

Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel

Autor(en): **Schafroth, M.R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **23 (1950)**

Heft V

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-112120>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel (II)

von M. R. Schafroth (ETH. Zürich).

(22. V. 1950.)

Die in einer früheren Arbeit¹⁾ (im folgenden zitiert als I) gegebenen Formeln (I 44) und (I 52) für die e^6 -Korrekturen $d\sigma_6$ zum differentiellen Querschnitt des Comptoneffekts stellen einer expliziten Auswertung keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr entgegen. Insbesondere kann man zeigen, dass sich sämtliche auftretenden Parameterintegrale neben elementaren Funktionen durch die einzige Transzendente

$$F(x) \equiv \int_0^x \frac{d\xi}{\xi} \log(1 + \xi) \quad (1)$$

ausdrücken lassen, welche ausführlich tabelliert ist²⁾. Indessen ist die erforderliche Rechenarbeit sehr gross, besonders da sich im allgemeinen Fall diese Reduktion auf die einzige Transzendente (1) in Praxi ziemlich umständlich gestaltet. Nachdem in I die Auswertung für den nichtrelativistischen Grenzfall bereits durchgeführt wurde, haben wir uns deshalb hier auf eine Behandlung des entgegengesetzten, extrem-relativistischen Grenzfalls beschränkt.

Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dass im Schwerpunktsystem sämtliche auftretenden Viererskalarprodukte von Impulsvektoren gross sind gegen m^2 ($m =$ Ruhmasse des Elektrons; wir setzen stets $\hbar = c = 1$), so dass man m in den Zählern der Integranden immer vernachlässigen kann und in den Nennern nur insofern mitzunehmen braucht, als es zu logarithmischen Termen Anlass gibt.

Mit den Bezeichnungen von Fig. 1 und $|\vec{x}_0| = |\vec{x}_1| = |\vec{q}_0| = |\vec{q}_1| \equiv \nu$ lauten die Bedingungen, unter denen diese Vernachlässigung gilt:

$$\frac{m^2}{4\nu^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \ll 1; \quad \frac{m^2}{4\nu^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \ll 1 \quad (2)$$

¹⁾ M. R. SCHAFFROTH, H. P. A. **22**, 501 (1949).

²⁾ POWELL, Phil. Mag. **34**, 600 (1943). K. MITCHELL, Phil. Mag. **40**, 351 (1949).

Es ist ersichtlich, dass wir so einen Ausdruck für $d\sigma_6$ erhalten werden, der nur für $\pi - \vartheta_0 > \vartheta > \vartheta_0$ gültig sein wird, wo $\vartheta_0^2 \gg m^2/v^2$; insbesondere werden wir so auf eine Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes verzichten müssen.

Man übersieht die Verhältnisse am besten durch Transformation ins Laboratoriumssystem (Ruhsystem des Anfangselektrons). Mit den aus Fig. 2 ablesbaren Bezeichnungen gilt hier, in unserer Näherung:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{\kappa}'_0| &= \frac{2v^2}{m} \\ |\vec{\kappa}'_1| &= |\vec{\kappa}'_0| \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \\ \sin^2 \frac{\Theta}{2} &= \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{m^2}{4v^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und

$$\frac{m^2}{4v^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}} > \sin^2 \frac{\Theta}{2} > \frac{m^2}{4v^2} \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \quad (4)$$

bestimmt den Gültigkeitsbereich.

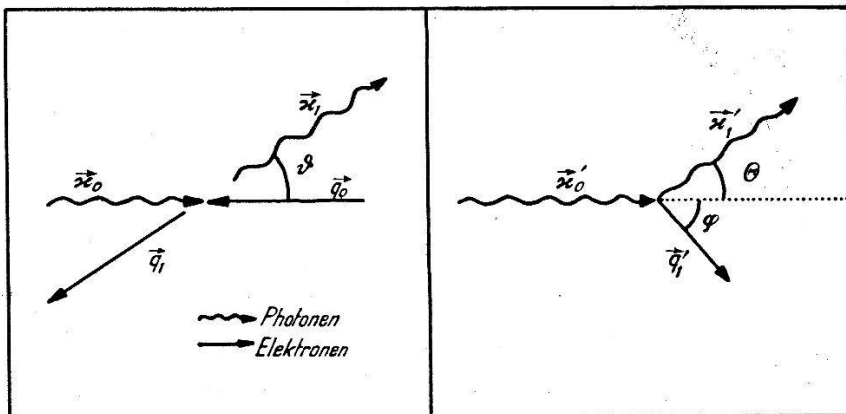


Fig. 1.
Schwerpunktsystem.

Fig. 2.
Laboratoriumssystem.

Den ausgeschlossenen Streuprozessen ($\vartheta < \vartheta_0$, $\vartheta > \pi - \vartheta_0$) entsprechen Rückstosselektronen \vec{q}'_1 , für die

a) bei $\vartheta < \vartheta_0$: $0 < |\vec{q}'_1| < 2m$, φ beliebig

b) bei $\vartheta > \pi - \vartheta_0$: $|\vec{q}'_1| \sim \frac{m}{2 \cos^2 \vartheta/2} \gg m$, $\varphi \sim \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \ll 1$

(„knock-on-Elektronen“)

Daraus ist ersichtlich, dass die von unserer Formel nicht wiedergegebenen Prozesse gerade die experimentell bezüglich Winkelverteilung uninteressantesten, wenn auch häufigsten (b) sein werden.

Es ist hier noch zu beachten, dass die entsprechende Vernachlässigung in der Klein-Nishina-Formel selber ($d\sigma_4$) erst bei viel höheren Energien gemacht werden darf, da die Terme $\sim m^2/v^2$ in $d\sigma_4$ für nicht allzu hohe Energien von derselben Grössenordnung sein werden wie unsere Korrekturen $d\sigma_6$. Dennoch werden wir im folgenden $d\sigma_4$ stets nur in dieser Näherung anschreiben, da es für uns nur zur Festlegung der Grössenordnung dient.

Die sehr langwierige und an und für sich uninteressante Rechnung liefert nun folgendes Resultat: Mit den Bezeichnungen

$$\alpha = e^2 = \frac{1}{137} ; \quad \tau = \frac{4v^2}{m^2} ; \quad \lambda = \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad \mu = \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

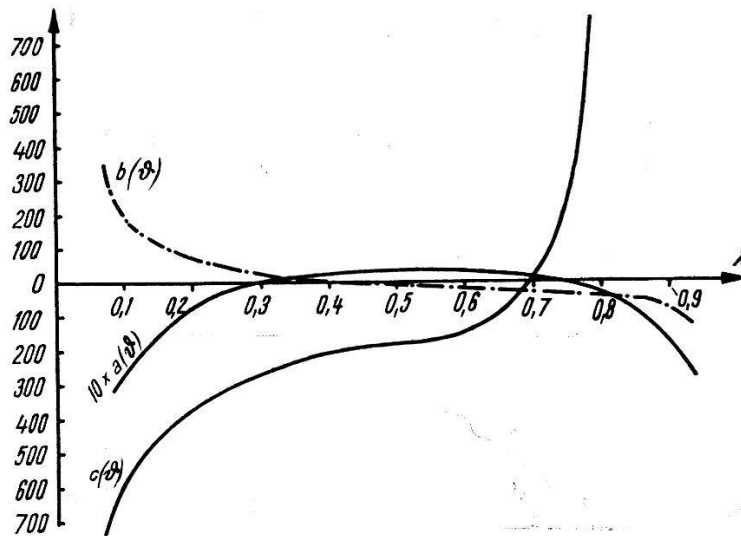


Fig. 3.

ist der differentielle Wirkungsquerschnitt (in der oben diskutierten Näherung) im Schwerpunktsystem für einen Comptoneffekt, bei welchem das Lichtquant in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut wird und kein anderes Quant von einer Energie $> \omega$ ($\omega \ll m$) emittiert wird:

$$d\sigma = d\sigma_4 + d\sigma'_6(\omega) + d\sigma''_6 \quad (6)$$

wo

$$d\sigma_4 = \frac{d\Omega}{v^2} \cdot \frac{\alpha^2}{4} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \quad (7)$$

die Klein-Nishina-Formel und

$$d\sigma'_6(\omega) = -\frac{2\alpha}{\pi} \log \omega (1 - \log(\lambda\tau)) \cdot d\sigma_4 \quad (8)$$

$$d\sigma''_6 = \frac{d\Omega}{v^2} \cdot \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} [(\log \tau)^2 \cdot a(\vartheta) + \log \tau \cdot b(\vartheta) + c(\vartheta)] \quad (9)$$

Dabei sind $a(\vartheta)$, $b(\vartheta)$, $c(\vartheta)$ komplizierte Winkelfunktionen, die

sich rational in $F(\lambda/\mu)$, $\log \lambda$, $\log \mu$, λ , μ ausdrücken und deren detaillierte formelmässige Wiedergabe sich hier nicht lohnt. Wir begnügen uns mit einer graphischen Darstellung (Fig. 3).

Fig. 4 gibt den Verlauf von

$$g(\vartheta) = \frac{\alpha}{2\pi} [(\log \tau)^2 a(\vartheta) + \log \tau \cdot b(\vartheta) + c(\vartheta)]$$

für drei Werte der Energie: $\tau = 40$, $\tau = 400$, $\tau = 4000$ (entsprechend Energien des einfallenden Photons im Ruhssystem von 10, 100, 1000 MeV) zusammen mit $f(\vartheta) = \mu + 1/\mu$ zum Vergleich.

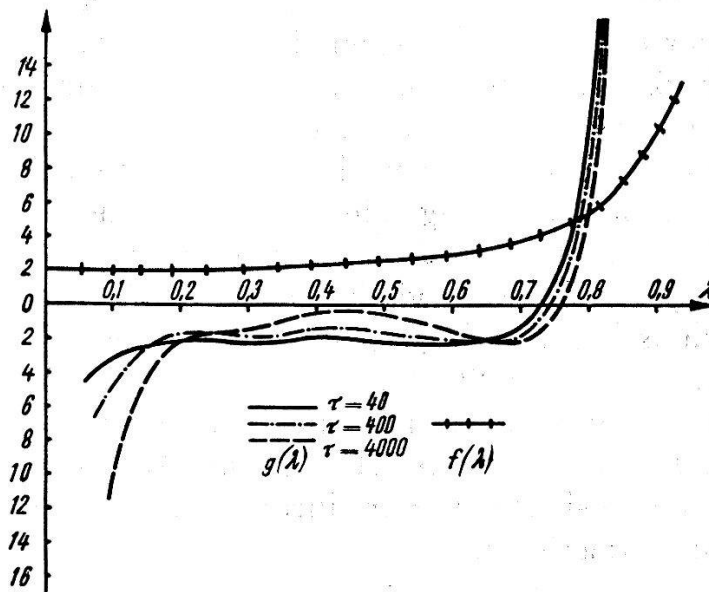


Fig. 4.

Man erkennt, dass $d\sigma_6''$ im Mittel in der Grössenordnung von 10% von $d\sigma_4$ liegt und im grossen und ganzen denselben Verlauf mit ϑ hat, abgesehen von den Rändern des Gültigkeitsbereiches und von einem kleinen, mit der Energie zunehmenden Buckel bei $\vartheta \sim 80^\circ$.

Zur experimentellen Prüfung dieser Ergebnisse bieten sich zwei Möglichkeiten:

a) Messung des absoluten differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\sigma_6$. Die von $d\sigma_6''$ gelieferten Korrekturen sind hier zwar beträchtlich, doch dürfte der Einfluss von $d\sigma_6'(\omega)$ experimentell schwer zu erfassen sein. Er erfordert nämlich neben der Streuwinkelmessung entweder eine Energiemessung oder eine Messung der Störung der Winkelkorrelation zwischen gestreutem Elektron und gestreutem Photon. Damit hierbei diese Störung feststellbar wird, darf ω (je nach Apparatur) nicht zu klein gewählt werden, so dass im allgemeinen die Bedingung $\omega \ll m$ nicht erfüllt sein wird. Dann

hätte man aber ausser $d\sigma_6'(\omega)$ und $d\sigma_6''$ noch den Doppelcompton-effekt (d. h. Comptoneffekt unter Emission eines zweiten nicht „kleinen“ Photons) mitzuberücksichtigen, was die direkte Prüfung von $d\sigma_6$ erschwert.

b) Messung des relativen differentiellen Wirkungsquerschnittes, etwa $d\sigma_6(\vartheta)/d\sigma_6(\pi/2)$. Hierbei kommt in erster Linie eine Feststellung der Abweichung der Winkelverteilung vom monotonen Verlauf in Frage, bewirkt durch den Buckel von $d\sigma_6''$ bei $\vartheta \sim 80^\circ$. ($d\sigma_6'(\omega)$ ist monoton.) Dieser Effekt ist jedoch bei 10 MeV nur ca. 1%, bei 100 MeV ca. 4% von $d\sigma_4$, also nur durch sehr genaue Messungen feststellbar. Eine Messung des starken Anstiegs bei $\vartheta \rightarrow \pi$ ist einerseits kritisch wegen der Annäherung an die theoretische Gültigkeitsgrenze und sollte deshalb nur bei möglichst hohen Energien durchgeführt werden, andererseits gerät man so (bei Messung der Streuelektronen) in den direkten Strahl der „knock-on“-Elektronen, was bei steigender Energie immer unangenehmer wird. Die Messung des Abfalls bei $\vartheta \rightarrow 0^\circ$ unterliegt demselben Einwand bezüglich der Gültigkeitsgrenze der Formel, andererseits ist die Emissionsrichtung des Rückstosselektrons beliebig und das gestreute Quant liegt im Strahl.

Es scheint uns demnach, dass die hier gegebenen strahlungstheoretischen Korrekturen zur Klein-Nishina-Formel, obschon auf den ersten Blick bedeutend, nur durch sehr feine experimentelle Methoden feststellbar sind.

Den Herren H. IKLÉ und C. ENZ sei an dieser Stelle für die Auswertung eines grossen Teils der Integrale, Herrn U. THOMA für Kontrolle einiger Zwischenrechnungen mein herzlichster Dank ausgesprochen.