Zusammenhang der nicht-lokalen Felder H. Yukawa's mit solchen, die Teilchen mit dem Spin f beschreiben

Autor(en): **Fierz, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **23 (1950)**

Heft IV

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112115

Zusammenhang der nicht-lokalen Felder H. Yukawa's mit solchen, die Teilchen mit dem Spin f beschreiben

von **M. Fierz.**

(22. III. 1950.)

Zusammenfassung: Es wird gezeigt, dass den von H. YUKAWA diskutierten „nicht-lokalen Feldern" eine Superposition von Feldern entspricht, die Teilchen mit dem Spin f zugeordnet werden können. Weiter wird ein Fehler in einer früheren Arbeit des Verfassers berichtigt.

H. YUKAWA[1]) hat ein Feld $U(x_i, r_k)$ betrachtet, das folgenden Gleichungen genügt:

$$\Box_x U = \varkappa^2 U; \qquad (r_i^2 - \lambda^2) U = 0; \qquad r_i \frac{\partial}{\partial x_i} U = 0. \tag{1}$$

Die Variable r_k ist somit ein raumartiger Vektor fester Länge und charakterisiert eine raumartige Richtung.

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen kann wie folgt gewonnen werden. Man gebe eine beliebige Schar $\overline{U}(x_i, r_k)$ von Lösungen der Wellengleichung vor, wobei die r_k als Parameter gelten. Dann ist

$$U(x_i, r_k) = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha\, \overline{U}(x_i + \alpha r_i;\, r_k). \tag{2}$$

YUKAWA hat gezeigt, dass die Lösungen U folgendermassen nach FOURIER zerlegt werden können:

$$U(x_i, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (d\,k)^4\, e^{ikx}\, \delta(k^2 + \varkappa^2)\, \delta(k_i r^i)\, c(k_i, r_k). \tag{3}$$

Dies entspricht unserer Darstellung (2), denn es gilt

$$\delta(k_i r^i) = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha\, e^{i\alpha k_i r^i}$$

Wegen der Gestalt von (3) ist der Koeffizient $c(k_i, r_k)$ im Ruhesystem von k in bezug auf r_i eine Funktion auf der Kugel mit dem

Radius λ, kann somit nach Kugelfunktionen entwickelt werden. Die Kugelfunktionen definieren und normieren wir wie folgt:

$$Y_{i_1 \cdots i_f}(\vartheta, \varphi) = a\, r^{f+1} \frac{d^f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_f}} \left(\frac{1}{r}\right);$$

$$\int d\omega\, Y_{i_1 \cdots i_f}(\vartheta, \varphi)\, Y_{i_1 \cdots i_f}(\vartheta, \varphi) = 2f + 1^{*}) \tag{4}$$

$$(i_1 \cdots i_f = 1, 2, 3).$$

Im Ruhesystem eines Wellenzahlvektors k_i gilt demnach

$$c(\varkappa, r_i) = \sum_f A^{(f)}_{i_1 \cdots i_f}(\varkappa)\, Y_{i_1 \cdots i_f}(\vartheta, \varphi). \tag{5}$$

Die Koeffizienten $A^{(f)}_{i_1 \cdots i_f}(\varkappa)$ sind symmetrische Tensoren mit verschwindender Spur, deren Indices im Ruhesystem von k nur von 1 bis 3 laufen. Falls man einem Teilchen mit dem Spin f einen Feldtensor $A_{i_1 \cdots i_f}(x)$ zuordnet[2], der symmetrisch ist und dessen Spuren verschwinden, und der weiter den Gleichungen

$$\Box A_{i_1 \cdots i_f} = \varkappa^2 A_{i \cdots i_f}; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} A_{i\, i_2 \cdots i_f} = 0$$

genügt, so kann man seine Fourierkoeffizienten mit demjenigen in (5) identifizieren. Deshalb kann man das Feld $U(x_i, r_l)$ als eine Superposition von derartigen Feldern auffassen[3]).

An Stelle eines Feldes U kann man darum eine Schar von Feldern

$$A^{(f)}_{i_1 \cdots i_f}(\vec{x}); \quad f = 0, 1, 2 \ldots$$

vorgeben.

Die Frage ist nun, wie man diese zu einem Felde U zusammensetzen kann, ohne von der Fourieranalyse Gebrauch zu machen.

Zu diesem Zwecke betrachte ich die symmetrischen Funktionen

$$P_{i_1 \cdots i_f} = \frac{a}{\lambda^f}\, r_{i_1} \cdots r_{i_f}; \quad r_i^2 = \lambda^2$$

wo r_i raumartig sein soll:

$$r_1 = \lambda \cosh\chi \sin\vartheta \cos\varphi, \cdots, \quad r_4 = \lambda \sinh\chi.$$

Die Konstante a normiere man wie folgt:

$$\int Y_{i_1 \cdots i_f} P_{i_1 \cdots i_f}(\vartheta, \varphi, \chi)\, \delta(\sinh\chi)\, d\sinh\chi\, d\omega = 2f + 1.$$

*) Man findet $a^2 = 2^f \dfrac{2f+1}{4\pi(2f)!}$.

Sie ist gleich der Konstanten a in (4). Diese Normierungsbedingung ist Lorentzinvariant; denn sie ist in jedem Bezugssystem erfüllt, falls sie in einem gültig ist. Jetzt gilt einfach

$$U(x_i, r_l) = \frac{1}{2\pi} \sum_f \int d\alpha\, A^{(f)}_{i_1 \ldots i_f}(x_i + \alpha r_i)\, P_{i_1 \ldots i_f}(r_l). \tag{6}$$

Dass diese Formel zutrifft, erkennt man sofort, wenn man sich (6) in bezug auf x nach Fourier zerlegt denkt. Die Fourierkoeffizienten von (6) haben die Form

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_f A^{(f)}_{i_1 \ldots i_f}(k)\, \delta(k^2 + \varkappa^2)\, P_{i_1 \ldots i_f}(r_l) \cdot \delta(k_i r^i)$$

Im Ruhesystem von k laufen die Indices von $A(k)$ nur von 1 bis 3, A hat die Spur 0 und r_4 muss verschwinden. Also ist von $P_{i_1 \ldots i_f}$ nur der Anteil massgebend, der diese Eigenschaften besitzt: man kann also $P_{i_1 \ldots i_f}$ durch $Y_{i_1 \ldots i_f}$ ersetzen, was den Formeln (3) und (5) entspricht.

Die Umkehrung der Formel (6) liefert die Zerlegung von U in bezüglich Lorentztransformationen irreduzible Bestandteile.

Falls man lediglich

$$\int U(x_i, r_l)\, P_{i_1 \ldots i_f}\, d\Omega = B^{(f)}_{i_1 \ldots i_f}(x) \tag{7}$$

bildet, wobei über alle Richtungen von r_l integriert wird, so genügt B wohl den Differentialgleichungen von A. Seine Spuren verschwinden jedoch nicht. B ist also nicht irreduzibel und wir benötigen noch einen Operator, der aus $B^{(f)}$ den irreduziblen Anteil $A^{(f)}$ herauslöst. Diesen bestimmen wir wie folgt:

Wir gehen von den Orthogonalitätsrelationen der dreidimensionalen Kugelfunktionen aus,

$$\int d\omega\, Y_{i_1 \ldots i_f}\, Y_{k_1 \ldots k_f} = D_{i_1 \ldots i_f, k_1 \ldots k_f} \tag{8}$$

und berechnen zuerst den Operator D. Seine Spuren bezüglich eines Indexpaares i oder k müssen verschwinden, er muss symmetrisch sein in den Indices i und in den Indices k und man kann ihn durch δ_{ik}-Operatoren ausdrücken.

Wir machen darum folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} D_{i_1 \ldots i_f, k_1 \ldots k_f} &= \sum_{l=0}^{[f/2]} c_l\, D^{(l)}_{i_1 \ldots i_f, k_1 \ldots k_f} \\ D^{(l)}_{i, k} &= \sum_{(i,k)} \delta_{i_1 i_2} \ldots \delta_{i_{2l-1}, i_{2l}} \cdot \delta_{k_1 k_2} \ldots \delta_{k_{2l-1} k_{2l}} \cdot \delta_{i_{2l+1} k_{2l+1}} \ldots \delta_{i_f k_f} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die $\sum\limits_{(i,k)}$ bedeutet die Summe über alle Permutationen der Indices i und der Indices k. $[f/2]$ ist die grösste ganze Zahl $n \leqslant f/2$. Die Koeffizienten c_l sind so zu bestimmen, dass die Spuren von D verschwinden. Das führt zu der folgenden Rekursionsformel

$$(f-2l)(f-2l-1)\,c_l + c_{l+1}\,(2f-2l-1)(2l+2) = 0\,. \tag{10}$$

Setzt man $c_0 = 1/f!^2$ — dann ist D, auf eine Kugelfunktion angewendet, die Einheitsmatrix —, so findet man

$$c_l = (-1)^l \frac{1}{2f!} \frac{(2f-2l)!}{l!\,(f-l)!\,(f-2l)!}\,. \tag{11}$$

(Die c_l sind somit im wesentlichen die Koeffizienten von z^{f-2l} im Legendre'schen Polynom $P_f(z)$).

Wir betrachten jetzt den 4-dimensionalen Operator

$$R_{ik} = \delta_{ik} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k} \qquad (i, k = 1 \cdots 4) \tag{12}$$

Dieser wird nur auf Funktionen, welche der Wellengleichung $\Box f = \varkappa^2 f$ genügen, angewendet und hat dann folgende Eigenschaften:

$$R_{ik}\,R_{kl} = R_{il}\;;\quad R_{kk} = 3\,;\quad \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_i} = 0\,. \tag{13}$$

Mit Hilfe des Operators R_{ik} bilden wir den Operator $\mathscr{D}_{i_1 \cdots i_f,\, k_1 \cdots k_f}$ der aus dem Operator $D_{i,k}$ entsteht, indem man die Grössen δ_{ik} durch R_{ik} ersetzt. $\mathscr{D}_{i,k}$ ist der gesuchte reduzierende Operator:

$$A_{i_1 \cdots i_f} = \mathscr{D}_{i_1 \cdots i_f,\, k_1 \cdots k_f} \cdot B_{k_1 \cdots k_f}\,. \tag{14}$$

Falls $B_{i_1 \cdots i_f}$ schon irreduzibel ist, reproduziert die Operation (14) den Tensor.

Damit ist der Zusammenhang des Feldes U mit den Tensoren A hergestellt. Es ergibt sich hieraus, dass man die Variable x_i als „lokale Variable" auffassen darf. r_i ist eine „Spinvariable". Irgend einen Hinweis darauf, dass das Feld U Teilchen mit einer endlichen Ausdehnung beschreibt, wie dies Yukawa annimmt, haben wir nicht gewonnen.

Bei dieser Gelegenheit muss ich noch einen Fehler in meiner Arbeit von 1939 richtigstellen[2]). Die dort aufgestellten allgemeinen Vertauschungsrelationen (4·2) der Tensoren $A_{i \ldots i_f}$ sind unrichtig, wie man aus der hier durchgeführten Bestimmung des Operators $\mathcal{D}$ erkennt. Sie lauten richtig

$$[A_{i_1 \cdots i_f}(x), A^*_{k_1 \cdots k_f}(x')] = \frac{1}{i} \mathcal{D}_{i_1 \cdots i_f, k_1 \cdots k_f} \cdot D_\varkappa (x - x') . \quad (4.2)$$

Dabei ist $D_\varkappa(x)$ die zur Wellengleichung $\Box f = \varkappa^2 f$ gehörige invariante Funktion.

Basel, Seminar für theoretische Physik der Universität.

Literatur.

[1]) H. Yukawa, Phys. Rev. **77**, 219 (1950).
[2]) M. Fierz, Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939).
[3]) M. Fierz, Phys. Rev. **78**, 184 (1950).