(x')\right)\Big\}.
\end{aligned} \tag{9.7}$$

## 10. *Décomposition des noyaux* $D^c D^c D^c$ et $D^c D^c$: *les cinq types d'intégrales donnant des contributions différentes de zéro.*

Dans l'expression du moment magnétique que nous venons de trouver figurent des intégrales «triples» et des intégrales «doubles» de la forme (les limites infinies sont sous entendues):

$$\int (dx'')^4 \int (dx)^4 \int (dx')^4 e^{i\,(l,\,x)}\,\boldsymbol{T}(\partial_\beta)\cdot D^c(x''/x) D^c(x/x')\, D^c(x''/x') \ldots \tag{10.1}$$

ou:

$$\int (dx')^4 \int (dx)^4\, e^{i\,(l,\,x)}\,\boldsymbol{V}(\partial_\beta)\; D^c\,(x'/x)\; D^c\,(x'/x)\,\ldots \tag{10.2}$$

elles contiennent donc comme noyaux des produits, doubles ou triples de fonctions $D^c$. $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{V}$ sont des opérateurs linéaires continus, fonction des dérivées $\partial_\beta$). Posons

$$e^{i\,(l,\,x)}\,\boldsymbol{V}(\partial) = \boldsymbol{M}(x,\partial),\; e^{i\,(l,\,x)}\,\boldsymbol{T}(\partial) = \boldsymbol{N}(x,\partial)$$

Décomposons ces fonctions $D^c$ selon:

$$D^c = D^s + \frac{i}{2} D^1 \tag{10.3}$$

Considérons pour commencer les intégrales *doubles*: elles donnent naissance à 4 types d'intégrales, ayant pour noyaux:

$$D_u^s D_\varphi^s (x'/x); \quad D_u^s D_\varphi^1 (x'/x); \quad D_u^1 D_\varphi^s (x'/x); \quad D_u^1 D_\varphi^1 (x'/x)$$

Nous allons montrer que celles dont les noyaux sont $D_u^s\ D_\varphi^s$ ou $D_u^1\ D_\varphi^1$ se réduisent identiquement à zéro.

En effet, décomposons à leur tour:

$$\left.\begin{array}{l} D^s(x'/x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon(x'^4 - x^4)\, D^0(x'/x) = \frac{i}{4}\,\varepsilon\,(x'^4 - x^4) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [D^+(x'/x) - \mathrm{D}^-(x'/x)] \\ D^1(x'/x) = \frac{1}{2}\,[D^+(x'/x) + D^-(x'/x)] \end{array}\right\} \quad (10.4)$$

Mais on a (comme on le vérifie facilement en passant dans l'espace de Fourier):

$$\left.\begin{array}{l} \int_\infty (dx)^4 \cdot \boldsymbol{M}(x,\partial) \cdot D_u^\tau(x''/x)\, D_\varphi^\tau(x/x') = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \varkappa_n \neq \varkappa_\varphi \quad \tau = \pm 1 \\ \int_\infty (dx)^4\, \boldsymbol{N}(x,\partial) \cdot D_u^\tau(x''/x)\, D_\varphi^{-\tau}(x/x') = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{quels que soient } \varkappa_u,\ \varkappa_\varphi \neq 0 \end{array}\right\} \quad (10.5)$$

Donc les intégrales:

$$\left.\begin{array}{l} \int (d\,x)^4\, \boldsymbol{M} D_u^s(x'/x)\, D_\varphi^s(x'/x) = \\ \qquad \frac{1}{4} \int (dx)^4\, \boldsymbol{M} D_u^0(x'/x)\, D_\varphi^0(x'/x) \equiv 0 \\ \int (dx)^4\, \boldsymbol{M} D_u^1(x'/x)\, D_\varphi^1(x'/x) \equiv 0 \qquad \varkappa_u \neq \varkappa_\varphi \end{array}\right\} \quad (10{,}6)$$

(car la masse du neutron $\varkappa_u$ est toujours différente de celle du méson $\varkappa_\varphi$) sont toujours identiquement nulles. N'entrent donc en considération que les intégrales doubles des deux types:

$$\int (d\,x)^{4'} \int (dx)^4\, \boldsymbol{M}(x,\partial)\, D_u^s(x'/x)\, D_\varphi^1(x'/x)$$

et:

$$\int (d\,x)^{4'} \int (dx)^4 \cdot \boldsymbol{M}(x,\partial) \cdot D_u^1(x'/x)\, D_\varphi^s(x'/x)\,. \quad (10.7)$$

Passons maintenant aux intégrales *triples*. La même décomposition des noyaux selon (10,3) montre qu'il faut considérer les 8 types d'intégrales avec noyaux:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') \\
(2) & \frac{i}{2}\,D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^1(x/x') \\
(3) & \frac{i}{2}\,D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^1(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') \\
(4) & \frac{i}{2}\,D_u^1(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') \\
(5) & -\frac{1}{4}\,D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^1(x''/x)\,D_\varphi^1(x/x') \\
(6) & -\frac{1}{4}\,D_u^1(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^1(x/x') \\
(7) & -\frac{1}{4}\,D_u^1(x''/x')\,D_\varphi^1(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') \\
(8) & -\frac{i}{8}\,D_u^1(x''/x')\,D_\varphi^1(x''/x)\,D_\varphi^1(x/x')
\end{array}\right\} \qquad (10.8)$$

et ceux que l'on obtient par échange de $u$ et $\varphi$.

En vertu des relations (10.5), les trois derniers noyaux (6), (7) et (8) appartiennent à des intégrales qui s'évanouissent identiquement.

Nous allons montrer maintenant que la somme des intégrales:

$$L = \int (dx'')^4 \int (dx)^4 \int (dx')^4\,\mathbf{W}(x,\partial)$$

$$\cdot\left[D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') - \frac{1}{4}\,D_u^s(x''/x')D_\varphi^1(x''/x)D_\varphi^1(x/x')\right] \qquad (10.9)$$

s'évanouit aussi identiquement.

Pour cela remarquons que:

$$D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') = \frac{1}{8}\,\varepsilon(x''/x')\,\varepsilon(x''/x)\,\varepsilon(x/x')$$
$$\cdot D_u^0(x''/x')\,D_\varphi^0(x''/x)\,D_\varphi^0(x/x') \qquad (10.10)$$

Mais l'identité:

$$\varepsilon(x''/x')\,\varepsilon(x''/x)\,\varepsilon(x/x') = -\varepsilon(x''/x') + \varepsilon(x''/x) + \varepsilon(x/x') \qquad (10.11)$$

nous permet d'écrire:

$$D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -D_u^s(x''/x')\,D_\varphi^0(x''/x)\,D_\varphi^0(x/x') \\ +D_u^0(x''/x')\,D_\varphi^s(x''/x)\,D_\varphi^0(x/x') \\ +D_u^0(x''/x')\,D_\varphi^0(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x') \end{bmatrix} \qquad (10.12)$$

*

et pour le noyau de l'intégrale $L$ (10.9):

$$[\ ] = -\frac{1}{8}\{D_u^s(x''/x')\,[D_\varphi^+(x''/x)\,D_\varphi^-(x/x') + D_\varphi^-(x''/x)\,D_\varphi^+(x/x')] + D_\varphi^s(x''/x)\,D_u^0(x''/x')\,D_\varphi^0(x/x') + D_\varphi^s(x/x')\,D_u^0(x''/x')\,D_\varphi^0(x''/x)\} \tag{10.13}$$

Or, toutes les intégrales correspondant à ces noyaux s'annulent identiquement, en vertu de (10.5).

En résumé, nous avons à calculer les intégrales ayant pour noyaux les fonctions suivantes:

Intégrales doubles:

$$\frac{i}{2}\,D_u^s(x'/x)\,D_\varphi^1(x'/x)\,; \qquad \frac{i}{2}\,D_u^1(x'/x)\,D_\varphi^s(x'/x)$$

Intégrales triples:

$$\left.\begin{matrix} \frac{i}{2}D_u^s(x''/x')D_\varphi^s(x''/x)D_\varphi^1(x/x')\,; \frac{i}{2}\,D_\varphi^s(x''/x')\,D_u^s(x''/x)\,D_u^1(x/x') \\ \frac{i}{2}D_u^s(x''/x')D_\varphi^1(x''/x)\,D_\varphi^s(x/x')\,; \frac{i}{2}\,D_\varphi^s(x''/x')\,D_u^1(x''/x)\,D_u^s(x/x') \\ \frac{i}{2}\,D_u^1(x''/x')D_\varphi^s(x''/x)D_\varphi^s(x/x')\,; \frac{i}{2}\,D_\varphi^1(x''/x')\,D_u^s(x''/x)\,D_u^s(x/x') \end{matrix}\right\} \tag{10.14}$$

11. *La méthode pour éliminer la présence d'expressions divergentes.*

Nous avons défini la fonction $D_\varkappa^s(x)$ par:

$$D_\varkappa^s(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon(x^4)\,D_\varkappa^0(x) \tag{11.1}$$

elle s'écrit aussi:

$$D_\varkappa^s(x) = \frac{1}{4\pi}\left[\delta(T^2) - \frac{1}{2}\,\theta^+(T^2)\,\frac{\varkappa}{T}\,J_1(\varkappa T)\right] \tag{11.2}$$

Or, comme nous l'avons déjà remarqué, cette définition n'a vraiment de sens que sous le signe $\int (dx)^4$, cela du fait de la présence de la fonction de Dirac $\delta(T^2)$ dans (11.2).

Cela dit, calculons, pour $\varepsilon$ réel $> 0$.

$$4\pi\cdot\int_{-\varepsilon^2}^{+\varepsilon^2} d(T^2)\,D_\varkappa^s(T) = \int_{-\varepsilon^2}^{\varepsilon^2} d(T^2)\left[\delta(T^2) - \frac{1}{2}\,\theta^+(T^2)\,\frac{\varkappa}{T}\,J_1(\varkappa T)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int_0^{+\varepsilon^2} d(T^2)\,\frac{\varkappa}{T}\,J_1(\varkappa T) = 1 - \int_0^{\varkappa T = \varkappa\varepsilon} d/\varkappa T/J_1(\varkappa T)$$

Nous obtenons, avec:

$$\int dz\, J_1(z) = -J_0(z)$$

$$4\pi \cdot \int_{\varepsilon^2-}^{+\varepsilon^2} d(T^2)\, D^s_\varkappa(T) = 1 - \Big(-J_0(\varkappa\varepsilon) + J_0(0)\Big) = J_0(\varkappa\varepsilon) \qquad (11.3)$$

Faisons tendre alors $\varkappa$ vers l'infini; on a, quel que soit $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \int_{-\varepsilon^2}^{+\varepsilon^2} d(T^2)\, D^s_\varkappa(T) = 0;$$

comme $D^s_\varkappa(T) = 0$ pour $T^2 < 0$, nous pouvons écrire:

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \int_0^{\varepsilon^2} d(T^2)\, D^s_\varkappa(T) = 0 \quad \text{quelque soit } \varepsilon > 0. \qquad (11.4)$$

On en déduit alors:

$$\operatorname*{Lim}_{\varkappa\to\infty} D^s_\varkappa(x) = 0 \qquad \text{pour } T^2 = -R^2 \text{ fini.} \qquad (11.5)$$

Cette propriété de la fonction $D^s_\varkappa(x)$ nous permet d'écrire pour celle-ci:

$$\overline{D}^s_\varkappa(x) = D^s_\varkappa(x) + \operatorname*{Lim}_{\varkappa_i\to\infty} \sum_1^N c_i\, D^s_{\varkappa_i}(x) \qquad (11.6)$$

puisque la partie ajoutée est nulle à la limite; ou aussi:

$$\overline{D}^s_\varkappa(x) = \operatorname*{Lim}_{\varkappa_i\to\infty} \frac{1}{4\pi}\left\{(1+\sum_1^N c_i)\,\delta(T^2) - \frac{\theta^+(T^2)}{2T}\left[\varkappa J_1(\varkappa T) + \sum_1^N c_i \varkappa_i J_1(\varkappa_i T)\right]\right\} \qquad (11.7)$$

(le trait dans $\overline{D}^s_\varkappa(x)$ est pour distinguer cette nouvelle définition) où les coefficients $c_i$ sont des nombres scalaires invariants qui peuvent dépendre par exemple des scalaires invariants $\varkappa_i$.

Aucune condition particulière n'a été imposée à ces coefficients $c_i$. L'idée de M. Stueckelberg est d'utiliser l'indétermination de ces coefficients pour donner de la fonction $D^s_\varkappa(x)$ une définition qui élimine les infinités de la théorie habituelle des champs, infinités provenant précisément de la fonction $D^s_\varkappa(x)$ présente par l'intermédiaire des $D^c_\varkappa(x)$ dans les coefficients $\boldsymbol{S}^{(n)}$.

Il est cependant des conditions que l'on doit imposer aux coefficients $c_i$ avant toute considération de divergence. Ce sont celles entraînées par la condition pour $\overline{D}^s_\varkappa(x)$ de satisfaire à l'équation d'onde inhomogène, comme la fonction originale $D^s_\varkappa(x)$. Cette condition s'écrit:

$$(\Box - \varkappa^2)\, \overline{D}^s_\varkappa(x) + \delta(x) = (\Box - \varkappa^2)\, D^s_\varkappa(x) + \delta(x)$$

$$+ \operatorname*{Lim}_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i (\Box - \varkappa_i^2 + \varkappa_i^2 - \varkappa^2)\, D^s_{\varkappa_i}(x)$$

$$= -\delta(x) \operatorname*{Lim}_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i + \frac{1}{4\pi}\, \delta(T^2) \operatorname*{Lim}_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i (\varkappa_i^2 - \varkappa^2)$$

$$- \frac{1}{8\pi} \frac{\theta^+(T^2)}{T} \operatorname*{Lim}_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i (\varkappa_i^2 - \varkappa^2)\, \varkappa_i\, J_1(\varkappa T) = 0$$

Si l'on remarque que pour $\varkappa_i \to \infty$, à une distance $T \gg \varkappa_i^{-1}$:

$$J_1(\varkappa_i T) \sim (\varkappa_i T)^{-\frac{3}{2}} \cdot G(T) \qquad G(T) \text{ borné},$$

les $c_i$ doivent satisfaire aux trois conditions:

$$\operatorname*{Lim}_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i = 0 \tag{11.8}$$

$$\operatorname*{Lim}_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i\, \varkappa_i^2 = 0 \tag{11.9}$$

$$\operatorname*{Lim}_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i (\varkappa_i^2 - \varkappa^2)\, \varkappa_i^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{11.10}$$

Cela dit, considérons le nouvel opérateur:

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \mathbf{1} + \sum_{l,K} \varepsilon^l g^K\, \overline{\boldsymbol{S}}^{(K+l)} \tag{11.11}$$

obtenu à partir de $\boldsymbol{S}$ par la substitution de $D^s$ par $\overline{D}^s$. Il est essentiel que $\overline{\boldsymbol{S}}$ conserve la propriété d'unitarité (cf. § 3). On doit donc avoir (le trait indique que la substitution a été opérée):

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{S}}^1 + \overline{\boldsymbol{S}}^{1+} = \mathbf{0} \\ &\overline{\boldsymbol{S}}^2 + \overline{\boldsymbol{S}}^{1+}\, \overline{\boldsymbol{S}}^1 + \overline{\boldsymbol{S}}^{2+} = \mathbf{0} \\ &\overline{\boldsymbol{S}}^n + \overline{\boldsymbol{S}}^{1+}\, \overline{\boldsymbol{S}}^{n-1} + \ldots + \overline{\boldsymbol{S}}^{n+} = \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

semblablement à (6.3). Il est clair que l'on a toujours les identités (nous renvoyons au § 6 pour les notations):

$$\overline{D}^c(1)\, \overline{D}^c(2) \ldots \overline{D}^c(M) - 2\, \overline{I}_M - \overline{D}^a(1)\, \overline{D}^a(2) \ldots \overline{D}^a(M) = 0 \quad M = 1,2 \ldots$$

$$\overline{D}^c(1)\, \overline{D}^c(2) \ldots \overline{D}^c(M) - 2\, \overline{Re}_M + \overline{D}^a(1)\, \overline{D}^a(2) \ldots \overline{D}^a(M) = 0 \quad M = 2,3 \ldots \tag{11.13}$$

avec:

$$\left.\begin{aligned}\overline{I}_M &= \sum{}' D^1 \overline{D}^s \overline{D}^s \overline{D}^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum{}' D^1 D^1 D^1 \overline{D}^s \dots \overline{D}^s + \\ \overline{Re}_M &= \overline{D}^s \overline{D}^s \dots . \overline{D}^s + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum{}' D^1 D^1 \overline{D}^s \dots \overline{D}^s + \dots .\end{aligned}\right| \qquad (11.14)$$

Mais il n'y a plus identité entre $-2\,\overline{I}_M$ ou $-2\,\overline{Re}_M$ d'une part et l'expression $[\Sigma\, D\,(1) \dots D\,(M)]$ figurant dans le noyau de l'intégrale:

$$\overline{S}^1 + \overline{S}^{n-1} + \dots + \overline{S}^{n-1} + \overline{S}^1 = \overset{(n)}{\int} \dots \int' \dots [\Sigma\, D\,(1) \dots D\,(M)] \qquad (11.15)$$

(On se souvient que cette identité assurerait la validité des relations (11.12), partant l'unitarité de $\overline{\boldsymbol{S}}$.) Cela provient du fait que dans les contractions $\overline{\boldsymbol{S}}^i\ \overline{\boldsymbol{S}}^{n-i}$ apparaissent les fonctions $D^+$ et $D^-$ qui ne peuvent se transformer qu'en des combinaisons de fonctions $D^1$, $D^s$, et jamais $\overline{D}^s$.

Mais il est facile de voir que l'on a toujours:

$$\overline{S}^1 + \overline{S}^{n-1} + \dots \overline{S}^{n-1} + \overline{S} = \dots \overset{(n)}{\int} \dots \int' \dots [\overline{Re}_M] \text{ ou } \overset{(n)}{\int} \dots \int' \dots [\overline{I}_M] \qquad (11.16)$$

pourvu que dans la substitution:

$$\overline{D}^s(K) = \overline{D}^s_\varkappa(x) = D^s_\varkappa(x) + \lim_{\varkappa_i \to \infty} \sum_1^N c_i^K\, D^s_{\varkappa_i K}(x) \qquad (11.17)$$

on précise que $\varkappa_i^K \neq \varkappa_{i'}^{K'}$; cela résulte immédiatement des relations du type (10.5) et (10.10). Naturellement, cela suppose que les limites d'intégration pour $t, t'' \dots$ sont $-T' = +T'' = \infty$. L'unitarité de l'opérateur $\overline{\boldsymbol{S}}$ est donc sauvegardée.

*Remarque.* La substitution générale (11.17) a le grand désavantage d'introduire dans l'expression des $\boldsymbol{S}^{(n)}$ des termes non linéaires en $c_i^K$ dès que $M > 1$. Pour éviter ce qui par la suite complique les calculs, il est indiqué de poser maintenant:

$$c_i^K = 0 \text{ pour } K \neq 1 \qquad (11.18)$$

ce qui revient à ne faire qu'une seule des substitutions $D^s \to \overline{D}^s$, dans notre cas pour $D^s_u(x''/x)$.

## 12. *Le passage à l'espace de Fourier à quatre dimensions.*

Pour pousser plus loin le calcul, nous passons maintenant à l'espace de Fourier à quatre dimensions, ce qui revient physiquement à décomposer les paquets d'ondes généraux $v'^A, \dots$ et $\varphi'_-, \dots$, correspondant au neutron et aux mésons, dans les systèmes complets d'ondes planes:

$$\left.\begin{aligned} v''^{A}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \pi_A(\vec{k}'', n'')\, e^{i(k'', x)} = v^A(x/\vec{k}'', n'') \\ \text{et} \qquad \varphi'(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k', x)} = \varphi(x/\vec{k}') \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Il est clair que, pour les opérateurs $\boldsymbol{L}^{\alpha\beta}$, comme pour les fonctions $D$, nous utilisons alors les représentations dans l'espace de FOURIER à 4 dimensions (cf. A. III c).

On obtient alors pour l'expression du moment magnétique dans la représentation en ondes planes:

$$\begin{aligned} 2\,T\,\mu^{\alpha\beta}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') &= \varepsilon g^2 \cdot 4 \cdot (2\pi)^3 \cdot \delta^{[\alpha}(k''-k') \cdot \pi_A^+(\vec{k}'', n'')\,\tau^\mu \\ &\cdot \int (dp)^4 \cdot \Big\{ ((\gamma, p) + i\varkappa)\,\tau^\nu\, \pi^A(\vec{k}, n') \cdot (k'-p)^{\beta]} \cdot (k''-p)_\mu (k'-p)_\nu \\ &\cdot \overline{\Delta}{}_u^c(p) \cdot \Delta_\varphi^c(k''-p) \Delta_\varphi^c(k'-p) - \frac{i}{4\varkappa}\Big[ ((\gamma, k'')-p+i\varkappa)((\gamma, k')-p+i\varkappa) \\ &\cdot \tau^\nu\, \pi^A(\vec{k}', n')(k'-p)^{\beta]} \cdot p_\mu p_\nu \overline{\Delta}{}_u^c(k''-p) \cdot \Delta_u^c(k'-p) \cdot \Delta_\varphi^c(p) \Big] \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{2}\Big[ ((\gamma, p)+i\varkappa)\tau^\nu \pi^A(\vec{k}', n') \cdot \delta_\nu^{\beta]} \cdot (k''-p)_\mu\, \overline{\Delta}{}_u^c(p) \Delta_\varphi^c(k''-p) \Big] \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2}\Big[ ((\gamma, p)+i\varkappa)\tau^\nu \pi^A(\vec{k}', n') \cdot \delta_\mu^{\beta]} \cdot (k'-p)_\nu \cdot \overline{\Delta}{}_u^c(p) \cdot \Delta_\varphi^c(k'-p) \Big] \\ &- \varepsilon g^2 \cdot (2\pi)^3 \cdot \frac{i}{\varkappa}\, \delta(k''-k') \cdot \pi_A^+(\vec{k}'', n'')\,\tau^\mu \int (dp)^4 \cdot ((\gamma, k'')-p \\ &+ i\varkappa)\,\gamma^\beta \gamma^\alpha ((\gamma, k'-p) + i\varkappa) \cdot \tau^\nu \pi^A(\vec{k}', n')\, p_\mu p_\nu \cdot \overline{\Delta}{}_u^c(k''-p) \\ &\Delta_u^c(k'-p)\, \Delta_\varphi^c(p) \end{aligned} \tag{12.2}$$

avec:

$$\delta^\alpha(p) = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\,\delta(p).$$

Nous avons introduit les notations commodes:

$$\ldots\ \mu^{[\alpha} \ldots\ \nu^{\beta]} \ldots = \ldots\ \mu^\alpha \ldots\ \nu^\beta \ldots - \ldots\ \mu^\beta \ldots\ \nu^\alpha \ldots \tag{12.3}$$

et séparé le dernier terme, purement diagonal en $\vec{k}''$, $\vec{k}'$. Les autres termes contiennent à côté d'une contribution diagonale que nous allons déterminer une partie non diagonale en $\vec{k}''$, $\vec{k}'$. Pratiquer cette séparation est le prochain pas du calcul.

Pour cela, nous remarquons d'abord que l'élément de matrice

$$\mu^{\alpha\beta}(\vec{k}''\, n''/\vec{k}'\, n')$$

n'intervient dans le calcul d'observables physiques que sous le signe d'intégration $\int dV_k, \ldots$, c'est-à-dire dans des intégrales du type:

$$\int (dk'')^3\, g(\vec{k}'')\, \mu^{\alpha\beta}(\vec{k}''\, n''/\vec{k}'\, n') \tag{12.4}$$

Or, nous avons:

$$\int (dz)^3 g(\vec{k}'+\vec{z}\,;\vec{k}')[f(\vec{k}'+\vec{z}\,;\vec{k}')\,\delta_i(\vec{z})$$
$$= \int (dz)^3 g(\vec{k}'+z\,;\vec{k}')\left[f(\vec{k}'\,;\vec{k}')\,\delta_i(z) - \left|\frac{\partial f(\vec{k}'+\vec{z}\,;\vec{k}')}{\partial z_i}\right|\,\delta(z)\right]_{\vec{z}=0} \quad (12.5)$$

avec:

$$z_\iota = k''_\iota - k'_i$$

qui nous permet de séparer les parties diagonale et non-diagonale en $(\vec{k}'/\vec{k}'')$, d'expressions contenant les dérivées partielles de la fonction $\delta(z)$.

En remplaçant dans (12.2) les dérivées partielles de la fonction $\delta(k''-k')$ par les expressions:

$$\left.\begin{aligned} \delta_i(k''-k') &= \frac{2T}{2\pi}\,\delta_i(\vec{k}''-\vec{k}') \\ \delta_4(k''-k') &= \frac{2T}{2\pi}\cdot\frac{k'^4}{|\vec{k}'|^2}\cdot\sum_1^3 k'^i\,\delta_i(\vec{k}''-\vec{k}') \end{aligned}\right\} \quad (12.6)$$

ce qui conduit naturellement à séparer dès maintenant les composantes du moment magnétique proprement dit:

$$\mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') \qquad i\,k = 1, 2, 3$$

et celles du moment électrique:

$$\mu^{i4}(\vec{k}'', n''/k', n')$$

Nous obtenons pour la première de ces grandeurs, dont seule nous nous occupons:

$$\mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') = +\,\varepsilon\,g^2\,(4\,\pi)^2\left\{\delta(\vec{k}''-\vec{k}')\left[\frac{\partial}{\partial z^{[\iota}}\cdots{}^{k]}\right]_{\vec{z}=0}\right.$$
$$\left. -\,\delta^{[\iota}(\vec{k}''-\vec{k}')\,[\ldots{}^{k]}\ldots]\right\} \quad (12.7)$$

13. *L'interprétation des contributions diagonale et non diagonale.*

Considérons maintenant l'expression du moment magnétique $\mu^{\alpha\beta}$ du neutron telle que nous l'avons obtenue en (6.15), pour la comparer à la valeur de la même grandeur pour une particule de M. Dirac de charge $\varepsilon$ et de moment magnétique interne $\lambda$:

$$\boldsymbol{\mu}^{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2\varkappa}\,\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\varepsilon}{2\varkappa} + \lambda\right)\boldsymbol{S}^{\cdot\alpha\beta} \quad (13.1)$$

telle que nous l'avions obtenue en (8.21).

Afin de pouvoir comparer les résultats, faisons apparaître dans (12.7) les opérateurs $\boldsymbol{L}^{\alpha\beta}$ et $\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}$ qui sont en (13.1) et cela sans nous préoccuper des coefficients figurant devant ces opérateurs (ce sera notre tâche tout à l'heure).

Dans la partie diagonale (terme en $\delta(\vec{k}'' - \vec{k}')$) ne peuvent figurer que les opérateurs antisymétriques tensoriels du 2e ordre:

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = 4\,i\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad [\gamma^\alpha, \boldsymbol{k}'^\beta]; \tag{13.2}$$

en effet, l'opérateur $\boldsymbol{x}^\alpha$ ne peut s'y trouver, caractéristique qu'il est de la contribution non diagonale en $\vec{k}$.

Dans la partie non diagonale, par contre, nous avons les opérateurs possibles:

$$[\boldsymbol{x}^\alpha, \gamma^\beta] \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{x}^\alpha, \boldsymbol{k}'^\beta] = \boldsymbol{L}^{\alpha\beta} \tag{13.3}$$

Or, nous avons déjà utilisé l'identité, pour les espérances mathématiques:

$$[\boldsymbol{x}^\alpha, \gamma^\beta] = \frac{1}{i\,\varkappa}\,(\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} + 2\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}). \tag{13.4}$$

en outre, on a aussi (pour les espérances mathématiques):

$$[\gamma,^\alpha \boldsymbol{k}'^\beta] = \mathbf{0}. \tag{13.5}$$

Nous pouvons donc écrire le résultat obtenu en (12.7) pour le moment magnétique du neutron sous la forme opératorielle

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}^{\alpha\beta} = a_d\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta} + b_d \cdot \mathbf{0} + c_a\,(\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} + 2\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}) + d_a\,\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} &= (c_a + d_a)\,\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} \\ &+ (a_d + 2\,c_a)\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{13.6}$$

$a_d$, $b_d$; $c_a$, $d_a$ désignant les coefficients numériques multipliant les opérateurs dans (12.7).

La comparaison avec (13.1) est maintenant facile; elle nous montre que le neutron se comporte vis-à-vis d'un champ électromagnétique uniforme de la même manière qu'une particule de M. Dirac (c'est-à-dire une particule qui est décrite par l'équation de M. Dirac) possédant une charge:

$$\varepsilon = 2\,\varkappa_n\,(c_a + d_a) \tag{13.8}$$

et un «moment magnétique intrinsèque»:

$$\lambda = \frac{a_d - 2\,d_a}{2} \tag{13.9}$$

Or, par définition le neutron n'a pas de charge. Nous devons donc avoir:

$$c_a + d_a = 0 \tag{13.10}$$

ce qui revient à dire que la somme des coefficients de $[\boldsymbol{x}^\alpha, \boldsymbol{\gamma}^\beta]$ et de $\boldsymbol{L}^{\alpha\beta}$, partie non diagonale dans l'expression du moment magnétique, doit s'annuler.

Laissant pour l'instant cette question, sur laquelle nous reviendrons dans notre conclusion, poursuivons l'évaluation de la seule partie diagonale du moment magnétique.

## 14. *La valeur du moment magnétique mise sous la forme d'une somme d'intégrales simples avec coefficients indéterminés.*

Considérons maintenant la partie diagonale du moment magnétique $\mu^{ik}(\vec{k}''n''/\vec{k}'n')$, que nous écrivons, d'après (12.2 et 7):

$$\mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}'n') = \varepsilon\, g^2 (4\pi)^2 \delta \cdot (\vec{k}''/\vec{k}') \cdot M^{ik}(n''/n') \tag{14.1}$$

avec:

$$\begin{aligned} M^{ik}(n''/n') = \frac{1}{k'^4} \Big\{ & \frac{\partial}{\partial z[i}\, \pi_A^+ (\vec{k}' + \vec{z}, n'')\, \tau^\mu \int (dp)^4 . \\ & \Big( ((\gamma, p) + i\varkappa_u)\, \tau^\nu \pi^A\, (\vec{k}', n') \cdot (k' - p)^{k]} \cdot (k' + z - p)_\mu \cdot (k' - p)_\nu \\ & \cdot \overline{\Delta}{}_u^c(p)\, \Delta_\varphi^c(k' + z - p) \cdot \Delta_\varphi^c(k' - p) - \frac{i}{4\varkappa} \Big[ ((\gamma, k' + z - p) + i\varkappa) \\ & ((\gamma, k' - p) + i\varkappa)\, \tau^\nu \pi^A (k' - p)^{k]} \cdot p_\mu p_\nu \cdot \overline{\Delta}{}_u^c(k' + z - p) \cdot \Delta_u^c(k' - p) \\ & \cdot \Delta_\varphi^c(p) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4} \Big[ ((\gamma, p) + i\varkappa)\, \tau^\nu \pi^A \Big( \delta_\nu^{k]} \cdot (k' + z - p)_\mu \\ & \cdot \Delta_\varphi^c (k' + z - p) + \delta_\mu^{\varkappa]} \cdot (k' - p)_\nu \Delta_\varphi^c (k' - p) \Big) \overline{\Delta}{}_u^c(p) \Big] \\ & - \frac{i}{4\varkappa} \pi_A^+ (\vec{k}', n'')\, \tau^\mu \int (dp)^4 ((\gamma, k' - p) + i\varkappa)\, \gamma^i \gamma^k ((\gamma, k' - p) \\ & + i\varkappa)\, \tau^\nu \pi^A (\vec{k}', n')\, p_\mu p_\nu \overline{\Delta}{}_u^c(k' - p)\, \Delta_u^c(k' - p) \cdot \Delta_\varphi^c(p) \Big|_{\vec{z}=0} \end{aligned} \tag{14.2}$$

Nous effectuons les dérivations par rapport à $z^i$, en tenant compte des identités du type:

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \pi_A^+ (k' + z, n'') \Big|_{\vec{z}=0} = b^+ \Big(\gamma^i + \frac{k'^i}{k'^4} \gamma^4\Big)_A^{n''} \tag{14.3}$$

Nous faisons ensuite $\vec{z} = 0$, conformément à (12.7), puis afin de simplifier nous passons au système de repos du neutron, défini par

$$\vec{k}' = 0. \qquad k'^4 = \varkappa_u \tag{14.4}$$

Nous introduisons le quadrivecteur $p'$ par:

$$p' = (k' - p) = (-\vec{p}, \varkappa_u - p^4) \tag{14.5}$$

Nous sortons alors de dessous le signe d'intégration les facteurs constants, en particulier les matrices du quatrième ordre $\gamma$, $\tau$, etc., de manière à donner aux intégrales la forme la plus simple possible. Pour obtenir ce résultat, il faut naturellement effectuer les multiplications, ce qui multiplie aussi le nombre des termes.

Enfin, dans chaque intégrale triple, nous remplaçons les seuls produits:

$$\overline{\Delta}^c_u(p)\,(\Delta^c_\varphi(p'))^2 \quad \text{ou} \quad \overline{\Delta}^c_u(p')\cdot\Delta^c_u(p')\cdot\Delta^c_\varphi(p)$$

par les sommes des termes:

$$[\Delta^1_u(p)\,(\Delta^s_\varphi(p'))^2 + 2\overline{\Delta}^s_u(p)\,\Delta_\varphi(p')\,\Delta^1_\varphi(p')] \quad \text{ou} \quad [\Delta^1_u(p')\,\Delta^s_u(p')\,\Delta^s_\varphi(p) + \overline{\Delta}^s_u(p')\,\Delta^s_u(p')\,\Delta^1_\varphi(p) + \overline{\Delta}^s_u(p')\,\Delta^1_u(p')\,\Delta^s_\varphi(p)]\,; \tag{14.6}$$

dans les intégrales simples, nous substituons de même la somme des deux termes:

$$\overline{\Delta}^s_u(p)\,\Delta^1_\varphi(p') + \Delta^1_u(p)\,\Delta^s_\varphi(p') \tag{14.7}$$

au produit des deux fonctions causales:

$$\Delta^c_u(p)\,\Delta^c_\varphi(p')$$

Cela en accord avec nos conclusions du § 11.

Nous obtenons alors pour $M^{ik}$ une expression de la forme (nous ne donnons que les 4 types de noyaux):

$$\begin{aligned}
M^{ik}(n''/n') = \frac{1}{\varkappa_u}\Big\{ & -i\gamma^{[i}\boldsymbol{\tau}^\mu\gamma^\lambda\boldsymbol{\tau}^\nu\int(dp)^4\cdot p^{k]}\cdot p_\lambda p'_\mu p'_\nu[\Delta^1_u(p)\,\Delta^s_\varphi(p')\,\Delta^s_\varphi(p') \\
& \quad + 2\overline{\Delta}^s_u(p)\,\Delta^s_\varphi(p')\,\Delta^1_\varphi(p')] \\
& + \ldots\ldots \\
& + \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}^\mu\gamma^\lambda\sigma^{ik}\boldsymbol{\tau}^\nu\int(dp)^4 p'_\lambda p'_\varrho p_\mu p_\nu[\Delta^1_u(p')\,\Delta^s_u(p')\,\Delta^s_\varphi(p) \\
& \quad + \overline{\Delta}^s_u(p')\,\Delta^s_u(p')\,\Delta^1_\varphi(p) + \overline{\Delta}^s_u(p')\,\Delta^1_u(p')\,\Delta^s_\varphi(p)] \\
& + \ldots\ldots \\
& + \frac{\varkappa_u}{4\pi^2}\boldsymbol{\tau}^{[i}\gamma^\lambda\boldsymbol{\tau}^{k]}\cdot\int(dp)^4\cdot p_\lambda[\Delta^1_u(p)\,\Delta^s_\varphi(p') + \overline{\Delta}^s_u(p)\,\Delta^1_\varphi(p')] \\
& + \ldots\ldots \\
& - \frac{i\varkappa_u}{2\pi^2}\boldsymbol{\tau}^\mu\boldsymbol{\tau}^{[i}\int(dp)^4\cdot p'_\mu\cdot\frac{p^{k]}}{\varkappa_u - p^4}[\Delta^1_u(p)\,\Delta^{s'}_\varphi(p') + \overline{\Delta}^s_u(p)\,\Delta^1_\varphi(p')] \\
& + \ldots\ldots \qquad \text{(il y a en tout 18 termes).}
\end{aligned} \tag{14.8}$$

Le calcul se poursuit de la manière suivante:

1. On substitue à $\bar{\Delta}^s$ la série qui la définit: à chaque terme contenant $\bar{\Delta}^s$ correspond alors une série contenant $N + 1$ termes: $N$ termes de structure identique, différant par un coefficient $c_i$ et par un paramètre $\varkappa_i$, et un terme, celui donné par $\Delta^s$.

2. Grâce à la présence sous le signe $\int (dp)^4$ de la fonction

$$\delta (\varkappa^2 + (pp)) = \frac{1}{2 \sqrt{\varkappa^2 + p^2}} [\delta (p^4 - \sqrt{\varkappa^2 + p^2} + \delta (p^4 + \sqrt{\varkappa + p^2})] \quad (14.9)$$

on ramène les intégrales à une extension tridimensionnelle $\int (dp)^3$.*)

3. On effectue ensuite l'intégration sur les variables angulaires de l'espace $p$; tenant alors compte des relations du type:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (dp)^3 g(p) = 4\pi \int_0^{\infty} dp \cdot p^2 \cdot g(p); \int_{-\infty}^{+\infty} (dp)^3 p \cdot g(p) = 0$$

$$p = |\vec{p}| \quad \vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$$

qui annulent une grande partie des composantes des tenseurs engendrés par les termes de (14.8), on est ramené au type général d'intégrale simple:

$$J = a(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \int_0^P \frac{dp}{\sqrt{\varkappa^2 + p^2}} f(p^2) \quad (14.10)$$

où $\varkappa = \varkappa_u, \varkappa_\varphi$ et $P \to \infty$, avec:

$$f(p^2) = \frac{\sum_0^\delta f_m (\varkappa_u^2, \varkappa_\varphi^2, \varkappa_i^2) p^{2m}}{(p^2 + \varkappa_u^2)^\alpha (p^2 - b(\varkappa_u^2, \varkappa_\varphi^2))^\beta (p^2 - d(\varkappa_u^2, \varkappa_\varphi^2, \varkappa_i^2)^\gamma}$$

compte tenu des remarques suivantes:

$$a, \beta, \gamma = 0{,}1 \qquad 0 < \delta < 4;$$

le degré de $f(p^2)$ en $p$ est inférieur ou égal à 4.

---

*) Dans le second groupe de termes de (14.8), apparaît l'expression $\frac{\delta(p')}{p'}$ que nous remplaçons par $-\delta'(p)$, annulant sans autre la constante arbitraire A dans la relation (A. II. 10) appliquée ici. On pourrait utiliser cette constante pour eliminer certaines divergences.

4. On effectue enfin les sommes sur les indices muets, on met en évidence les combinaisons tensorielles antisymétriques $\gamma^{[i} \ldots \gamma^{k]} \ldots$ qui se réduisent finalement au tenseur:

$$\sigma^{ik}(n''/n') = 2\, S^{ik}(n''/n')$$

Il vient alors:

$$M^{ik}(n''/n') = \sigma^{ik}(n''/n') \lim_{P\to\infty} \lim_{\varkappa_i\to\infty} \sum_{(\alpha)} [I^{(\alpha)}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, P)$$
$$+ \sum_1^N c_i\, J^{(\alpha)}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \varkappa_i^2, P)] = \sigma^{ik}(n''/n') \cdot A(\varkappa_u, \varkappa_\varphi). \qquad (14.11)$$

où $(\alpha)$ dénombre le nombre des intégrales provenant des termes de (14.8), dont $I^{(\alpha)}$ et $J^{(\alpha)}$ représentent les $N+1$ sous-termes engendrés par $\bar{\varDelta}_u^s$.

C'est-à-dire pour le moment magnétique:

$$\mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') = (4\pi)^2 \cdot \varepsilon g^2 \cdot \delta(\vec{k}''/\vec{k}') \cdot \sigma^{ik}(n''/n') \cdot A(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \qquad (14.12)$$

En introduisant le facteur $G$ par l'égalité:

$$\mu^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') = G(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \cdot \frac{\varepsilon}{2\varkappa_u} S^{ik}(\vec{k}'', n''/\vec{k}', n') \qquad (14.13)$$

nous avons pour son expression:

$$G(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) = 32 \cdot \pi^2 \cdot \varkappa_u g^2 \cdot A(\varkappa_u, \varkappa_\varphi). \qquad (14.14)$$

avec, comme il se doit $[G] = [1]$, car, comme le montrent (14.1 et 11), $[A] = [l]^{-1}$.

## 15. *Intégration et détermination des coefficients. La valeur du moment magnétique.*

Le but de ce paragraphe est de montrer la possibilité du choix des coefficients $c_1, \ldots c_N$ définissant la fonction $\bar{D}_u^s(x)$ de manière que le nombre:

$$A(\varkappa_u, \varkappa_\psi) = \lim_{P\to\infty} \lim_{\varkappa_i\to\infty} \sum_{(\alpha)} [I^{(\alpha)}(\varkappa_u \cdot \varkappa_\varphi, P) + \sum_1^N c_i\, J^{(\alpha)}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \varkappa_i^2, P)]$$

soit fini, c'est-à-dire de manière que le moment magnétique du neutron soit fini. Pour y parvenir, nous allons d'abord calculer les intégrales $I^{(\alpha)}$ et $J^{(\alpha)}(\ldots \varkappa_i^2)$ en fonction de la limite supérieure $P$. Puis nous ordonnons le résultat ainsi obtenu pour $A(\varkappa_u, \varkappa_\varphi)$ par rapport aux puissances de:

$$\xi = \left(\frac{P}{\varkappa_u}\right)^2 \qquad (15.1)$$

en introduisant simultanément les nouvelles variables:

$$\eta_i = \left(\frac{\varkappa_i}{\varkappa_u}\right)^2 \tag{15.2}$$

Alors seulement, nous montrons qu'il est possible de choisir les coefficients $c_1, \ldots c_N$ comme *fonctions* des paramètres $\varkappa_u$, $\varkappa_\varphi$, $\eta_i$ de sorte que:

$$A(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) = A_0(\varkappa_u, \varkappa_\varphi)$$

ou $A_0(\varkappa_u, \varkappa_\varphi)$ est un nombre fini mais arbitraire.

Le calcul de $I^{(\alpha)}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, P)$ et de $J^{(\alpha)}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \varkappa_i^2, P)$ se fait sans difficultés en prenant pour variable d'intégration $u = \frac{p}{\sqrt{\varkappa^2 + p^2}}$ (voyez (14.10)). On obtient alors en sommant sur $(\alpha)$ et en ordonnant par rapport à $P$:

$$\begin{aligned} A(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) = \lim_{\xi \to \infty} \lim_{\eta_i \to \infty} \Bigg\{ & \sum_{n=0}^{2} \Big[\alpha_n(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_n(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i)\Big] \xi^n \\ & + \Big[\alpha_L(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_L(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i)\Big] \operatorname{Log} \xi \\ & + \sum_1^\infty \Big[\alpha_n(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_{-n}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i)\Big] \xi^{-n} \end{aligned} \tag{15.3}$$

où les coefficients $\beta_n(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i)$ sont donnés par:

$$\beta_n(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i) = \sum_{-\infty}^{a(n)} \beta_{nK}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi)(\eta_i)^K \qquad n = 2, 1, L, -1, -2, \ldots.$$

$$\beta_0(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i) = \sum_{-\infty}^{a(0)} \big(\beta_{0K}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \beta'_{0K}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \operatorname{Log} \eta_i\big)(\eta_i)^K \tag{15.4}$$

avec

$$1 \leqq a(n) \leqq a \quad (a = a_{\max} = 5)$$

On vérifie bien que si l'on pose tous les $c_i$ identiquement nuls, le nombre $A$ est infini.

Pour rendre fini $A(\varkappa_u, \varkappa_\varphi)$ nous choisissons alors les coefficients $c_i$ comme des fonctions:

$$c_i = c_i(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i) \tag{15.5}$$

satisfaisant *identiquement*, avant le passage à la limite $\eta_i \to \infty$.

1) à la condition:

$$\sum_1^N c_i \eta_i = \alpha_5(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_5(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i) = 0$$

$$\alpha_5(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) = 0; \; \beta_5(\varkappa_u \varkappa_\varphi \eta_i) \equiv \eta_i. \tag{15.6a}$$

l'une des trois conditions nécessaires pour que $\overline{D^s_u}(x)$ soit solution de l'équation d'onde inhomogène définissant $D^s_\varkappa(x)$ (voyez (§ 11)). Nous verrons plus tard que les deux autres conditions se trouveront vérifiées automatiquement après passage à la limite.

2) Aux 4 conditions:

$$\alpha_n(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_n(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i) = 0 \qquad n = L, 1, 2$$

$$\alpha_0(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_i \beta_0(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i) = A_0(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \tag{15.6b}$$

soit en tout 5 équations linéaires dans les $c_i$. On peut donc faire $N = 5$, et déterminer les 5 coefficients:

$$c_i = \frac{\sum_1^4 \alpha'_K(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \cdot \mathrm{Min}_i^K}{\Delta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta = \|\beta_K(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i)\| \\ \mathrm{Min}_i^K = \text{Min pr. rap. à } \beta_K(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i). \end{cases} \tag{15.7}$$

en substituant les indices 3 à $L$ et 4 à 0, avec $\alpha'_K = \alpha_K$ $K = 1, 2, 3$ et $\alpha'_4 = \alpha_0 - A_0$; $\alpha'_5 \equiv 0$.

Il est clair que la liberté dont nous disposons pour les paramètres $\eta_i$ permet toujours de rendre le déterminant caractéristique différent de zéro.

Cela fait, définissons le passage à la limite $\eta_i \to \infty$, en posant:

$$\eta_i = \eta_i^0 z$$

avec:

$$\eta_i^0 \text{ fini} \qquad z \to \infty \tag{15.8}$$

Compte tenu de (15.4), on voit que le déterminant et les différents mineurs tendent vers l'infini avec $z$ de la manière suivante:

$$\Delta \to z^\delta \operatorname{Log} z; \ \mathrm{Min}_i^K \to z^{\delta - a(K)} \cdot \operatorname{Log} z, \quad K = 1, 2, 3.$$

$$\mathrm{Min}_i^4 \to z^{\delta - a(4)} \quad \text{avec} \quad \delta = 1 + \sum_{l=1}^4 a(l) \tag{15.9}$$

Ce qui montre que les $c_i$, pour $z \to \infty$, tendent vers *zéro* selon:

$$c_i \to z^{-\nu} \qquad a \geqslant \nu \geqslant 1 \tag{15.10}$$

Cela nous assure premièrement que les relations:

$$\lim_{\eta_i \to \infty} \sum_1^N c_i = 0$$

et

$$\lim_{\eta_i \to \infty} \sum_1^N c_i(\eta_i^{+3/4} - \eta_i^{-1/4}) = 0 \tag{15.11}$$

(qui permettent à $\overline{D}_u^s$ de vérifier l'équation d'onde) sont vérifiées. Secondement, cela nous montre que:

$$A\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) = A_0\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \tag{15.12}$$

pourvu que l'on définisse le passage à la limite $\xi \to \infty$ par (cf. 15.4):

$$\xi = \xi_0\, z^a \quad \text{où} \quad \xi_0 \text{ fini.} \tag{15.13}$$

Alors en effet, on a, quel que soit $n > 1$:

$$[\alpha_{-n}\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_\iota \beta_{-n}\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_\iota)]\, \xi^{-n} \to z^{a(n) - \nu - na} \to 0$$

et (15.3) se réduit bien à (15.12). Notons que les passages à la limite $\xi \to \infty$ et $\eta_i \to \infty$ définis par (15.8 et 13) satisfont à la condition:

$$\frac{\xi}{\eta_i} \to z^{a - \nu} \to \infty \tag{15.14}$$

nécessaire pour que l'espace d'intégration en (14.2) soit infini même pour les particules de masses infinie $\varkappa_i$ intervenant dans la définition de $\overline{D}_u^s$.

Remarquons qu'il est possible de supprimer une part d'arbitraire du moment magnétique en posant à la place de la relation:

$$\alpha_0\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) + \sum_1^N c_\iota\, \beta_0\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_\iota) = A_0\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi) \tag{15.6}$$

plus simplement:

$$\sum_1^N c_\iota\, \beta_0\,(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_\iota) = 0 \tag{15.16}$$

Cela a l'avantage de ne pas introduire la fonction arbitraire $A_0(\varkappa_u, \varkappa_\varphi)$ dans l'expression des $c_l$, et de donner au moment magnétique la valeur:

$$\mu^{ik}\,(\vec{k}''\, n'' / \vec{k}'\, n') = (32\,\pi^2 \varkappa_n \cdot g^2 \alpha_0\,(\varkappa_n, \varkappa_\varphi))\, \frac{\varepsilon}{2\, x_u}\, S^{ik}\,(\vec{k}''\, n'' / \vec{k}'\, n') \tag{15.15}$$

qui est parfaitement définie avant la substitution de $D_u^s(x)$ par $\overline{D}_u^s(x)$: c'est simplement le terme indépendant de $P$ (ou $\xi$) dans le développement de $\mu^{ik}$ analogue à (15.3). Les $c_i$ sont encore donnés par (15.7), mais avec $\alpha_4'\,(\varkappa_n, \varkappa_\varphi) = 0$.

## 16. *Remarques et conclusion.*

La première observation que nous voulons faire a pour objet l'invariance du procédé d'évaluation des coefficients $c_i(\eta_K)$, invariance par rapport à la méthode de calcul employée. Précisons: aux paragraphes 12 et 13, nous avons montré que le moment magnétique du neutron peut s'écrire:

$$\mu^{ik}(\vec{k}''n''/\vec{k}'n') = m \cdot S^{ik}(\vec{k}''n''/\vec{k}'n'). \tag{16.1}$$

$$m = G(\varkappa_n, \varkappa_\varphi)\frac{\varepsilon}{2\varkappa_u}$$

Dans cette expression, le facteur $m$ est scalaire invariant par rapport au groupe de LORENTZ. C'est ce facteur scalaire $m$ qui s'écrit sous la forme d'une somme d'intégrales quadridimensionnelles:

$$m = \sum_{(\alpha)} G^{(\alpha)}; \quad G^{(\alpha)} = \lim_{\eta_l \to \infty} \int_\infty (dp)^4 \cdot g^{(\alpha)}(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, c_l, \eta_i) \tag{16.2}$$

fonctions linéaires des coefficients $c_l$, eux-mêmes constants par rapport à l'intégration.

Pour calculer ces intégrales, nous avons écrit:

$$\int_\infty (dp)^4 \ldots = \lim_{P\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^4 \cdot \int_0^{2\varphi} d\varphi_p \cdot \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_0^P dP \cdot P^2 \ldots .$$

$$\text{avec } P = |\vec{p}|\ \vec{p} = (p^1, p^2, p^3) \cdot \varphi_p = \operatorname{arctg} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \zeta_p = \frac{p^3}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}} \tag{16.3}$$

puis choisi les $c_i(\varkappa_u, \varkappa_\varphi, \eta_i)$ de manière que l'expression reste finie, en précisant les passages à la limite $P \to \infty$ et $\eta_i \to \infty$ par (15.8) et (15.13).

Ce sont ces dernières conditions qui assurent l'indépendance (vis-à-vis du choix des variables (16.3) pour calculer les intégrales) du résultat trouvé pour les $c_i(\varkappa_u. \varkappa_\varphi, \eta_i)$, puisque le facteur $m$ s'exprime alors comme le résultat d'un passage à la limite unique:

$$m = \lim_{z\to\infty} \int_0^{f(z)} dp\, F(p, z) \qquad f(z) = \xi_0 z^a$$

expression dont les coefficients du développement dans les puissances de $z$ s'annulent pour les puissances positives de $z$, et Log $z$.*)

Revenons maintenant à la question soulevée au § 13 par l'existence d'une contribution non diagonale dans l'expression du moment magnétique. Nous avons vu que pour conserver au neutron

*) Mais il est clair que le résultat dépend des relations (15.8) et (15.13).

sa propriété d'être dépourvu de charge électrique, il fallait satisfaire à la condition:

$$c_a + d_a = 0 \tag{13.9}$$

$c_a$ et $d_a$ étant les coefficients numériques des opérateurs $\boldsymbol{L}^{\alpha\beta} + 2\,\boldsymbol{S}^{\alpha\beta}$ et $\boldsymbol{L}^{\alpha\beta}$ intervenant dans le terme non diagonal.

Si l'on calcule ces coefficients par la même méthode que nous avons utilisée pour la partie diagonale, on voit qu'il faut, pour satisfaire à (13.9) imposer de nouvelles conditions pour les coefficients $c_1 \ldots c_N$, analogues à celles que nous avions en (15.4).

La condition d'annulation de la charge du neutron peut donc toujours être remplie pour autant que les nouvelles conditions pour les coefficients $c_1 \ldots c_N$ sont compatibles avec les anciennes.

Mais cela doit être le cas. Au lieu de résoudre le système (15.6), pour trouver les fonctions $c_i = c_i(\varkappa_u, \varkappa_\varphi \ldots \varkappa_k^2 \ldots)$ nous résolvons maintenant le système formé du système initial (15.6) auquel on joint les conditions nouvelles entraînant (13.9). La compatibilité de toutes les équations (linéaires dans les $c_1 \ldots c_N$) que l'on obtient ainsi est assurée d'une part par le nombre $N$ arbitrairement grand (mais fini) des coefficients $c_1 \ldots c_N$ et d'autre part par la liberté relative dans le choix des constantes $\eta_i$

Voici maintenant une remarque sur le procédé d'élimination des divergences. Pour respecter la causalité avant le passage à la limite $y_\iota \to \infty$, il est clair qu'il faut poser:

$$D_\varkappa^c(x) = D^c(x) + \lim_{y_\iota \to \infty} \sum_1^N c_\iota D_{y_\iota}^c(x)$$

au lieu de (11.6). Mais alors nous modifierions non seulement la fonction $D_\varkappa^s(x)$, mais encore la fonction homogène $D_\varkappa^1(x)$ et par elle toutes les autres, en particulier $D_\varkappa^+(x)$. Autrement dit, nous porterions atteinte à la relation de saturation des paquets d'ondes (1.18), ce qui est très discutable. En effet cela pourrait s'interpréter de deux manières: ou bien on modifie les lois de commutation (ce que l'expérience ne justifie pas), ou bien on introduit des champs auxiliaires à masse infinie $\varkappa_i$ avec des coefficients de couplage $\sqrt{c_i}\, g$, ce qui n'a de sens physique que si l'on peut montrer que ces coefficients peuvent être choisis positifs; or cela ne paraît pas possible. C'est d'ailleurs cette dernière raison qui exclut la possibilité de rendre finies les grandeurs divergentes en introduisant des champs auxiliaires de masses *finies*: ceux-ci ne sont plus causals si les coefficients $c_i$ sont négatifs, car il devrait, pour les masses $\varkappa_i$ correspondantes, exister des états d'énergie négative.

*

Il est d'ailleurs intéressant de noter l'analogie existant à ce point de vue entre nos résultats et ceux obtenus par M. STUECKELBERG[2]) en théorie classique, et aussi avec ceux de M. PAYS[8]) acquis par l'introduction d'un champ $f''$.

En guise de conclusion, relative en particulier à l'indétermination à laquelle nous aboutissons pour les grandeurs caractérisant les particules élémentaires (il est clair que la méthode est générale, et s'applique au calcul d'autres grandeurs) nous dirons:

La théorie des champs quantifiés constitue un cadre cohérent dans lequel vient se placer la description des phénomènes liés aux particules élémentaires. Mais ce cadre, essentiellement constitué par les principes de covariance relativiste et de causalité d'une part, et par le principe d'incertitude d'autre part, ce cadre semble trop vaste, ou plutôt incomplet. Que l'indétermination soit liée à la fonction inhomogène $D^s_\varkappa(x)$, et non aux fonctions homogènes $D'^0_\varkappa(x)$, semble montrer bien que c'est la notion même de particule élémentaire qu'il faut préciser*).

En terminant ce travail, je tiens particulièrement à exprimer ma grande reconnaissance à M. STUECKELBERG, mon maître, l'auteur de la méthode suivie; ses conseils, ses critiques et ses encouragements furent inappréciables.

MM. W. PAULI, M. FIERZ, A. HOURIET, A. KIND et J. PIRENNE ont bien voulu, à divers degrés, s'intéresser à ce travail; j'ai parfois largement tenu compte de leurs critiques et suggestions; qu'ils veuillent bien accepter ici mes remerciements.

Enfin, ma gratitude va à la Commission Suisse pour l'Energie Atomique qui s'est matériellement intéressée à mes recherches.

Genève, Institut de Physique de l'Université.
Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université.

## BIBLIOGRAPHIE.

0) E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **11**, 3, 221 (1938) (éq. 5. 3.).
1) E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **18**, 1, 21 (1945).
2) E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **18**, 3, 195 (1945).
3) E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **19**, 4, 241 (1946).
4) E. C. G. STUECKELBERG, Physical Society Cambridge Conf. Report p. 199 (1947).
5) Q. MAJORANA, Nuov. Cim. (1931).
6) W. PAULI, Ann. Inst. Poincaré **6** (1936).
7) TOMONAGA, Process in Theoretical Physics **1** (1946).
8) PAYS, Phys. Rev. (1947).
9) D. RIVIER and E. C. G. STUECKELBERG, Phys. Rev. **74**, 2, 218 (1948).

*) On peut remarquer qu'il subsiste un arbitraire dans la valeur de $D^s(x)$ au point $x = 0$ (cf. 11.1).

## APPENDICE.

### Notations, formules et définitions.

### I. *Groupe de Lorentz continu.*

Notations: $x^\alpha = (\vec{x}, x^4 = t)$ $(x, y) = x_\alpha y^\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta y^\alpha$; $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$;
$\partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta$.

Tenseur fondamental: $g^{\alpha\beta} = g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{44} = 1$; $g^{\alpha\beta} = 0 \; \alpha \neq \beta$.

Transformations de coordonnées:

identique: $x^{*\mu} = \delta^\mu_{\ \nu} x^\nu = \boldsymbol{\varphi}(0) x^\mu = \mathbf{1}\, x^\mu$

infinitésimale: $x^{*\mu} = \delta a^\mu + (\delta^\mu_{\ \nu} - \delta \psi^\mu_{\ \nu}) x^\nu = \boldsymbol{\varphi}(\delta a^\mu, \delta \psi^\mu_{\ \nu}) x^\nu = \varphi(x)$

finie: $x^{*\mu} = a^\mu + a^\mu_{\ \nu} x^\nu = \boldsymbol{\varphi}(a^\mu, \psi^\mu_{\ \nu}) x^\nu$.

Opérateurs correspondants:

identique: $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{1}$

infinitésimal: $\varphi(\delta \tau^i) = \mathbf{1} - \sum\limits_1^{10} \boldsymbol{P}_{(i)} \cdot \delta \tau^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}(\delta a^\mu, \delta \psi^\mu_{\ \nu}) = \mathbf{1}$
$- i \boldsymbol{p}_\mu \delta a^\mu - \dfrac{i}{2} \boldsymbol{M}_\mu^{\ \nu} \delta \psi^\mu_{\ \nu}$

fini: $\boldsymbol{\varphi}(\tau^i) = \boldsymbol{\varphi}(a_\mu, \psi^\mu_{\ \nu})$; $\psi^\mu_{\ \nu} = -\alpha^\mu_{\ \nu} + \delta^\mu_{\ \nu}$.

Relations de LIE entre les générateurs

$i[\boldsymbol{p}_\mu, \boldsymbol{p}_\nu] = 0$ (I.1)

$i[\boldsymbol{M}_{\lambda\mu}, \boldsymbol{M}_{\nu\varrho}] = g_{\lambda\varrho} \boldsymbol{M}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \boldsymbol{M}_{\lambda\varrho} - g_{\lambda\nu} \boldsymbol{M}_{\mu\varrho} - g_{\mu\varrho} \boldsymbol{M}_{\lambda\nu}$ (I.2)

$i[\boldsymbol{p}_\lambda, \boldsymbol{M}_{\mu\nu}] = g_{\lambda\mu} \boldsymbol{p}_\nu - g_{\lambda\nu} \boldsymbol{p}_\mu$ (I.3)

Autres commutateurs:

$i[\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta] = g_{\alpha\beta} \mathbf{1}$ (I.4)

$i[\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{x}_\gamma] = g_{\beta\gamma} \boldsymbol{x}_\alpha - g_{\alpha\gamma} \boldsymbol{x}_\beta$ (I.5)

Expressions des générateurs

$\boldsymbol{p}_\alpha = \dfrac{1}{i} \boldsymbol{\partial}_\alpha$ (I.6)

$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{L}_{\alpha\beta} + \boldsymbol{S}_{\alpha\beta}$ avec $\boldsymbol{L}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{p}_\beta - \boldsymbol{x}_\beta \boldsymbol{p}_\alpha$ (I.7)

Représentations de $\boldsymbol{S}_{\alpha\beta}$

appliqué sur un scalaire $\boldsymbol{S}_{\alpha\beta} u = 0$ (I.8)

un vecteur $\boldsymbol{S}_{\alpha\beta} t^\mu = S_{\alpha\beta\ \nu}^{\ \ \ \mu} t^\nu$; $S_{\alpha\beta\ \nu}^{\ \ \ \mu} = \dfrac{1}{i} (g_{\alpha\nu} \delta^\mu_\beta - g_{\beta\nu} \delta^\mu_\alpha)$ (I.9)

un spineur $\boldsymbol{S}_{\alpha\beta} u^A = S_{\alpha\beta\ B}^{\ \ \ A} u^B$; $S_{\alpha\beta\ B}^{\ \ \ A} = -\dfrac{i}{4} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_{-\ B}^{\ \ A}$ (I.10)

## II. *Fonctions particulières.*

$$\theta^{+}(z) = \begin{cases} 1 & z > 1 \\ 0 & z < 1 \end{cases} \tag{II.1}$$

$$\theta^{-}(z) = \theta^{+}(-z). \tag{II.2}$$

$$\theta^{+}(z) + \theta^{-}(z) = 1 \tag{II.3}$$

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} +1 & z > 1 \\ -1 & z < 1 \end{cases} \qquad \varepsilon(z) = \frac{|z|}{z} = \theta^{+}(z) - \theta^{-}(z) \tag{II.4}$$

$$\delta(z) = \frac{\partial}{\partial z}\,\theta^{+}(z) \tag{II.5}$$

$$\delta(z) = 0 \text{ pour } z \neq 0; \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz\,\delta(z) = 1 \qquad z\,\delta(z) = 0 \tag{II.6}$$

$$\delta_{\pm}(z) = \frac{1}{2}\left[\delta(z) \mp \frac{1}{i\pi z}\right] \qquad \delta_{+}(z) + \delta_{-}(z) = \delta(z) \tag{II.7}$$

$$\delta(x) = \prod_{1}^{4} \delta(x^{\alpha}); \tag{II.8}$$

$$\delta_{\alpha}(x) = \partial_{\alpha}\,\delta(x) \tag{II.9}$$

$$\delta'(z) = \frac{\partial}{\partial z}\,\delta(z) = -\frac{\delta(z)}{z} + A\,\delta(z); \quad A \text{ arbitraire} \tag{II.10}$$

## III. *Les fonctions* $D_{\varkappa}(x)$.

### a) *Dans l'espace temps x.*

Notations $\square = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}$, $(x, x) = R^2 = -T^2 = r^2 - t^2$; $r = |\vec{x}\,|$ (III.1)

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} D(x''/x') = D_{;\alpha'}(x''/x'); \quad \frac{\partial}{\partial x^{\alpha''}} D(x''/x') = D_{;\alpha''}(x''/x');$$

$$D(x''/x') = D(x'' - x') \tag{III.2}$$

*Fonctions homogènes* $D^{\text{hom}}$: $D^0, D^1, D^+, D^-$;

Equation différentielle $(\square - \varkappa^2)\,D^{\text{hom}} = 0$ (III.3)

Définitions et propriétés:

$D^0(x) = -D^0(-x)$; $\int_{\tau(x)} d\sigma^{\alpha}\,\partial_{\alpha} D^0(x) = 1$ $\tau(x)$ hypersurface telle que $\tau(0) = 0$ (III.4)

$$D^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } R^2 > 0 \\ +\varepsilon(t)\,\dfrac{1}{4\pi}\,\dfrac{1}{r}\,\delta(r - |t|) & \text{pour } R^2 = 0 \\ -\varepsilon(t)\,\dfrac{1}{4\pi}\,\dfrac{\varkappa}{T}\,J_1(\varkappa T) & \text{pour } R^2 < 0 \end{cases} \tag{III.5}$$

$$D^0(x)\,\delta(x^4) = 0; \quad \partial_4 D(\vec{x}, o) = \delta(\vec{x}) \tag{III.6}$$

$$D^0(x) = \frac{i}{2}\left[D^{+}(x) - D^{-}(x)\right] \tag{III.7}$$

$$D^1(x) = D^1(-x). \qquad 4\pi\varkappa \int_0^\infty dR \cdot R^2 D^1(x) = 1 \tag{III.8}$$

$$D^1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi}\frac{\varkappa}{R} H_1^{(1)}(i\varkappa R) & \text{pour } R^2 > 0 \\ -\infty & \text{pour } \mathrm{R}^2 = 0 \\ +\frac{1}{4\pi}\frac{\varkappa}{T} N_1(\varkappa T) & \text{pour } \mathrm{R}^2 < 0 \end{cases} \tag{III.9}$$

$$D^1(x) = \frac{1}{2}[D^+(x) + D^-(x)] \tag{III.10}$$

$$D^+(x) = D^1(x) + \frac{1}{i} D^0(x) = D^-(-x) = (D^-(x))^+ \tag{III.11}$$

$$D^-(x) = D^1(x) - \frac{1}{i} D^0(x) = D^+(-x) = (D^+(x))^+ \tag{III.12}$$

*Fonctions potentielles* $D^{\text{pot}}$: $D^s, D^{\text{ret}}, D^{\text{av}}, D^c, D^a$

Equation différentielle $(\square - \varkappa^2) D^{\text{pot}} = -\delta(x)$ (III.13)

Définitions et propriétés:

$$D^s(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon(t)\, D^0(x) \tag{III.14}$$

$$D^s(x) = \frac{1}{4\pi}[\delta(T^2) - \frac{1}{2}\theta^+(T^2)\frac{\varkappa}{T} J_1(\varkappa T)] \tag{III.15}$$

$$D^s(-x) = D^s(x) \tag{III.16}$$

$$D^{\text{ret}}(x) = D^s(x) + \frac{1}{2} D^0(x) = \theta^+(t)\, D^0(x) \tag{III.17}$$

$$D^{\text{av}}(x) = D^s(x) - \frac{1}{2} D^0(x) = -\theta^-(t)\, D^0(x) \tag{III.18}$$

$$D^c(x) = D^s(x) + \frac{i}{2} D^1(x) = \frac{i}{2}[\theta^+(x^4) D^+(x) + \theta^-(x^4) D^-(x)] \tag{III.19}$$

$$D^a(x) = D^s(x) - \frac{i}{2} D^1(x) = \frac{i}{2}[\theta^+(x^4) D^-(x) + \theta^-(x^4) D^+(x)] \tag{III.20}$$

$$D^c(x) - i\,D^1(x) - D^a(x) = 0 \tag{III.21}$$

$$D^c(-x) = D^c(x);\ D^a(-x) = D^a(x);\ (D^c(x))^+ = D^a(x) \tag{III.22}$$

$$D^{\overset{c}{a}}_{;\alpha}(x) = \pm\frac{i}{2}[\theta^+(x^4)\, D^{\pm}_{;\alpha}(x) + \theta^-(x^4)\, D^{\mp}_{;\alpha}(x)]; \tag{III.23}$$

$$D^{\overset{c}{a}}_{;\alpha\beta}(x) = \pm\frac{i}{2}[\theta^+(x^4)\, D^{\pm}_{;\alpha\beta}(x) + \theta^-(x^4)\, D^{\mp}_{;\alpha\beta}(x)] + \delta^4_\alpha \delta^4_\beta\, \delta(x) \tag{III.24}$$

b) *Représentation dans l'espace de Fourier à 3 dimensions.*

$$D^0(x) = (2\pi)^{-3}\frac{i}{2}\int d\,V(\vec{k})\,[e^{+i(k,x)} - e^{-i(k,x)}] \tag{III.25}$$

$$D^1(x) = (2\pi)^{-3}\frac{1}{2}\int d\,V(\vec{k})\,[e^{+i(k,x)} + e^{-i(k,x)}] \tag{III.26}$$

$$D^+(x) = (2\pi)^{-3}\int d\,V(\vec{k})\, e^{+i(kx)} \tag{III.27}$$

$$D^{-}(x) = (2\pi)^{-3} \int d\,V(\vec{k})\, e^{i(kx)} \tag{III.28}$$

$$\delta_{\pm}(z) = (2\pi)^{-1} \int_{0}^{\infty} d\,k\, e^{\pm i k z} \qquad \delta(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\,k\, e^{\pm i k z} \tag{III.29}$$

c) *Représentation dans l'espace de Fourier à 4 dimensions.*

$$D(x) = (2\pi)^{-2} \int (d\,p)^4\, e^{i(px)}\, \Delta(p) \tag{III.30}$$

$$\Delta^0(p) = \frac{i}{2\pi}\, \varepsilon(p^4)\, \delta((p,p) + \varkappa^2) \tag{III.31}$$

$$\Delta^1(p) = \frac{1}{2\pi}\, \delta((p,p) + \varkappa^2) \tag{III.32}$$

$$\Delta^s(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\, \frac{1}{(pp) + \varkappa^2} \tag{III.33}$$

$$\Delta^{\pm}(p) = \frac{\theta^{\pm}(p^4)}{\pi}\, \delta((p,p) + \varkappa^2) \tag{III.34}$$

$$\Delta^{\substack{\text{ret}\\ \text{av}}}(p) = \pm\, \varepsilon(p^4)\, \frac{i}{2\pi}\, \delta_{\pm}[\varepsilon(p^4)\, ((p\,p) + \varkappa^2)] \tag{III.35}$$

$$\Delta^{\substack{c\\ a}}(p) = \pm\, \frac{i}{2\pi}\, \delta_{\mp}((p,p) + \varkappa^2) \tag{III.36}$$

d) *Les fonctions $D(x)$ spinorielles.*

Les matrices $(\gamma^\alpha)$ $\alpha = 1, 2, 3, 4$

$\gamma^{\alpha A}{}_B \qquad A, B = 1, 2, 3, 4$

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]_+ = \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\, g^{\alpha\beta} \qquad (\gamma^\alpha)^+ = \gamma^\alpha \tag{III.37}$$

représentation réelle de Majorana (5) $(\gamma^\alpha)^+ = (\gamma^\alpha)^{\sim}$ (III.38)

$$\xi_{AB} = \xi^{AB} = -\gamma^{4A}{}_B. \tag{III.39}$$

$$\gamma^{\alpha AB} = \gamma^{\alpha A}{}_{A'}\, \xi^{A'B} \qquad \gamma^{\alpha}{}_{AB} = \xi_{AA'}\, \gamma^{\alpha A'}{}_B \tag{III.40}$$

$$D^{\sigma A''}{}_{A'}(x''/x') = (\gamma, \partial'' - \varkappa)^{A''}{}_{A'}\, D^\sigma(x''/x'); \; (\gamma, \partial'') = \gamma^\alpha \partial''_{\alpha''} \cdot$$
$$\sigma = 0, 1, \pm\, s, \substack{\text{ret}\\ \text{av}}, \substack{a\\ c}. \tag{III.41}$$

$$D^{-A''A'}(x''/x') = -D^{+A'A''}(x'/x'') \tag{III.42}$$

$$D^{1A''A'}(x''/x') = -D^{1A'A''}(x'/x'') \tag{III.43}$$

$$D^{0A''A'}(x''/x') = D^{0A'A''}(x'/x'') \tag{III.44}$$

$$(\gamma, \partial + \varkappa)^A{}_B\, D^{\text{hom}\,B}{}_{A'}(x) = 0 \quad (\gamma, \partial + \varkappa)^A{}_B\, D^{\text{pot}\,B}{}_{A'}(x) = -\delta(x)\, \delta^A{}_{A'} \tag{III.45}$$

$$D^{s\,A''A'}(x''/x') = -D^{s\,A'A''}(x'/x'') \tag{III.46}$$

$$(D^{cA''A'}(x''/x'))^+ = -D^{a\,A''A'}(x'/x'') \tag{III.47}$$