Zur gleichartigen Wirksamkeit der Postulate von Statistik und Relativität in der Quantentheorie

Autor(en): **Keberle, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **22 (1949)**

Heft VI

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112020

Zur gleichartigen Wirksamkeit der Postulate von Statistik und Relativität in der Quantentheorie

von **E. Keberle.**

(23. VIII. 1949.)

§ 1. Einleitung.

Die Schwierigkeiten, in welche die Quantentheorie unmittelbar nach ihrer Entdeckung geraten ist, waren Gegenstand verschiedenster Unternehmungen, mit dem Ziele, mittelst mathematischer Ansätze innerhalb der gegebenen physikalischen Schematas ihre Beseitigung zu erreichen. Der gesamthaft ungünstige Verlauf dieser Versuche führte uns zur Arbeitshypothese, dass diese Schwierigkeiten ihren Grund in der *Existenz einer allgemeinen Beziehung unter den Postulaten der Physik* haben. Dabei verstehen wir unter Postulaten die nicht direkt experimentell kontrollierbaren Annahmen der Physik. Es sind dies das Postulat der Statistik (Gleichwahrscheinlichkeit nicht entarteter Quantenzustände bzw. Phasenraumzellen) und das Postulat der Relativität (Gleichberechtigung aller Lorentzsysteme). Beide Postulate erfüllen das Prinzip vom mangelnden Grunde, welches dort zur Anwendung gelangt, wo eine Spekulation auf ein Absolutes sich als Irrtum erwies (thermodynamischer Körper als rein mechanisches System; absoluter Äther).

Gemeinsamkeiten dieser Art (Nichtkontrollierbarkeit; Prinzip vom mangelnden Grunde) unter den Postulaten sind vielleicht kein Zufall und führen zur Vermutung, dass den beiden Postulaten eine physikalische gegenseitige Bedingtheit und Abhängigkeit zugrunde liegt. Obwohl einerseits die Tendenz oft anzutreffen ist, Forderungen an die rationelle und an die statistisch-thermodynamische Theorie als voneinander völlig unabhängige Dinge zu betrachten, kann andererseits die bekannte eigenartige Vereinbarkeit des relativistischen Postulates mit der statistischen Thermodynamik gerade so gut als Stütze unserer Vermutung angesehen werden. Indem wir diese Vermutung, deren Inhalt wir im folgenden als *Postulatenprinzip* bezeichnen, zur Voraussetzung erheben, gewinnen wir die Er-

*

klärung für allgemeine eigenartige Sachverhalte, wie die Existenz zweier Quantentheorien (Matrix- und Wellenmechanik) und der anfangs genannten Schwierigkeiten, um nur einige bereits hier zu nennen. Die in der Folge diskutierten Sachverhalte lassen sich in zwei Kategorien einteilen. In der einen erfolgt der Gebrauch der Postulate nebeneinander (§ 2, 3, 5), wobei je die gleichen Resultate erhalten werden (Verträglichkeit der Postulate), in der andern dagegen erfolgt der Gebrauch hintereinander oder zugleich an demselben Objekt (§ 4, 6, 7), was infolge der Abhängigkeit der Postulate zu unbefriedigenden Situationen und Schwierigkeiten Anlass gibt.

§ 2. Quantisierung.

Die Begründung der Quantisierung kann theoretisch auf zweierlei Arten erfolgen, welche auf dem statistischen bzw. relativistischen Postulat beruhen.

a) *Statistisch-thermodynamische Begründung.* Sie wird ermöglicht durch den unmittelbaren Zusammenhang der diskreten Quantenzahlen mit den Zellenindexen des statistisch-thermodynamischen Abzählformalismus. Dieser Zusammenhang liefert, falls noch das Postulat der Statistik herbeigezogen wird, bereits die richtige Energiequantisierung des harmonischen Oscillators, wie kurz dargelegt werde (für nichtharmonische Systeme vgl. § 3).

Für Gleichgewicht liefert der genannte Formalismus bekanntlich die Verteilungsfunktion

$$f(a, T) = \sum_l G_l \cdot e^{-\frac{E_l(a)}{kT}} .$$

Einzig eine diskrete Wahl der Gewichte G_l (l = Zellenindex) ist in der Lage, den gegenüber der klassischen Denkweise neuartigen Begriff der endlichen Zelle in dieser Formel auszudrücken. Für die explicite Wahl der diskreten Gewichte besteht nur ein Hinweis, welcher sich aus einem Satz für allerdings kontinuierliche Gewichte ergibt, der sich zudem nur auf unendliche Zeitintervalle bezieht. Für ergodische Systeme gilt nämlich, dass das Gewicht einer Phasenraumzelle proportional ihrem (beliebigen) Volumen ist. Die Einschränkung der Gültigkeit für nur unendliche Zeitintervalle folgt aus der Tatsache, dass der thermodynamische Körper nur durch ergodische Systeme mit einem einzigen beobachtbaren Integral der Bewegung dargestellt werden kann, da sonst kein mechanischer, adiabatisch invarianter Ausdruck für das totale Entropiedifferential möglich wäre.

In grundsätzlicher Ermangelung von Bestimmungsstücken zur Wahl diskreter G_l führt man das Prinzip vom mangelnden Grunde, im vorliegenden Falle das statistische Postulat ein, welches zwangsläufig die folgende a priori-Festsetzung gibt: „Alle Zellen sind gleich gross, jede Zelle hat gleiches Gewicht, das Gewicht ist dem Rand- oder Mittelwert der Zelle zu geben.“

In Anwendung auf den harmonischen Oscillator liefert dies:

$$G_n = \begin{cases} 1 & \dfrac{E}{\nu} = \begin{cases} 0, & h, \quad 2h, \ldots \quad nh. \quad \text{(Rand)} \\ \tfrac{1}{2}h, & (1+\tfrac{1}{2})h, \quad (2+\tfrac{1}{2})h, \ldots (n+\tfrac{1}{2})h. \quad \text{(Mittel)} \end{cases} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit der exakten Quantentheorie[1]), wobei die Grösse h der Zellen experimentell zu bestimmen bleibt. Mit dem Phasenvolumen $\frac{E}{\nu}$ ist h und die Quantenzahl n samt G_n adiabatisch invariant.

b) *Relativistisch-dualistische Begründung.* Die seit Newton gesuchte Zuordnung zwischen Wellen- und Korpuskeleigenschaften konnte theoretisch erst mit dem relativistischen Postulat begründet werden. Betrachtet man Impuls $\vec{p}$ und Energie E als Funktion des Wellenvektors $\vec{k}$ und der Frequenz ν, so ergibt das relativistische Postulat als einfachste Zuordnung

$$\vec{p} = h\vec{k}; \quad E = h\nu \tag{R}$$

mit dem (experimentell zu bestimmenden) Skalar h als Proportionalitätskonstante, da die Grössen rechter und linker Hand Vierervektoren bilden. Diese Zuordnung liefert, wie de Broglie zeigte, die Gleichheit der Partikelgeschwindigkeit $v_i = \frac{\partial E}{\partial p_i}$ mit der Gruppengeschwindigkeit $\overline{v}_i = \frac{\partial \nu}{\partial k_i}$ der Wellen.

Die Universalität von h ergibt sich aus $E = h\nu$, falls mittelst des relativistischen Postulates, in gleicher Weise wie dies in § 5 näher diskutiert ist, die Forderung gestellt wird, dass die Beträge von E und ν, wenn sie in einem Lorentzsystem vorkommen, auch in beliebig anderen Systemen vorkommen müssen. Für ruhendes und bewegtes System beispielsweise führt dies zu den Gleichungen:

$$m_0^{(1)} \cdot c^2 = h\nu \qquad \frac{m_0^{(2)} \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = h\nu$$

woraus gleiches h für verschiedene Ruhemassen $m_0^{(1)}$, $m_0^{(2)}$ folgt.

Aus den Welleneigenschaften der Massenpunkte folgt für freie Teilchen in abgeschlossenem Volumen (für beliebige Kraftfelder vgl. § 3 b) in Ermangelung weiterer Anhaltspunkte die Zuordnung einer harmonischen Welle, welche in bekannter Weise die Quantisierung der Energie und die relativistische Invarianz der Quantenzahlen ergibt.

§ 3. Matrix- und Wellenmechanik.

a) *Matrixmechanik.* Beim nichtharmonischen Oscillator führte die Quantisierungsvorschrift von § 2a, im Widerspruch zum Prinzip vom mangelnden Grunde zu Asymmetrien, bestehend in den durch das Korrespondenzprinzip ausgesprochenen Diskrepanzen für niedere Quantenzahlen zwischen den klassischen Bewegungsfrequenzen und den Frequenzen der harmonischen Lichtoscillatoren $\nu_{nm} = (E_n - E_m)/h$ wie sie aus § 2a folgen. Eine Symmetrisierung gelang bekanntlich mittelst einer Durchdringung dieser asymmetrischen Situation durch Beibehaltung der Frequenzen des einmal als symmetrisch erkannten Falls des harmonischen Oscillators und Sinnloserklärung der klassischen Frequenzen. Die hieraus folgende Verselbständigung der Fourierkoeffizienten, lieferte mittelst des Korrespondenzprinzips die Übersetzung der Poissonklammer zum Kommutator. Hieraus folgt die dem Prinzip vom mangelnden Grunde Rechnung tragende Bestimmung der — gleiches statistisch-thermodynamisches Gewicht tragenden — Energieterme als Funktion von n und h (Matrixmechanik), welche für steigende Harmonizität (hohe n) asymtotisch, in die aus der Forderung gleich grosser Zellen erhaltenen Terme, übergeht.

b) *Wellenmechanik.* Der Ersatz der harmonischen Eigenschwingungen (§ 2b) zur Berechnung der Energieterme eines Partikels in einem Kraftfeld gestützt auf die Zuordnung (R), gelang durch Übersetzung der Hamilton'schen Funktion, in Analogie zum Korrespondenzprinzip, zum Hamilton'schen Operator und entsprechender

Bildung einer Eigenwertgleichung (Wellenmechanik). Bei diesem Verfahren bleiben die Ausführungen von § 2b vollständig in Kraft.

Die in § 3a, b nötige Einführung des Korrespondenzprinzips bedeutet, dass man angelehnt an die Idealfälle des § 2, die allgemeinen Fälle des § 3 mittelst des kanonischen Formalismus definiert. Dadurch ist der Anschluss an die klassische Mechanik automatisch gegeben.

* * *

Damit haben wir die eigentümliche Existenz zweier Quantentheorien als Folge des Postulatenprinzips erklärt. Die beiden Quantentheorien lassen sich nur durch formale Einführung singulärer Gebilde auf ein einheitliches Schema zurückführen (Transformationstheorie), da sie in mathematisch legitimer Weise nur *isomorph* zueinander sind (von Neumann), trotzdem sie dieselben Endresultate liefern[2]). Diese Isomorphie und die Gleichheit der physikalischen Resultate entspricht in schönster Weise dem Postulatenprinzip, indem sich darin wiederspiegelt, dass die Postulate von Statistik und Relativität nicht identische Realisierungen des — physikalische Bedeutung besitzenden — Prinzipes vom mangelnden Grunde sind. Die formale Einführung singulärer Gebilde entspricht dem Versuch, die beiden Postulate von Statistik und Relativität auf ein einziges Postulat zurückzuführen.

§ 4. Kanonischer Formalismus.

An den beiden Vierervektoren (x, y, z, t) und (p_x, p_y, p_z, E) fällt auf, dass nur je die ersten drei Komponenten ein kanonisch konjugiertes Paar bilden, nicht aber Zeit und Energie[9]). Wie wir zeigen werden, ist es für die Existenz der statistischen Thermodynamik notwendig, dass Zeit und Energie kein kanonisch konjugiertes Paar bilden. Der dadurch erzeugte, im Hinblick auf das relativistische Postulat unbefriedigende Sachverhalt, wird erklärt durch das Postulatenprinzip, da er aus der gleichzeitigen Präsenz der Postulate von Statistik und Relativität an demselben Objekt (den beiden Vierervektoren) resultiert. Die beiden Postulate könnten miteinander nicht in Konflikt geraten, wenn sie völlig unabhängig voneinander wären.

Der Nachweis, dass aus der Existenz einer statistischen Thermodynamik die Notwendigkeit folgt dass Zeit und Energie nicht kanonisch konjugiert sind, wird durch korrespondenzmässigen Umweg, mittelst Gegenannahme, über die Quantentheorie erbracht.

Wären Zeit und Energie kanonisch konjugiert, so müssten infolge des Korrespondenzprinzips die beiden Grössen in der Quantentheorie einen von Null verschiedenen Kommutator besitzen, woraus folgen würde, dass das Energiespektrum immer kontinuierlich wäre[3a]) und somit nie ein Adiabatensatz bestehen könnte[4]). Durch korrespondenzmässigen Rückgang auf die klassische Theorie würde hieraus folgen, dass die klassischen Systeme keine adiabatischen Invarianten besitzen[5a]). Weder mit Quantensystemen mit kontinuierlichem Energiespektrum noch ihrem klassischen Analogon (keine adiabatischen Invarianten) ist jemals statistische Mechanik getrieben worden, da die Entropie in beiden Fällen nicht als adiabatische Invariante dargestellt werden kann (die Gewichtsfunktion G_l in § 2a muss adiabatisch invariant sein[6]).

Eine Konsequenz des (relativistischen Forderungen zuwiderlaufenden) kanonischen Schemas der Quantentheorie ist, dass es nicht erlaubt, eine Unschärfe zwischen Zeit und Energie herzuleiten (infolge Fehlens eines entsprechenden Kommutators), aus welcher Tatsache die Möglichkeit der Existenz stationärer Zustände folgt (vgl. oben). Das Auftreten einer Relation der Form $\Delta t \cdot \Delta E \lesseqgtr h$ ist eine ganz andere Folge der zeitabhängigen Bewegungsgleichung mit (variablem) äusserem Parameter*), wobei die Existenz stationärer Zustände bereits vorausgesetzt ist. Die Relation stellt eine Trennbedingung dar (gebraucht z. B. bei der Molekularstrahlmethode), und erlaubt einen adiabatischen ($>$) von einem nichtadiabatischen ($<$) quantentheoretischen Prozess zu unterscheiden[5b]). Diese beiden Prozesse bilden die Grundlage[3b]) der experimentellen Kontrolle der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsaussage der Quantentheorie, welche sich (im Widerspruch zum relativistischen Postulat) auf einen Zeitpunkt bezieht.

§ 5. Das Wien'sche Verschiebungsgesetz.

Dieses vor der Quantentheorie bestehende, aber durch sie nicht modifizierte Gesetz, kann auf zweierlei Arten hergeleitet werden, da sowohl ein adiabatischer Prozess wie ein Wechsel des Bezugssystems Energie E und Frequenz ν von Strahlung unter Erhaltung der Entropie ($dS = 0$) ändern. Da $\frac{\nu}{T}$ und $\frac{u_\nu}{\nu^3}$ sowohl adiabatische wie auch relativitische Invarianten sind, folgt je $u_\nu(T) = \nu^3 \cdot f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Die

*) In einer uns nicht zugänglichen Arbeit von Mandelstam-Tamm scheint dies ebenfalls bemerkt worden zu sein[7]).

reale Bedeutung dieser Herleitungen beruht darauf, dass sich Strahlung gegenseitig nicht stösst. Daher sind die beiden Herleitungen eine (nicht auf einer Unordnungshypothese beruhende) thermodynamische Anwendung der Tatsache, dass E/ν sowohl eine adiabatische wie auch eine relativistische Invariante ist. Deshalb können die beiden Herleitungen als Vorläufer der auf dem Postulatenprinzip beruhenden, in § 2 betrachteten Doppelspurigkeit des Beweises von $E/\nu = h$ angesehen werden.

Es sei noch erwähnt, dass bei der relativistischen Herleitung des Verschiebungsgesetzes die Lorentztransformation in ganz anderer Weise als etwa bei der Transformation der Maxwell'schen Gleichungen (Kovarianz) verwendet wird. Durch Lorentztransformation werden z. B. ν und T geändert und hieraus die gewonnene Aussage postulativ für das untransformierte System (aber transformiertes ν und T) als gültig erklärt. Dieser gedankliche Übergang ist experimentell direkt nicht kontrollierbar, da es nicht gelingt, ν und T mittelst Lorentztransformation so zu ändern, dass das Bezugssystem vor und nach der Transformation im gleichen Bewegungszustand ist. Eine ähnliche Verwendung der Lorentztransformation findet sich beim Nachweis der Universalität von h in § 2b.

§ 6. Partikelumwandlungen.

Für den Effekt des Verschwindens und Entstehens von Teilchen, welcher auf dem relativistisch-mechanischen Satz von der Äquivalenz von Masse und Energie beruht, bestehen in der Quantentheorie zwei Formulierungen, welche mit (a) dem Dualismus (Partikel) bzw. (b) der statistischen Thermodynamik (Oscillatoren) in unmittelbarem Zusammenhang stehen und deren zweifaches Auftreten daher auf dem Postulatenprinzip beruht.

a) Eine relativistische Wellengleichung bildet im Gegensatz zu einer nichtrelativistischen kein Einkörperproblem, da sich aus den ihr gehorchenden Wellenfunktionen, keine den relativistischen Invarianzforderungen genügenden Ausdrücke, die als statistisch-räumliche Teilchendichte interpretiert werden können, bilden lassen.

b) Die zweite Formulierung geht aus vom sogenannten quantentheoretischen Mehrkörperproblem freier Partikel mit gegebener Teilchenzahl (Konfigurationsraummethode), welche gestützt auf die Äquivalenz einer Gesamtheit von Bose- (bzw. Fermi)-Teilchen mit einer Gesamtheit von Oscillatoren (bzw. Quasioscillatoren), auf eine von der Teilchenzahl unabhängige Darstellung gebracht werden kann. Einem Oscillator und seiner Quantenzahl entspricht nach der genannten Äquivalenz ein Teilchenzustand und die darin enthaltene Teilchenanzahl. Die Möglichkeit zu einer von der Teilchenanzahl unabhängigen Darstellung beruht somit auf der statistisch-thermodynamischen Begründung der Oscillatorquantisierung, welche den Teilchenbegriff nicht benützt, und der daraus folgenden Matrixmechanik (§ 2a, 3a). Da diese Begründung nur für einen Oscillator gegebener Frequenz (ein Teilchenzustand) möglich ist, kann die Eigenschaft der Teilchenerhaltung bzw. deren Umwandlung bei der Oscillatormethode nur in der statistisch-thermodynamischen Nebenbedingung $N = \text{const}$ (N: Teilchenanzahl) bzw. deren Weglassung ausgedrückt werden, was für Gleichgewicht zu den entsprechenden mittleren Quantenzahlen führt[5c]):

$$n_\nu = \frac{1}{e^{a(T) + \frac{h\nu}{kT}} \mp 1}; \qquad n_\nu = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} \mp 1}.$$

Dieses statistisch-thermodynamische Kriterium der Partikelumwandlung kann durch ein rein quantentheoretisches ersetzt werden*) indem die Einbeziehung von allen beteiligten Oscillatoren in einen Formalismus möglich ist, da die Gesamtheit der quantisierten Oscillatoren einem quantisierten Wellenfelde entspricht (Methode der zweiten Quantisierung). In dieser Theorie wird die Anzahl der Teilchen eine Matrix $\boldsymbol{N}$ und es liegen dann die Effekte des Verschwindens und Entstehens von Teilchen vor, wenn $\boldsymbol{N}$ mit anderen beobachtbaren Grössen nicht vertauschbar ist.

§ 7. Selbstenergieschwierigkeit des Elektrons.

Den Ausgangspunkt der Methode der zweiten Quantisierung bildet die mechanische Relation zwischen Energie und Impuls, aus welcher zunächst mittelst der aus dem relativistischen Postulat erhaltenen dualistischen Zuordnung nach § 2b, 3b eine Wellengleichung gewonnen und auf diese das auf dem statistischen Postulat beruhende matrizentheoretische Verfahren (§ 6b) angewandt wird.

Da infolge des Postulatenprinzips eine Abhängigkeit unter den beiden Prozessen besteht, muss gefordert werden, dass ihre doppelte, hintereinanderfolgende Anwendung einen nicht beobacht-

*) Vgl. den analogen Sachverhalt bei dem mit dem Partikelbegriff eng zusammenhängenden mittleren Schwankungsquadrat, z. B. in [5]), S. 218.

baren Effekt in die Theorie einführt (beispielsweise wird die Formulierung des Verschwindens und Entstehens von Teilchen durch die beiden Prozesse zweimal eingeführt). Da andererseits gerade durch die Theorie der zweiten Quantisierung die bekannten Schwierigkeiten auftreten, welche zudem auch in theoretisch erhaltenen, in der Natur aber nicht auffindbaren Effekten (unendliche Selbstenergie, Polarisation des Vakuums) bestehen, ergibt sich von selbst die Identifizierung der infolge des Postulatenprinzips geforderten und der wirklich bestehenden unbeobachtbaren Effekte.

Da die Schwierigkeiten somit auf Grund des Postulatenprinzips eine Folge der auf den Postulaten von Statistik und Relativität beruhenden Quantentheorie sind, ergibt sich notwendig, dass die Beseitigungsversuche eine Zerstörung mindestens eines der Postulate bzw. des daraus folgenden Schemas ergeben müssen, wodurch die Doppelwirksamkeit aufgehoben wird. In der Tat gerät die Theorie durch das sogenannte Abschneideverfahren ausserhalb des relativistischen Postulates, oder die Bildung nichtlinearer Wellengleichungen unter Wahrung der Lorentzinvarianz verhindert eine Durchführung der Quantisierung. Ein neuerer Vorschlag (S-Matrix-Methode) schaltet, unter Wahrung des relativistischen Postulates, den kanonischen Formalismus aus, muss aber wie aus § 4 folgt, bei der Bestimmung stationärer Zustände in Schwierigkeiten geraten, was in der Tat zutrifft (vgl. die Notwendigkeit des kanonischen Formalismus für die Quantentheorie in § 3).

§ 8. Die Spin-Statistik-Beziehung[8]).

Teilchen mit Bose-Einstein Statistik werden durch Tensor-, solche mit Fermi-Dirac-Statistik durch Spinorfelder (gegenüber Lorentztransformationen) beschrieben. Erstere sind nach dem Plus- und letztere nach dem Minus-Klammersymbol zu quantisieren. Die Existenz der beiden Kriterien zur Angabe der Statistik eines Teilchens beruht auf dem Postulatenprinzip, denn die Angabe des Feldtypus bzw. des Klammersymbols ist von relativistisch-dualistisch bzw. matrizentheoretischer Art.

Herrn Prof. Dr. A. Mercier sei für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, bestens gedankt. Ebenso für seine wohlwollende Hilfe anlässlich der Schwierigkeiten einer Studienreise nach England.

Seminar für theoretische Physik der Universität Bern.

Literaturverzeichnis.

[1]) W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, 2. Ed. (1944), S. 59, 60.

[2]) J. v. NEUMANN, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1932, S. 17.

[3]) W. PAULI, Handbuch der Physik, Bd. 24, 1. Teil, 2. Aufl. (1933); a) S. 140 Fussnote; b) S. 164, 165.

[4]) H. A. KRAMERS, Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik, Bd. 1, Leipzig 1933, S. 216.

[5]) P. JORDAN, Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936; a) S. 90; b) S. 45; c) S. 198.

[6]) A. SMEKAL, Handbuch der Physik, Bd. 9, Berlin 1926, S. 198.

[7]) MANDELSTAM-TAMM, Acad. Sci., USSR. Journ. Phys., Vol. 9 (1945), S. 249 bis 254. (Referiert in Math. Rev., Vol. 9 (1948), S. 258.)

[8]) W. PAULI, Phys. Rev., Bd. 58 (1940), S. 716.

[9]) A. MERCIER und E. KEBERLE, Archives des sciences, Vol. 2 (1949), S. 186.