Höhere mesontheoretische Näherungen zum magnetischen Moment des Protons

von **A. Thellung**, ETH. Zürich / T.H. Delft (Holland).

(22. I. 1952.)

Summary: The fourth order corrections to the magnetic moment of the proton, due to the coupling with a neutral pseudoscalar meson field, are calculated within the framework of Dyson's radiation theory, a slightly different method of self-energy subtraction being used. The integrations over the Feynman parameters are carried out only in the approximation $\delta^2 = (\mu/M)^2 = 0$. The results are unable to compensate the wrong second order contributions. Some questions concerning the renormalization of the coupling constant are discussed in detail and it is shown that, to a certain extent, the definition of what has to be interpreted as renormalization terms is arbitrary, without modifying the quantitative predictions of a theory.

§ 1. Einleitung.

In den letzten Jahren wurde, vor allem durch Arbeiten von Tomonaga[1]), Schwinger[2]), Dyson[3]) und Feynman[4]), eine relativistisch invariante Form der Quantenelektrodynamik entwickelt, die dank der Einführung des Begriffes der Massen- und Ladungsrenormalisation imstande ist, die Divergenzschwierigkeiten zu umgehen und für die beobachtbaren Effekte endliche Resultate zu liefern. Nachdem diese Theorie für gewisse Phänomene glänzende Übereinstimmung mit dem Experiment ergeben hatte[5]), war es naheliegend, ähnliche Rechnungen mit den Mesontheorien zu versuchen. Wie man die kleine Abweichung des magnetischen Momentes des Elektrons vom Wert, den man auf Grund der Diracschen Theorie erwarten würde, durch den Einfluss des Strahlungsfeldes erklären konnte (vgl. S III), so hoffte man insbesondere auch, die relativ grossen anomalen magnetischen Momente von Proton und Neutron durch ihre Kopplung an Mesonfelder in richtiger Grösse zu erhalten. Im Sinne einer Störungsrechnung, die als ein wesentlicher Zug allen bisherigen Theorien anhaftet, wurden die Beiträge verschiedener Mesonfelder zu den magnetischen Momenten der Nukleonen in 2. Ordnung in der Kopplungskonstanten durch viele Autoren berechnet[6]). Die Resultate zeigten, bei aus der Theorie der Kernkräfte in 2. Ordnung entnommenen Werten der Kopplungskonstanten, wenig Ähnlichkeit mit dem Experiment, und auch das von der Kopplungskonstanten unabhängige Verhältnis der magnetischen Momente von Neutron und Proton wurde von keiner Mesontheorie richtig wiedergegeben. Der naheliegendste Grund für dieses Versagen war in der Anwendung der Störungsrechnung zu suchen, da man es hier, im Gegensatz zur Elektrodynamik, mit einer starken Kopplung zu tun hat. Wenn überhaupt die Störungstheorie zulässig war, so stand auf jeden Fall zu erwarten, dass die folgende Näherung einen Beitrag von ähnlicher Grössenordnung liefern würde.

Das Fehlen einer Theorie, die ohne Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten auskommt, liess es deshalb als wünschenswert erscheinen, die Berechnung der anomalen magnetischen Momente in der 4. Ordnung zu versuchen. Dabei sollte sich erstens zeigen, ob sich auch in dieser Näherung alle Divergenzen als Renormalisationen deuten liessen. War dies der Fall, so war die zweite Frage, ob die Resultate imstande waren, die falschen Aussagen der 2. Ordnung zu verbessern. In der vorliegenden Arbeit wurde als Modell die pseudoskalare Mesontheorie mit pseudoskalarer Kopplung gewählt, da diese Theorie am besten geeignet erscheint, die für die Nukleoneigenschaften verantwortlichen Mesonen zu beschreiben. Da die Rechnungen ausserordentlich umfangreich werden, mussten wir uns auf ein neutrales Mesonfeld beschränken, so dass wir bloss für das Proton ein magnetisches Moment erhalten.

Während sich die ursprüngliche Schwingersche Methode (vgl. S III) für praktische Rechnungen in 4. Ordnung sehr kompliziert gestaltet, eignet sich der Feynman-Dysonsche Formalismus[3])[4]) besser. Er wurde von KARPLUS und KROLL[7]) zur Berechnung des anomalen magnetischen Momentes des Elektrons in 4. Ordnung benützt und wird im wesentlichen auch in der vorliegenden Arbeit verwendet. Eine Methode von GÉHÉNIAU und VILLARS[8]), die speziell für den Fall konstanter äusserer elektromagnetischer Felder entwickelt wurde, würde sich ebenfalls gut eignen, vielleicht auch eine Methode von KÄLLÉN[9]), bei der man direkt in der Heisenbergdarstellung arbeitet. Diese letzte Methode wurde kürzlich von HEBER[6]) zur Berechnung der magnetischen Momente in 2. Ordnung verwendet.

Was die Frage der Divergenzen betrifft, so wird sich im Laufe der Rechnung zeigen, dass sich durch die Renormalisation von Proton- und Mesonmasse sowie der elektrischen Ladung und der Mesonkopplungskonstanten tatsächlich alle Unendlichkeiten in konsistenter Weise (d. h. mit den gleichen Renormalisationen wie in anderen Problemen) beseitigen lassen. Inzwischen hat MATTHEWS[10]) zeigen können, welche Meson-Nukleon-Wechselwirkungen mit Hilfe der Renormalisationsmethode in allen Näherungen zu eindeutigen und konvergenten Resultaten führen und welche es nicht tun. Die hier verwendete Wechselwirkung zwischen Proton- und Mesonfeld gehört zur ersten Sorte. Daran ändert sich nichts, wenn ein äusseres elektromagnetisches Feld hinzukommt.

Wegen des Umfanges der Rechnungen kann nur ein kleiner Teil der Arbeit dargestellt werden. In erster Linie sollen die Unterschiede und Besonderheiten gegenüber dem analogen Problem in der Elektrodynamik[7]) diskutiert werden. In § 2 wird die Methode zur Aufstellung des effektiven Energieoperators skizziert und die hier verwendete Methode der Massenrenormalisation erläutert. § 3 handelt von der Regularisierung der divergenten Ausdrücke. § 4 ist den Effekten 2. Ordnung gewidmet, und die Methode zur Ausführung der Impulsraumintegrationen wird am Beispiel der Ladungsrenormalisation illustriert. In § 5 werden Probleme, die bei der Renormalisierung der Kopplungskonstanten auftreten, behandelt. In § 6 wird das magnetische Moment 4. Ordnung berechnet. Die Resultate werden diskutiert und mit einer kürzlich bekanntgewordenen japanischen Arbeit über dasselbe Problem[11]), in der auch geladene Mesonfelder verwendet werden, verglichen.

§ 2. Zur Methode. Massenrenormalisation.

Wir verwenden durchgehend natürliche Einheiten ($\hbar = c = 1$). Der differentielle Hamiltonoperator in der Wechselwirkungsdarstellung lautet für unser Problem

$$H(x) = H^e(x) + H^I(x)\,, \tag{1}$$

$$H^e(x) = -i\,e\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\,\psi(x)\,A_\mu(x)\,, \tag{2}$$

$$H^I(x) = i\,f\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x)\,\Phi(x) - E_P^S(x) - E_M^S(x)\,. \tag{3}$$

Hier bedeutet A_μ das Viererpotential des äusseren elektromagnetischen Feldes (c-Zahl), Φ ist der Operator des (quantisierten) pseudoskalaren neutralen Mesonfeldes, während die Protonen durch das (quantisierte) Spinorfeld ψ, $\overline{\psi} = \psi^*\gamma_4$ beschrieben werden. γ_μ sind die Diracschen Matrizen, $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. e bedeutet die elektrische Ladung des Protons, f die Kopplungskonstante für die

Wechselwirkung zwischen Proton- und Mesonfeld. ψ, $\overline{\psi}$ und Φ erfüllen die Gleichungen der ungekoppelten Felder,

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right) \psi = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - \overline{\psi} M\right) = 0\,, \tag{4}$$

$$(\square - \mu^2)\, \Phi = 0\,, \tag{5}$$

und die entsprechenden invarianten Vertauschungsrelationen

$$\{\psi_\alpha(x),\ \overline{\psi}_\beta(x')\} = \frac{1}{i}\, S_{\alpha\beta}(x - x')\,, \tag{6}$$

$$[\Phi(x),\ \Phi(x')] = i\, D(x - x')\,, \tag{7}$$

wo

$$\{A, B\} \equiv AB + BA, \qquad [A, B] \equiv AB - BA\,. \tag{8}$$

S in (6) ist identisch mit der Schwingerschen S-Funktion (vgl. S II), wenn man dort die Elektronenmasse durch die Protonmasse M ersetzt. D in (7) ist gleich definiert wie das Schwingersche Δ, wenn man die Elektronenmasse dort durch die Mesonenmasse μ ersetzt.

In (4) und (5) sowie in S und D von (6) und (7) bedeuten $M = M_0 + \delta M$ bzw. $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ die „physikalischen" (renormalisierten) Massen von Proton bzw. Meson. (M_0, μ_0 bezeichnen die „mathematischen" Massen der Teilchen, wie sie ursprünglich in der Hamiltonfunktion der ungekoppelten Felder standen. δM und $\delta\mu$ sind die Änderungen dieser Massen, die durch die Wechselwirkung zwischen den beiden Feldern hervorgerufen werden.) Dagegen sind e und f die „mathematischen" Kopplungskonstanten; für sie haben wir Renormalisationen zu erwarten. Da in besagter Weise die Selbstenergien in die Hamiltonfunktion der ungekoppelten Felder aufgenommen sind, müssen sie in der Hamiltonfunktion der Wechselwirkung wieder subtrahiert werden. Dem wird durch den Term $-E_P^S - E_M^S$ in (3) Rechnung getragen*).

E_P^S und E_M^S sind so definiert, dass die Einteilchenterme (1 Proton- oder 1 Meson-Terme) der S-Matrix ohne äusseres Feld**)

$$\langle S(\infty)\rangle_{1P,\,0M} = \langle S(\infty)\rangle_{0P,\,1M} = 1. \tag{9}$$

Ausserdem sind die Vakuumerwartungswerte der Selbstenergien so definiert, dass auch der Vakuumerwartungswert der S-Matrix

$$\langle S(\infty)\rangle_{0P,\,0M} = 1\,. \tag{10}$$

*) Nach Matthews[10]) müsste auch ein Term $\delta\lambda\,\Phi^4$ subtrahiert werden, um die Meson-Meson-Streuung endlich zu machen. Da er jedoch für das hier interessierende Problem keine Rolle spielt, lassen wir ihn weg.

**) $S(\infty)$ ist in $D\,I$, Gl. (32) gegeben, wobei nun unter H^{I} der Ausdruck (3) zu verstehen ist.

Aus (9) folgt direkt, bei Bildung der Einteilchenterme auf die in D I oder D II dargelegte Weise, dass die Selbstenergiedichten von Proton und Meson in 2. Ordnung in f — die Selbstenergien höherer Ordnung haben in unserer Näherung keinen Einfluss auf das anomale magnetische Moment — gegeben sind durch

$$\left.\begin{aligned} E_P^S(x) &= -\frac{1}{8}\, i f^2 \int d^4 x' [\bar{\psi}(x)\, M_c(x-x')\, \psi(x') + \\ &\quad + \bar{\psi}(x')\, M_c(x'-x)\, \psi(x)]\,, \\ M_c(x-x') &\equiv \gamma_5\, S_c(x-x')\, \gamma_5\, D_c(x-x')\,, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und

$$E_M^S(x) = -\frac{1}{8}\, i f^2 \int d^4 x'\, Sp[\gamma_5\, S_c(x-x')\, \gamma_5\, S_c(x'-x)]\, \Phi(x)\, \Phi(x')\,. \tag{12}$$

(Sp bedeutet Spurbildung bezüglich der γ-Matrizen.) Weiter enthalten die Selbstenergiedichten noch Vakuumterme, so dass

$$\begin{aligned} \langle E_P^S(x) + E_M^S(x) \rangle_{0\,P,\,0\,M} &= -\frac{1}{16}\, i f^2 \int d^4 x'\, Sp[\gamma_5\, S_c(x-x') \times \\ &\quad \times \gamma_5\, S_c(x'-x)]\, D_c(x-x')\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Dann ist auch (10) erfüllt.

In diesen Gleichungen bezeichnen S_c und D_c die „kausalen“ Funktionen

$$S_c(x) = -\frac{2\, i}{(2\,\pi)^4} \int d^4 p\, \frac{i\,\gamma\, p - M}{p^2 + M'^2}\, e^{i\,p\,x}, \tag{14}$$

$$D_c(x) = -\frac{2\, i}{(2\,\pi)^4} \int d^4 k\, \frac{1}{k^2 + \mu'^2}\, e^{i\,k\,x}. \tag{15}$$

d^4x, d^4p, d^4k bedeuten die reellen vierdimensionalen Volumenelemente $dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_0, \ldots, \ldots$. px, kx, γx, p^2, k^2 stehen für die skalaren Produkte der Vierervektoren $p_\mu\, x_\mu = \vec{p}\,\vec{x} - p_0\, x_0, \ldots, \ldots, \ldots, k_\mu\, k_\mu = \vec{k}^2 - k_0^2$. $M'^2 = M^2 - i\varepsilon$ soll angeben, dass man sich bei der Protonmasse einen infinitesimalen negativ-imaginären Zusatz zu denken hat, der bei der p_0-Integration den Weg um die Pole $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + M^2}$ festlegt und den man nach der Integration nach Null gehen lässt. Analog bedeutet $\mu'^2 = \mu^2 - i\,\varepsilon$.

Aus Gründen der relativistischen Invarianz ist direkt ersichtlich, dass die Ausdrücke (11), (12) von der Form sind

$$E_P^S = \delta\, M\, \bar{\psi}\, \psi\,, \qquad E_M^S = \frac{1}{2}\, \delta\, \mu^2\, \Phi^2\,. \tag{16}$$

δM und $\delta \mu^2$ divergieren jedoch.

Wir interessieren uns für den 1 Proton-0 Meson-Teil des in D I definierten effektiven Hamiltonoperators H_F

$$\langle H_F(x)\rangle_{1\,P,\,0\,M} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4 x' \ldots . \int d^4 x^{(n)} \times$$
$$\times \langle P\big(H^e(x)\,,\ H^I(x')\,, \ldots . ,\ H^I(x^{(n)})\big)\rangle_{1\,P,\,0\,M}\,. \tag{17}$$

Er stellt die Dichte der potentiellen Energie eines Protons im äusseren elektromagnetischen Feld in 1. Bornscher Näherung dar und ist mit dem analogen Energieoperator, den man nach der invarianten Störungsmethode von SCHWINGER erhielte, identisch (D I, Appendix). Das Ziel ist nun, (17) zu berechnen bis zur 4. Ordnung in f. Daraus lässt sich dann das magnetische Moment des Protons $\sim f^4$ ableiten.

Hierbei denken wir uns die Selbstenergiedichten E_P^S und E_M^S, die in (17) vermöge (3) vorkommen, nicht in der meist verwendeten Form (16), sondern in der Form (11) und (12) — mit Berücksichtigung von (13) — eingesetzt. Diese Art der Selbstenergiesubtraktion erwies sich in Arbeiten von JOST und LUTTINGER[12]) und von SCHAFROTH[13]) im Rahmen der Schwingerschen Theorie als nützlich. Sie lässt sich im Rahmen der Dysonschen Rechenmethoden ebenfalls durchführen. Sie ist zwar etwas weniger elegant als der übliche Dysonsche Subtraktionsformalismus, hat aber den Vorteil, dass man in den Termen von (17), wo die abgeänderten $\bar{\psi}$- und ψ-Operatoren (in D II mit $\bar{\psi}'$ und ψ' bezeichnet) auftreten, die Renormalisationen von e und f „von selbst" richtig erhält, während die übliche Methode eine feinere Analyse gewisser unbestimmter Ausdrücke nötig macht. Wir werden dies am Schluss von § 4 noch näher erläutern.

Die Einführung der Ausdrücke (11), (12) in (17) hat zur Folge, dass in den P-Klammern neben den Variablen $x^{(i)}$, die für die chronologische Reihenfolge massgebend sind, noch andere Variablen $x^{(k)}$ vorkommen. Für diese Fälle müssen die Regeln zur Bildung der Einteilchenterme noch etwas verallgemeinert werden. Nehmen wir als einfaches Beispiel den Ausdruck

$$-i\int d^4 x' \left\langle P\big(H^e(x)\,,\ -E_P^S(x')\big)\right\rangle_{1\,P}\,, \tag{18}$$

der im Term $n = 1$ von (17) enthalten ist. Einsetzen von (11) gibt

$$\frac{1}{8} f^2 \int d^4 x' \int d^4 x'' \Big\langle P_{\underline{0}\,(\underline{1}2)}\big(H^e(x)\,, \bar{\psi}(x')\, M_c(x'-x'')\,\psi(x'')\big) +$$
$$+ P_{\underline{0}\,(2\underline{1})}\big(H^e(x), \bar{\psi}(x'')\, M_c(x''-x')\,\psi(x')\big)\Big\rangle_{1\,P}\,.$$

Wegen (2) erhält man also P-Klammern von der Form (Spinorindizes weggelassen)

$$\begin{aligned} & P_{\underline{0}\,(1\underline{2})}(\bar{\psi}(x)\,\psi(x)\,,\ \bar{\psi}(x')\,\psi(x'')) \\ \text{und}\ \ & P_{\underline{0}\,(2\underline{1})}(\bar{\psi}(x)\,\psi(x)\,,\ \bar{\psi}(x'')\,\psi(x')). \end{aligned} \tag{19}$$

Die Indizes 0, 1, 2 am Operator der chronologischen Ordnung P beziehen sich auf die Variablen x, x', x''. Unterstreichen von 0 und 1 soll andeuten, dass die Zeiten der Punkte x und x' für die Reihenfolge der Faktoren massgebend sind [wie es in (18) die Meinung war], während die runde Klammer um $\underline{1}$ 2 bzw. 2 $\underline{1}$ besagen soll, dass $\psi(x'')$ immer direkt hinter $\bar{\psi}(x')$ stehen muss bzw. $\bar{\psi}(x'')$ immer direkt vor $\psi(x')$. Etwas allgemeiner definieren wir z. B.

$$\begin{aligned} & P_{(\underline{0}2)(3\underline{1})}(\bar{\psi}(x)\,\psi(x'')\,,\ \bar{\psi}(x''')\,\psi(x')) = \\ & = \begin{cases} \bar{\psi}(x)\,\psi(x'')\,\bar{\psi}(x''')\,\psi(x') & \text{für } x_0 > x_0{}' \\ \bar{\psi}(x''')\,\psi(x')\,\bar{\psi}(x)\,\psi(x'') & \text{für } x_0{}' > x_0. \end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

Zum Einteilchenterm von (20) gehört ein Ausdruck, in dem $\bar{\psi}(x)$ und $\psi(x')$ als freie Operatoren stehenbleiben, während bezüglich $\psi(x'')$ und $\bar{\psi}(x''')$ der Vakuumerwartungswert gebildet werden muss. Dieser ist, mit den Definitionen (8) und mit

$$\varepsilon(x-x') = \begin{cases} +1 \text{ für } x_0 > x_0' \\ -1 \text{ für } x_0' > x_0\,, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} & \langle P_{(\underline{0}2)(3\underline{1})}(\psi_\alpha(x'')\,,\ \bar{\psi}_\beta(x'''))\rangle_0 = \\ & \quad = \frac{1}{2}\{\psi_\alpha(x'')\,,\bar{\psi}_\beta(x''')\} + \frac{1}{2}\,\varepsilon(x-x')\,\langle[\psi_\alpha(x'')\,,\bar{\psi}(x''')]\rangle_0 = \\ & \quad = \frac{1}{2}\,\frac{1}{i}\,S_{\alpha\beta}(x''-x''') - \frac{1}{2}\,\varepsilon(x-x')\,S^{(1)}_{\alpha\beta}(x''-x''')\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & \langle P_{(\underline{0}2)(3\underline{1})}(\psi_\alpha(x'')\,,\bar{\psi}_\beta(x'''))\rangle_0 = \\ & = -\frac{1}{2}\,\varepsilon(x-x')\,[S^{(1)}_{\alpha\beta}(x''-x''') + i\,\varepsilon(x-x')\,S_{\alpha\beta}(x''-x''')]. \end{aligned} \tag{22}$$

Die zur Herleitung von (22) neben den Vertauschungsrelationen (6) verwendeten Ausdrücke für Vakuumerwartungswerte sind bei Schwinger (S II) erläutert. Ähnlich findet man für Vakuumerwartungswerte in den Mesonoperatoren

$$\begin{aligned} & \langle P_{(\underline{0}2)(3\underline{1})}(\Phi(x''),\ \Phi(x'''))\rangle_0 = \\ & = \frac{1}{2}[D^{(1)}(x''-x''') + i\,\varepsilon(x-x')\,D(x''-x''')]. \end{aligned} \tag{23}$$

Formel (22) dient auch zur Berechnung des Einteilchenterms im spezielleren Fall (18), (19), wo mindestens zwei der Variablen $x^{(i)}$ zusammenfallen. Ist insbesondere $x'' = x$ und $x''' = x'$, so gehen (22) und (23) in die bekannten Beziehungen über

$$\left\langle P_{\underline{01}}(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x'))\right\rangle_0 = -\frac{1}{2}\,\varepsilon(x-x') S_{c_{\alpha\beta}}(x-x'), \tag{22'}$$

$$\left\langle P_{\underline{01}}(\Phi(x), \Phi(x'))\right\rangle_0 = \frac{1}{2}\, D_c(x-x'), \tag{23'}$$

wo

$$\begin{aligned} S_c(x-x') &= S^{(1)}(x-x') + i\,\varepsilon(x-x')\, S(x-x') = \\ &= S^{(1)}(x-x') - 2\,i\,\bar{S}(x-x') \end{aligned} \tag{24}$$

und

$$\begin{aligned} D_c(x-x') &= D^{(1)}(x-x') + i\,\varepsilon(x-x')\, D(x-x') = \\ &= D^{(1)}(x-x') - 2\,i\,\bar{D}(x-x') \end{aligned} \tag{25}$$

durch die Fourierdarstellungen (14) und (15) gegeben sind. S, $S^{(1)}$ und $\bar{S}$ sind gleich definiert wie in S II; nur muss die Elektronmasse durch die Protonmasse M ersetzt werden. D, $D^{(1)}$ und $\bar{D}$ sind identisch mit den Schwingerschen Δ, $\Delta^{(1)}$ und $\bar{\Delta}$ für Teilchen der Ruhemasse μ.

In (22) tritt, ebenso wie in der bekannten Beziehung (22′), der Faktor $-\frac{1}{2}\,\varepsilon\,(x - x')$ auf, wo x und x' die für die Reihenfolge der Faktoren in den P-Klammern verantwortlichen Variablen sind. Aus diesem Grunde lassen sich die Dysonschen Überlegungen (vgl. D I) betreffend Vorzeichen usw. bei der Berechnung von Matrixelementen unverändert auf den vorliegenden Fall übertragen, und die in D I und D II gegebenen Regeln zur Bildung von Einteilchentermen oder allgemeineren Operatoren aus P-Klammern gelten hier ebenfalls, mit dem einzigen Unterschied, dass man für die Vakuumerwartungswerte von Operatorpaaren an Stelle der S_c- und D_c-Funktionen von (22′) und (23′) die allgemeineren Funktionen in den eckigen Klammern von (22) und (23) einzusetzen hat, falls die Argumente der Operatoren nicht Variablen sind, welche die zeitliche Ordnung in den P-Klammern bestimmen. Wie man mit den Funktionen (22), (23) zu rechnen hat, soll in § 4 am Beispiel der Renormalisation von e noch ausgeführt werden.

§ 3. Regularisierung.

Wie bereits bemerkt, werden gewisse Ausdrücke, wie z. B. die Selbstenergiedichten (11), (12), divergent. Es handelt sich dabei immer um Renormalisationen, also um unbeobachtbare Effekte. Da man sie jedoch bei der Berechnung der beobachtbaren Effekte benützt, sollte man, um letztere eindeutig zu definieren, von einer Regularisierungsmethode Gebrauch machen, wie sie von Pauli und Villars[14]) u. a. entwickelt worden ist. Im vorliegenden Fall kann eine einfache und klare Vorschrift zu einer relativistisch invarianten Regularisierung durch die folgenden zwei Forderungen gegeben werden:

1. Man kopple formal neben dem wirklichen Mesonfeld mit der Masse μ und der Kopplungskonstanten f noch weitere (virtuelle) Mesonfelder des gleichen Typs mit Massen μ_1, μ_2, ... und mit (zum Teil imaginären) Kopplungskonstanten $f\sqrt{c_1}$, $f\sqrt{c_2}$, ... an das Protonfeld. Diesen Mesonfeldern misst man keine reale Bedeutung zu; sie haben aber den Effekt, dass jede in den Formeln auftretende D-Funktion (D, $D^{(1)}$, $\overline{D}$ oder D_c) ersetzt wird durch eine Summe von Funktionen

$$D(x;\mu) \to \sum_i c_i D(x;\mu_i) \qquad (c_0 = 1\,, \mu_0 = \mu). \tag{26}$$

In 4. Ordnung, wo Produkte von zwei D-Funktionen auftreten, erhält man damit eine Regularisierung *mit* Faktorisierung. Den c_i und μ_i werden Bedingungen auferlegt, so dass die sonst divergenten Ausdrücke endlich werden. Für unsere Zwecke genügt

$$\sum_i c_i = 0 \tag{27}$$

(woraus bereits folgt, dass mindestens eine der formalen Kopplungskonstanten imaginär sein muss). Damit werden die logarithmischen Divergenzen weggeschafft, und sowohl die Protonselbstenergie (11) als auch die Renormalisation von e in 2. Ordnung wird dadurch endlich. Die Renormalisation 2. Ordnung von f ist zwar ebenfalls bloss logarithmisch divergent, doch enthält sie einen Term, in dem die Mesonselbstenergie eine Rolle spielt. Um diese zu regularisieren, braucht man noch eine zweite Vorschrift:

2. Man kopple formal neben dem wirklichen Protonfeld noch weitere (virtuelle) Spinorfelder mit Massen M_k und Kopplungskonstanten $f\sqrt{c_i}\sqrt{C_k}$ an die Mesonfelder. Diesen Spinorfeldern

kommt ebenfalls keine reale Bedeutung zu. Sie haben den Effekt, dass in (12) und allgemein in Ausdrücken, wo Spuren von S-Funktionen vorkommen, und nur in diesen, jede Spur in eine einfache Summe von Spuren übergeht (Regularisierung *ohne* Faktorisierung):

$$\left.\begin{aligned} &Sp(\gamma S(x;M)\,\gamma S(x;M)\ldots.)\rightarrow\\ &\rightarrow\sum_k C_k\,Sp(\gamma S(x;M_k)\,\gamma S(x;M_k)\ldots.)\\ &(C_0=1,\quad \mathrm{M}_0=M)\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

(Die S können irgendwelche S-Funktionen und die γ irgendwelche γ-Matrizen bedeuten.) Da die Mesonselbstenergie (12) quadratisch divergiert, haben wir hier zwei Bedingungen,

$$\sum_k C_k = 0\,,\qquad \sum_k C_k\,M_k^2 = 0\,, \tag{29}$$

nötig, um sie endlich zu machen.

Da den Hilfsfeldern sicher keine reale Bedeutung zukommt — ihre Hamiltonfunktionen der Wechselwirkung sind ja teilweise antihermitisch — dürfen sie auf die beobachtbaren Resultate keinen Einfluss haben. Das erreicht man dadurch, dass man die Hilfsmassen μ_i und M_k gross wählt gegenüber den realen Massen μ und M. Nach erfolgter Rechnung macht man den Grenzübergang $\mu_i\rightarrow\infty$, $M_k\rightarrow\infty$ $(i,k \neq 0)$[14]. Die Formulierung mit den Hilfsfeldern ist praktisch, weil sie auf alle Fragen (z. B. Faktorisierung oder Nicht-Faktorisierung) der Regularisierung von Ausdrücken beliebig hoher Ordnung eine eindeutige und vernünftige Antwort gibt.

Um die Formeln nicht unnötig zu belasten, schreiben wir sie auch im folgenden nicht in der regularisierten Form. Jedoch denken wir uns die Ausdrücke gemäss den dargelegten Vorschriften regularisiert und machen auch Gebrauch von der Eigenschaft, dass sie endlich und eindeutig definiert sind. Wenn wir im folgenden dennoch von divergenten und konvergenten Ausdrücken sprechen, so ist damit das Verhalten gemeint, das sie ohne Regularisierung hätten.

§ 4. Magnetisches Moment und Ladungsrenormalisation in 2. Ordnung.

Mit der in § 2 skizzierten Methode findet man für den effektiven Hamiltonoperator (17) in 2. Ordnung, bei Verwendung der Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} &F(x)\equiv F(0)\,,\quad F(x')\equiv F(1)\,,\quad F(x'')\equiv F(2)\,,\\ &F(x-x')\equiv F(01)\,,\quad F(x'-x)\equiv F(10)\ \text{usw.} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

für Funktionen unter dem Integralzeichen,

$$\langle H_F^{(2)} \rangle_{1\,P,\,0\,M} = H_a^{(2)} + H_b^{(2)}, \tag{31}$$

$$H_a^{(2)}(x) = -\frac{1}{8} f^2 i e A_\mu(x) \int d^4 x' \int d^4 x'' \times$$
$$\times \bar{\psi}(1)\,\gamma_5\, S_c(10)\,\gamma_\mu\, S_c(02)\,\gamma_5\,\psi(2)\, D_c(12), \tag{31a}$$

$$H_b^{(2)}(x) = \frac{1}{16} f^2 i e A_\mu(x) \int d^4 x' \int d^4 x'' \{\bar{\psi}(0)\,\gamma_\mu [i\,\varepsilon(02)\, S(01) +$$
$$+ 2\,i\,\bar{S}(01)]\,\gamma_5\, S_c(12)\,\gamma_5\,\psi(2) + (\leftarrow)\} D_c(12). \tag{31b}$$

Mit $(\leftarrow)$ ist der Ausdruck gemeint, den man erhält, wenn man den vorangehenden Term „von hinten nach vorn liest“:

$$\bar{\psi}(2)\,\gamma_5\, S_c(21)\,\gamma_5 [i\,\varepsilon(20)\, S(10) + 2\,i\,\bar{S}(10)]\,\gamma_\mu\,\psi(0).$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern entstehen als Differenzen zwischen den Funktionen in den eckigen Klammern von (22) und den S_c-Funktionen (24). Aus dieser Form von (31b) ist die relativistische Invarianz nicht direkt ersichtlich; sie wird jedoch später evident werden.

Obwohl die Methode, die zu (31), (31a), (31b) führt, eine rein analytische ist, geben wir, um den Vergleich mit anderen Arbeiten

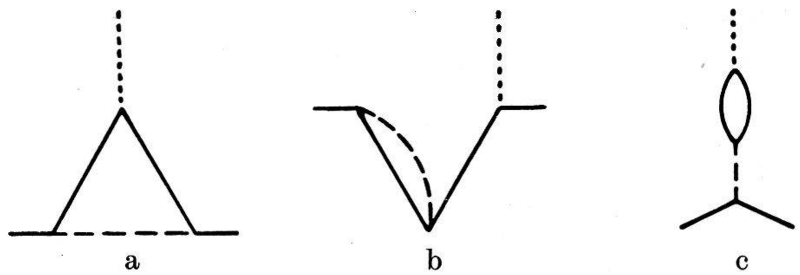


Fig. 1.

Feynman-Dysonsche Figuren für die Streuung eines Protons an einem äusseren elektromagnetischen Feld in 2. Ordnung. Protonlinien sind ausgezogen, Mesonlinien gestrichelt, Photonlinien punktiert gezeichnet.

zu erleichtern, in Fig. 1 die Feynman-Dysonschen Figuren[3])[4]) für die Effekte in 2. Ordnung. Figur a entspricht dem Ausdruck (31a), Figur b dem Ausdruck (31b); jedoch ist in (31b) der Effekt der Massenrenormalisation bereits berücksichtigt. Ohne Massenrenormalisation hätte der Figur b entsprechende Ausdruck die Form:

$$-\frac{1}{8} f^2 i e A_\mu(x) \int d^4 x' \int d^4 x'' \{\psi(0)\,\gamma_\mu\, S_c(01)\,\gamma_5\, S_c(12)\,\gamma_5\,\psi(2) +$$
$$+ (\leftarrow)\} D_c(12).$$

Der Term, der Figur c entspräche, ist Null, da

$$Sp\,(\gamma_\mu S_c \gamma_5 S_c) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{32}$$

auf Grund bekannter Eigenschaften der Dirac-Matrizen.

Setzt man voraus, dass das äussere elektromagnetische Feld (räumlich und zeitlich) quasi-konstant ist, so erhält man aus (31a) mit den bekannten Methoden[3][4])

$$\begin{aligned} H_a^{(2)}(x) = &- R_a^e f^2 i e A_\mu(x)\, \bar\psi(x)\, \gamma_\mu \psi(x) - \\ &- \mu^{(2)} f^2 \frac{e}{2M} A_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\bar\psi(x)\, \sigma_{\mu\nu} \psi(x)), \end{aligned} \tag{33}$$

wo

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \tag{34}$$

Alle andern Terme von (31a) sind von einem der drei Typen

$$\begin{aligned} &\text{const. } A_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Box^n (\bar\psi\, \psi), \qquad \text{const. } A_\mu \Box^{n+1} (\bar\psi \gamma_\mu \psi), \\ &\text{const. } A_\mu \Box^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\bar\psi\, \sigma_{\mu\nu} \psi). \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Diese sind, abgesehen von Viererdivergenzen, äquivalent mit Termen $\sim \delta A_\mu / \delta x_\mu$ (was verschwindet, wenn man die A_μ der Lorentzschen Nebenbedingung unterwirft) oder $\sim \Box\, A_\mu$ (was für ein quasikonstantes Feld vernachlässigbar ist).

Der erste Term auf der rechten Seite von (33) bedeutet eine Ladungsrenormalisation zu H^e in (2). Die Renormalisationskonstante R_a^e ist durch das Integral

$$R_a^e = -\frac{i}{8\pi^4} \int_0^1 \xi\, d\xi \int d^4k \frac{k^2 + 2M^2\xi^2}{[k^2 + \mu'^2 - \mu^2\xi + M^2\xi^2]^3} \tag{35}$$

gegeben und würde ohne Regularisierung logarithmisch divergieren. Die Vorschrift (26) mit der Bedingung (27) macht (35) jedoch regulär. Der zweite Term rechts in (33) ist, abgesehen von einer Viererdivergenz, von der Form eines Pauli-Terms

$$-\mu^{(2)} f^2 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \tag{36}$$

wo

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \qquad m_{\mu\nu} = \frac{e}{2M} \bar\psi\, \sigma_{\mu\nu} \psi, \tag{37}$$

und bedeutet die Energie, die von dem zusätzlichen magnetischen Spinmoment des Protons in 2. Ordnung herrührt. Dieses beträgt, in Kernmagnetonen $e/2M$ gemessen,

$$\mu^{(2)} f^2 = -\left(\frac{f}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \, \frac{\xi^3}{\xi^2 + \delta^2 (1-\xi)} =$$

$$= -\left(\frac{f}{2\pi}\right)^2 \left\{\frac{1}{4} + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2 (1-\delta^2)}{2} \ln \frac{1}{\delta} - \frac{\delta^3 (3-\delta^2)}{2\sqrt{4-\delta^2}} \arccos \frac{\delta}{2}\right\}, \tag{38}$$

wo

$$\delta = \frac{\mu}{M}\,; \tag{39}$$

es ist von LUTTINGER u. a.[6]) berechnet worden.

Der Ausdruck (31b) gibt eine reine Ladungsrenormalisation. Diese Rechnung wollen wir etwas ausführen, um das Rechnen mit den Funktionen (22) zu illustrieren. Setzen wir also in (31b) die Fourierdarstellungen (14), (15) und (vgl. S II!)

$$S(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p\, (i\gamma p - M)\, \varepsilon(p)\, \delta(p^2 + M^2)\, e^{ipx}, \tag{40}$$

$$\bar{S}(x) = -\frac{1}{2}\, \varepsilon(x)\, S(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\, HW \int d^4 p\, \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M^2}\, e^{ipx} \tag{41}$$

ein [$\varepsilon(p)$ ist analog (21) definiert, δ ist die eindimensionale Diracsche δ-Funktion und HW bedeutet Hauptwert bei der p_0-Integration]. Im Laufe der Rechnung zeigt sich, dass der Ausdruck mit ($\leftarrow$) in (31b) denselben Beitrag gibt wie der vorangehende Ausdruck. Wir nehmen dies vorweg und schreiben $2\times$ den ersten Term; dann ergibt sich

$$\begin{aligned} H_b^{(2)}(x) = {} & \frac{1}{8} f^2\, i e\, A_\mu(x) \left[\frac{-2i}{(2\pi)^4}\right]^2 \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 p \int d^4 p' \int d^4 k\, \times \\ & \times \psi(x)\, \gamma_\mu (i\gamma p - M)\, \gamma_5 (i\gamma p' - M)\, \gamma_5\, \psi(x'') \times \\ & \times \left[i\, \varepsilon(x - x'')\, \frac{-i}{(2\pi)^3}\, \varepsilon(p)\, \delta(p^2 + M^2) + \frac{2i}{(2\pi)^4}\, HW\, \frac{1}{p^2 + M^2}\right] \times \\ & \times \frac{1}{p'^2 + M'^2}\, \frac{1}{k^2 + \mu'^2}\, e^{ip(x-x')}\, e^{ip'(x'-x'')}\, e^{ik(x'-x'')}. \end{aligned}$$

Die Integration über x′ gibt eine (vierdimensionale) δ-Funktion

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4 x'\, e^{i(-p+p'+k)x'} = \delta(-p + p' + k)\,, \tag{42}$$

so dass die Integration über p' trivial wird ($p' \to p - k$). Benützen wir einige bekannte Eigenschaften der γ-Matrizen, so erhalten wir

$$H_b^{(2)}(x) = \frac{1}{8} f^2 \, i\, e\, A_\mu(x) \, \frac{-4}{(2\pi)^4} \int d^4 x'' \int d^4 p \int d^4 k \times$$
$$\times \bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu [p^2 + M^2 + (i\gamma p)(i\gamma k) - M(i\gamma k)]\, \psi(x'') \times$$
$$\times \left[i\, \varepsilon(x - x'') \frac{-i}{(2\pi)^3} \varepsilon(p)\, \delta(p^2 + M^2) + \frac{2i}{(2\pi)^4} HW \frac{1}{p^2 + M^2} \right] \times$$
$$\times \frac{1}{(p-k)^2 + M'^2} \, \frac{1}{k^2 + \mu'^2} \, e^{i p (x - x'')} .$$

Wir fassen nun die beiden letzten Brüche gemäss der Feynmanschen Formel[4])

$$\frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n} = n! \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{\xi_{n-1}} d\xi_n \times$$
$$\times [a_0 + \xi_1 (a_1 - a_0) + \cdots + \xi_n (a_n - a_{n-1})]^{-(n+1)} \tag{43}$$

zusammen:

$$\frac{1}{k^2 + \mu'^2} \, \frac{1}{(p-k)^2 + M'^2} = \int_0^1 d\xi \, \frac{1}{[k^2 + \mu'^2 + \xi (p^2 - 2\, p\, k + M^2 - \mu^2)]^2} .$$

Mit der Schiebung*)

$$k' = k - \xi\, p \tag{44}$$

wird der Nenner rein quadratisch in der neuen Variablen k'. Da k' sonst nur noch im Ausdruck mit den γ-Matrizen vorkommt, geben dort Terme linear in k' aus Symmetriegründen keinen Beitrag bei der Integration. Mit

$$(p^2 + M^2)\, \delta(p^2 + M^2) \to 0 , \quad (p^2 + M^2)\, HW \frac{1}{p^2 + M^2} \to 1 \tag{45}$$

erhält man

$$H_b^{(2)}(x) = -\frac{1}{2} f^2 \, i\, e\, A_\mu(x) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4 x'' \int d^4 k' \int_0^1 d\xi \times$$
$$\times \bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu \Big\{ -i\, \varepsilon(x - x'') \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4 p\, (i\gamma p - M)\, \varepsilon(p) \times$$
$$\times \delta(p^2 + M^2)\, e^{i p (x - x'')} \frac{M\, \xi}{[k'^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2]^2} +$$
$$+ \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \left[1 - \xi - HW \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M^2} M\, \xi \right] e^{i p (x - x'')} \times$$
$$\times \frac{1}{[k'^2 + \mu'^2 + (p^2 + M^2 - \mu^2)\, \xi - p^2 \xi^2]^2} \Big\} \psi(x'') .$$

*) Man beachte, dass dank der (gedachten) Regularisierung gemäss (26), (27) das Integral über k wohldefiniert und endlich ist. Im Gegensatz zu Karplus und Kroll[7]), Seite 540/541, bekommen wir deshalb bei der Schiebung keinen Oberflächenterm.

Das erste Integral über p gibt nach (40) gerade wieder die S-Funktion, jetzt aber mit dem gleichen Argument $(x - x'')$ wie die ε-Funktion, mit der sie multipliziert ist. Dadurch wird die Lorentzinvarianz evident. Setzen wir für $\varepsilon(x - x'')\, S(x - x'')$ die Fourierdarstellung (41) ein und verwenden wir die Abkürzungen

$$\alpha = k'^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2, \qquad \beta = \alpha + (p^2 + M^2)(\xi - \xi^2),$$

so ergibt sich

$$H_b^{(2)}(x) = -\frac{1}{2} f^2 i e A_\mu(x)\, 2i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^8 \int d^4x'' \int d^4k' \int d^4p \int_0^1 d\xi\, \bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu \times$$

$$\times \left\{HW \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M^2} M\xi \frac{1}{\alpha^2} + \left[1 - \xi - HW \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M^2} M\xi\right] \frac{1}{\beta^2}\right\} e^{ip(x - x'')} \psi(x'') =$$

$$= -f^2 i e A_\mu(x)\, i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^8 \int d^4x'' \int d^4k' \int d^4p \int_0^1 d\xi\, \bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu \times$$

$$\times \left\{\frac{1-\xi}{\beta^2} + (i\gamma p - M)(\xi - \xi^2) M\xi \frac{1}{\alpha\beta}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right]\right\} e^{ip(x - x'')} \psi(x''),$$

da

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right].$$

Zur Ausführung der x''-Integration zerlegen wir ψ nach Fourier. Um die Formeln nicht zu überlasten, setzen wir nur eine Fourierkomponente von ψ ein (da sie beliebig ist, wird die Allgemeinheit der Rechnung nicht eingeschränkt):

$$\psi(x) = u(q)\, e^{iqx}. \tag{46}$$

Analog werden wir in §§ 5 und 6 brauchen

$$\bar{\psi}(x) = \bar{u}(q')\, e^{-iq'x}. \tag{47}$$

Wegen der Diracgleichungen (4) gilt

$$\cdots (i\gamma q + M)\, u(q)\, e^{iqx} = \bar{u}(q')\, e^{-iq'x}\, (i\gamma q' + M) \cdots = 0 \tag{48}$$

und

$$\cdots (q^2 + M^2)\, u(q)\, e^{iqx} = \bar{u}(q')\, e^{-iq'x}\, (q'^2 + M^2) \cdots = 0, \tag{49}$$

sofern der mit ... bezeichnete Rest endlich ist (d. h. nicht von der Form $(i\gamma q + M)^{-1}$ oder $(q^2 + M^2)^{-1}$ usw.).

Die Integration über x'' gibt nun, analog (42), die Funktion $\delta(q - p)$. Die p-Integration wird wieder trivial $(p \to q)$. Wegen (49) hat man $\beta \rightarrow \alpha$, und bei Berücksichtigung von (48) und (46) erhält man schliesslich

$$H_b^{(2)}(x) = -R_b^e f^2 \, i\, e\, A_\mu(x)\, \overline{\psi}(x)\, \gamma_\mu\, \psi(x)\,, \tag{50}$$

wo

$$R_b^e = \frac{i}{16\pi^4}\int_0^1 d\xi\,(1-\xi)\int d^4k\left[\frac{1}{[k^2+\mu'^2-\mu^2\xi+M^2\xi^2]^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{4M^2\xi^2}{[k^2+\mu'^2-\mu^2\xi+M^2\xi^2]^3}\right]. \tag{51}$$

Ein Vergleich der Formeln (33) und (50) mit (2) zeigt, dass die beobachtbaren Einflüsse des äusseren Feldes auf das Proton — abgesehen von Pauli-Termen — nicht durch $e A_\mu$, sondern (bis in 2. Ordnung) durch

$$(e A_\mu)_{\text{ren.}} = e A_\mu [1 + (R_a^e + R_b^e) f^2] \tag{52}$$

bestimmt werden. (Es ist konsequent, die Renormalisationen nicht auf e allein, sondern auch auf die A_μ zu beziehen, da die A_μ auch wieder durch Ladungen e erzeugt werden.) Ein Vergleich von (35) und (51) — am einfachsten mit Hilfe einer partiellen Integration in ξ*) — zeigt jedoch, dass

$$R_a^e + R_b^e = 0\,. \tag{53}$$

Hierbei ist die Regularisierung wieder wesentlich, da R_a^e und R_b^e sonst unbestimmt sind und sich nur auf Grund gewisser Zusatzvorschriften betreffend die Ausführung der Integration wegheben.

Eine Bemerkung: Verwendet man die Selbstenergiedichte in der Form $\delta M \overline{\psi}\psi$, so ändert sich $H_a^{(2)}$(31 a) nicht, während $H_b^{(2)}$(31 b) eine andere Form bekommt. Bei der Berechnung von R_b^e stösst man dann auf den Ausdruck $(p^2 + M^2)\,(p^2 + M'^2)^{-1}$ im Integranden, während bei unserer Rechnung Ausdrücke von der Form $(p^2+M^2)\times \times HW\,(p^2 + M^2)^{-1}$ auftraten. Wegen der Äquivalenz von $(p^2+M'^2)^{-1}$ mit $HW\,(p^2 + M^2)^{-1} + i\pi\,\delta\,(p^2 + M^2)$**) schiene es auf den ersten Blick vernünftig, dem Ausdruck $(p^2 + M^2)\,(p^2 + M'^2)^{-1}$ ebenfalls den Wert 1 zu geben, wie das in einer Arbeit von WATSON und LEPORE[15]) bei der Renormalisation von f getan wird. Dann erhielte man aber eine doppelt so grosse Renormalisationskonstante, und es würde

$$(e A_\mu)_{\text{ren.}} = e A_\mu [1 + (R_a^e + 2\, R_b^e) f^2]\,.$$

---

*) Vgl. die analoge Rechnung in [7]), Seite 542.

**) Vgl. hierzu z. B. S. III (1. 68).

Nun zeigt die Integration über x'' und p, dass man es eigentlich mit den Ausdrücken

$$\ldots \frac{q^2+M^2}{q^2+M'^2}\, u(q)\, e^{iqx} \text{ bzw. } \ldots HW\, \frac{q^2+M^2}{q^2+M^2}\, u(q)\, e^{iqx} \qquad (54)$$

zu tun hat, wovon der erste unbestimmt ist (daran kann auch die Regularisierung nichts ändern), während im zweiten der Bruch gleich 1 gesetzt werden darf. Eine Analyse solcher, durch die Integration über ein unendliches Zeitintervall bedingter Unbestimmtheiten in der S-Matrix*) zeigt, dass es tatsächlich richtig ist, dem Bruch im ersten Ausdruck (54) den Wert 1/2 zuzuschreiben. Solche Finessen sind dagegen nicht nötig, wenn man die Selbstenergiedichten in der Form (11), (12), (13) einführt.

§ 5. Renormalisation der Kopplungskonstanten.

Bei der Berechnung des anomalen magnetischen Momentes in 4. Ordnung haben wir Korrekturen zu erwarten, die von der Renormalisation von eA_μ und f^2 im Ausdruck 2. Ordnung [(33), zweiter Term] herrühren. In einer konsistenten Theorie müssen die Renormalisationen für alle Prozesse, die man sich im Rahmen dieser Theorie denken kann, dieselben sein, und man kann sie an Hand einfacherer Prozesse bestimmen. Für eA_μ ist dies in § 4 geschehen an Hand der Streuung eines Protons an einem äusseren elektromagnetischen Feld. Für f^2 könnte man analog die Streuung eines Protons an einem „äusseren Mesonfeld" betrachten. Doch bringt das, abgesehen von der Frage, ob ein äusseres Mesonfeld etwas physikalisch Sinnvolles ist, Komplikationen mit sich, auf die wir noch zu sprechen kommen werden.

Besser geeignet ist die Proton-Proton-Streuung. Für diesen Prozess lautet die S-Matrix [D I, Gl. (32)] in 2. Ordnung

$$S^{(2)}(\infty) = \frac{1}{4} f^2 \int d^4x \int d^4x' (\bar{\psi}(x)\gamma_5 \psi(x))(\bar{\psi}(x')\gamma_5 \psi(x')) D_c(x-x'), \qquad (55)$$

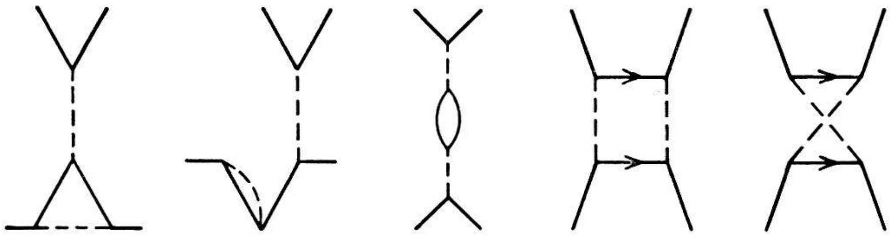
oder bei Einsetzen von Fourierkomponenten gemäss (46), (47),

$$S^{(2)}(\infty) = \frac{1}{4} f^2 \int d^4x \int d^4x' (\bar{u}(q')\, e^{-iq'x} \gamma_5\, u(q)\, e^{iqx}) \times$$
$$\times (\bar{u}(p')\, e^{-ip'x'} \gamma_5\, u(p)\, e^{ipx'}) D_c(x-x')\,. \qquad (56)$$

Die Terme 4. Ordnung schreiben wir hier nicht explizit an; zu ihrer Diskussion charakterisieren wir sie durch die Feynman-Dysonschen

*) Vgl. D II, Seite 1752 und [7]), Seite 542.

Symbole, Fig. 2. Hierzu ist zu bemerken, dass wiederum in den entsprechenden analytischen Ausdrücken die Massenrenormalisation nach der in § 2 dargelegten Methode bereits ausgeführt ist. Während die Terme, die den Figuren d und e entsprechen, keine Ausdrücke der Form (56) geben, also keine Renormalisationen ent-



a b c d e

Fig. 2.
Feynman-Dysonsche Figuren für die Proton-Proton-Streuung in 4. Ordnung.

halten können, zeigt sich, bei Benützung der Beziehungen (48), (49), dass die den Figuren a, b und c entsprechenden Ausdrücke auf die Form

$$\text{const.}\; f^4 \int d^4 x \int d^4 x' \left(\overline{u}(q')\, e^{-i q' x} \gamma_5\, u(q)\, e^{i q x}\right) \times$$
$$\times \left(\overline{u}(p')\, e^{-i p' x'} \gamma_5\, u(p)\, e^{j p x'}\right) D_c(x - x')\, F\left[(q - q')^2\right] \tag{57}$$

gebracht werden können. Das ist auch aus Gründen der Lorentzinvarianz, zusammen mit (48), (49) ersichtlich.

Man kann sich nun F in (57) nach Potenzen von $(q - q')^2$ entwickelt denken. Der erste Term dieser Entwicklung $F[0]$ gibt in (57) einen Ausdruck der Form (56); dieser kann deshalb als Renormalisationsterm angesprochen werden (Fall I). Ebenso gut kann man aber F auch nach Potenzen von $(q - q')^2 + \mu^2$ entwickeln und den vom konstanten Term $F[-\mu^2]$ herrührenden Ausdruck als Renormalisation zu (56) interpretieren (Fall II). Im Falle I definiert man die physikalische Kopplungskonstante an Hand des unrelativistischen Grenzfalles: Für Geschwindigkeiten der Protonen, die klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit, werden in der S-Matrix alle Terme der Form (56) in höherer als 2. Ordnung als Renormalisationen interpretiert. Auf den Fall der Streuung eines Protons an einem äusseren Mesonfeld Φ^a übertragen, bedeutet das, dass die Dichte der Wechselwirkungsenergie für alle Näherungen durch

$$i\,(f\Phi^a)_{\text{ren.}}\, \overline{\psi}\, \gamma_5\, \psi \tag{58}$$

gegeben ist, sofern das äussere Feld Φ^a [wegen der Äquivalenz von $-(q - q')^2$ mit dem Operator $\square$] der Bedingung genügt

$$\square\, \Phi^a = 0\,. \tag{59 I}$$

Im Falle II gibt (58) die Wechselwirkungsenergie für alle Näherungen, sofern Φ^a der Bedingung

$$(\square - \mu^2)\, \Phi^a = 0 \tag{59 II}$$

genügt, also der Gleichung des freien Mesonfeldes (5). In der Elektrodynamik und auch bei unserem Problem in § 4 sind die Fälle I und II identisch, da für Photonen $\mu = 0$. Nun ist ein Feld, das der Gl. (59 I) genügt, und damit auch der unrelativistische Grenzfall in einer Mesontherie wahrscheinlich wenig sinnvoll, und tatsächlich wird sowohl bei MATTHEWS[10]) und NAKABAYASI und SATO[11]) als auch bei WATSON und LEPORE[15]) die Definition II gewählt. Es sei hier aber betont, dass man mit der Definition I ebenfalls zu einer konsistenten Renormalisation gelangt. Auch werden die quantitativen Aussagen der Theorie dadurch nicht geändert. Das soll am Ende dieses Paragraphen bewiesen werden.

Zunächst seien noch die Resultate für die Renormalisation von f zusammengestellt. Man findet bis zur 2. Ordnung

$$f^2_{\text{ren.}} = f^2 [1 + (R_a + R_b + R_c)\, f^2]\,, \tag{60}$$

wo R_a, R_b und R_c von den Termen herrühren, die den Symbolen a, b und c in Fig. 2 entsprechen. Sie werden im Falle II

$$R_a = \frac{i}{4\pi^4} \int\limits_0^1 d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \int d^4 k \, \frac{k^2 - M^2\,\xi^2 + \mu^2\,(\xi - \eta)\,\eta}{[k^2 + \mu'^2 - \mu^2\,\xi + M^2\,\xi^2 - \mu^2\,(\xi - \eta)\,\eta]^3}\,, \tag{61}$$

$$R_b = 2\, R_b^e, \tag{62}$$

$$R_c = \frac{i}{4\pi^4} \int\limits_0^1 d\xi\, \xi\,(1 - \xi) \int d^4 p\, \frac{3\,(p^2 + M'^2) + \mu^2\,\xi\,(1 - \xi)}{[p^2 + M'^2 - \mu^2\,\xi\,(1 - \xi)]^3}\,. \tag{63}$$

R_b^e ist durch (51) gegeben. Im Falle I würde R_a einfacher, da die Summanden $\mu^2(\xi - \eta)\eta$ in Zähler und Nenner wegfielen. R_b würde gleich bleiben. R_c dagegen würde komplizierter.

Die Renormalisationen R_a und R_b stimmen mit den entsprechenden Grössen, die NAKABAYASI und SATO[11]) für ein neutrales Mesonfeld finden, überein, falls man ihre Ausdrücke regularisiert. [Dann fallen dort wegen (27) gewisse additive, von μ und M unabhängige Konstanten weg]. R_c wird in der japanischen Arbeit doppelt so gross, weil dort auch Neutronen an die Mesonfelder gekoppelt sind. Diese geben für R_c in den virtuellen Zwischenzuständen denselben Beitrag wie die Protonen. Mathematisch äussert sich das darin, dass man nicht nur eine Spurbildung bezüglich der γ-Matrizen, sondern auch bezüglich der Matrizen des isotopen Spins auszuführen hat. Das gibt gerade den Faktor 2.

Nach (52) und (60) erwarten wir bei der Rechnung in 4. Ordnung folgende Renormalisationsterme zum Pauli-Term (36)

$$-\mu^{(2)} f^2 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu} [R_a^e + R_b^e + R_a + R_b + R_c] f^2, \tag{64}$$

wobei die R in (35), (51), (61), (62) und (63) gegeben sind.

Versucht man, die Renormalisation von f an Hand der Streuung eines Protons an einem „äusseren Mesonfeld" zu bestimmen, so ergeben sich zwei Komplikationen.

Erstens hat bei einer Wechselwirkungsenergiedichte vom Typus

$$H = j\, \Phi^a + H^{\mathrm{I}} \tag{65}$$

($j = i f \overline{\psi} \gamma_5 \psi$, $\Phi^a =$ äusseres Mesonfeld (c-Zahl); H^{I} ist durch (3) gegeben) die Subtraktion der Mesonselbstenergie in H^{I} auf die Renormalisation in 2. Ordnung keinen Einfluss (Φ kommutiert ja mit $j\, \Phi^a$), und der R_c entsprechende Ausdruck würde im Falle I ohne Regularisierung quadratisch divergieren und wäre im Falle II nicht definiert (auch mit Regularisierung nicht). Dem kann man abhelfen, indem man statt des äusseren Feldes Φ^a seine Quellen

$$j^a = (\Box - \mu^2)\, \Phi^a \tag{66}$$

in die Wechselwirkungsenergie einführt:

$$\tilde{H} = j^a\, \Phi + H^{\mathrm{I}} \tag{67}$$

($j^a = c$-Zahl). Ohne Subtraktion der Selbstenergien in H^{I} erhält man mit (67) dieselbe S-Matrix wie mit (65), weil in allen Termen j^a, mit einer Greenschen Funktion von (66) multipliziert und über den ganzen vierdimensionalen Raum integriert, auftritt. Mit Selbstenergiesubtraktion kommt in 2. Ordnung für den Fall (67) auch ein Beitrag von der Mesonselbstenergie hinzu, so dass die f-Renormalisationen nur logarithmisch divergent werden.

Die zweite Komplikation besteht darin, dass man so die folgende Renormalisation erhält:

$$(f\, \Phi^a)_{\text{ren.}} = f\, \Phi^a \left[1 + \left(\frac{1}{2} R_a + \frac{1}{2} R_b + R_c\right) f^2\right]. \tag{68}$$

Der Vergleich mit (60) zeigt, dass man Φ^a anders als f renormalisieren muss, nämlich

$$\Phi^a_{\text{ren.}} = \Phi^a \left[1 + \frac{1}{2} R_c f^2\right]. \tag{69}$$

Das gibt zu keinerlei Widersprüchen Anlass und weist höchstens darauf hin, dass weder ein äusseres Mesonfeld noch seine Quellen etwas sehr Sinnvolles sind.

N. B. Dasselbe Problem hätte man auch in der Quantenelektrodynamik. Dort kann man das äussere Feld nur deshalb gleich wie die Ladung des Elektrons renormalisieren, weil dort $R_a + R_b = 0$.

Zum Schluss dieses Kapitels soll im Hinblick auf die oben diskutierten Fälle I und II allgemein gezeigt werden, weshalb es in einer Theorie, die durch Renormalisierung divergenzfrei gemacht werden kann, bis zu einem gewissen Grade reine Konventionssache ist, welchen Anteil man von den ohne Regularisierung endlichen Termen zu den beobachtbaren Grössen zählen will und welchen man als Renormalisation interpretieren will. Die Reihenentwicklungen der beobachtbaren Grössen nach Potenzen der physikalischen (renormalisierten) Kopplungskonstanten f_r bekommen bei einer andern Renormalisierung zwar andere Koeffizienten; der Wert von f_r muss dann aber konsequenterweise so geändert werden, dass der numerische Wert der Reihe, die man (durch Vergleich mit dem Experiment) zur numerischen Bestimmung von f_r benützt, ungeändert bleibt. Daraus wird folgen, dass auch die numerischen Werte aller andern Reihen gleich bleiben.

Nennen wir die mathematische Kopplungskonstante wie bisher f. Setzen wir voraus, dass die Theorie mit einer bestimmten Renormalisation

$$f_r^2 = f^2[1 + R_2 f^2 + R_4 f^4 + R_6 f^6 + \cdots] \tag{70}$$

für die beobachtbaren Effekte endliche Resultate liefert. Irgendein Operator, der beobachtbare Grössen beschreibt (z. B. Streuquerschnitte), wird von der Theorie durch eine Reihe in f_r mit endlichen Koeffizienten gegeben. Bezeichnen wir einen Erwartungswert dieses Operators, den wir mit dem Experiment vergleichen können, mit $\sigma_{\exp}$, so ist

$$\sigma_{\exp} = A f_r^2 [1 + A_2 f_r^2 + A_4 f_r^4 + A_6 f_r^6 + \cdots]. \tag{71}$$

Dabei ist der Einfachheit halber angenommen, dass der erste Term der Entwicklung mit f_r^2 beginnt; das ist jedoch nicht wesentlich. $A, A_2, A_4, \ldots\ldots$ sind auch ohne Regularisierung endlich. Ersetzen wir gemäss (70) f_r durch f, so wird

$$\begin{aligned}\sigma_{\exp} = A\{&f^2[1 + R_2 f^2 + R_4 f^4 + R_6 f^6 + \cdots] + \\ &+ A_2 f^4[1 + 2R_2 f^2 + (R_2^2 + 2R_4) f^4 + \cdots] + \\ &+ A_4 f^6[1 + 3R_2 f^2 + \cdots] + A_6 f^8 + \cdots\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\exp} = A\{&f^2 + [R_2 + A_2] f^4 + [R_4 + 2R_2 A_2 + A_4] f^6 + \\ &+ [R_6 + (R_2^2 + 2R_4) A_2 + 3R_2 A_4 + A_6] f^8 + \cdots\}.\end{aligned} \tag{72}$$

Nun nehmen wir eine Umdefinition der Renormalisierung vor:

$$R_i \to R_i', \qquad A_i \to A_i', \qquad f_r \to f_r'. \tag{73}$$

Natürlich muss dabei z. B. gelten

$$R_2 + A_2 = R_2' + A_2',$$

da Koeffizienten der Entwicklung (72) nach Potenzen der unrenormalisierten Kopplungskonstanten durch die Störungsrechnung eindeutig definiert werden. Allgemein muss deshalb verlangt werden

$$\left.\begin{aligned} A &= \text{invariant} \\ R_2 + A_2 &= \text{invariant} \\ R_4 + 2\,R_2\,A_2 + A_4 &= \text{invariant} \\ R_6 + (R_2^2 + 2\,R_4)\,A_2 + 3\,R_2\,A_4 + A_6 &= \text{invariant} \\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Unter „invariant" ist bei dieser Betrachtung immer die Invarianz gegenüber den Umdefinitionen (73) gemeint. Die A_i sollen natürlich nur um Beträge geändert werden, die auch ohne Regularisierung endlich sind. Die ohne Regularisierung vorhandenen Divergenzen in den R_i werden dadurch nicht stärker. Im Fall der pseudoskalaren Mesonen divergiert z. B. R_2 logarithmisch; es wird nach (74) um einen endlichen Betrag geändert. R_4, das wieder eine R_2-Renormalisation zu R_2 enthält, divergiert mindestens wie das Quadrat eines Logarithmus. Aus der dritten Gleichung (74) sieht man, dass es sich höchstens um einen logarithmisch divergenten Betrag ändert.

Den numerischen Wert der physikalischen Kopplungskonstanten f_r können wir durch Vergleich mit einem experimentell gemessenen σ_{exp} auf Grund von (71) bestimmen. Analog bestimmt sich der Wert von f_r' aus

$$\sigma_{\text{exp}} = A\,f_r'^2[1 + A_2'\,f_r'^2 + A_4'\,f_r'^4 + A_6'\,f_r'^6 + \cdots]. \tag{75}$$

Berechnet man den beobachtbaren Erwartungswert m eines anderen Operators (z. B. ein magnetisches Moment), so muss er sich in der Form

$$m = B\,f_r^2[1 + B_2\,f_r^2 + B_4\,f_r^4 + B_6\,f_r^6 + \cdots] \tag{76}$$

darstellen lassen. Gemäss unserer Voraussetzung sind die B_i bei der ursprünglichen Art der Renormalisation endlich. Wir wollen nun beweisen, dass sich der numerische Wert von m (76) nicht ändert und dass die B_i endlich bleiben, wenn die Umdefinition (73) in konsistenter Weise erfolgt.

Aus den gleichen Gründen wie für (74) muss auch gelten

$$\left.\begin{aligned} B &= \text{invariant} \\ R_2 + B_2 &= \text{invariant} \\ R_4 + 2\,R_2\,B_2 + B_4 &= \text{invariant} \\ R_6 + (R_2^2 + 2\,R_4)\,B_2 + 3\,R_2\,B_4 + B_6 &= \text{invariant} \\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Aus (74) und (77) folgt

$$\left.\begin{aligned} B_2 - A_2 &= \text{invariant} \\ 2\,R_2\,(B_2 - A_2) + B_4 - A_4 &= \text{invariant} \\ (R_2^2 + 2\,R_4)\,(B_2 - A_2) + 3\,R_2\,(B_4 - A_4) + B_6 - A_6 &= \text{invariant} \\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Wir formen m (76) so um, dass f_r sukzessive eliminiert und durch den experimentell gegebenen Wert σ_{exp} (71) ersetzt wird:

$$\begin{aligned} m &= B\,\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} + B\left\{(B_2 - A_2)\,f_r^4 + (B_4 - A_4)\,f_r^6 + (B_6 - A_6)\,f_r^8 + \cdots\right\} = \\ &= B\,\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} + B\,(B_2 - A_2)\left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A}\right)^2 + B\left\{[B_4 - A_4 - (B_2 - A_2)\,2\,A_2]\,f_r^6 + \right. \\ &\quad \left. + [B_6 - A_6 - (B_2 - A_2)\,(A_2^2 + 2\,A_4)]\,f_r^8 + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

So ergibt sich schliesslich

$$\begin{aligned} m &= B\,\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} + B\,(B_2 - A_2)\left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A}\right)^2 + B\,[B_4 - A_4 - 2\,(B_2 - A_2)\,A_2]\left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A}\right)^3 + \\ &\quad + B\,[B_6 - A_6 - 3\,(B_4 - A_4)\,A_2 + (B_2 - A_2)\,(5\,A_2^2 - 2\,A_4)]\left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A}\right)^4 + \\ &\quad + \text{Terme} \sim f_r^{10}. \end{aligned} \qquad (79)$$

Aus (74), (77) und (78) ist leicht zu sehen, dass alle Koeffizienten in der Reihenentwicklung (79) Invarianten sind. Somit ist auch m eine Invariante. Weiter folgt, dass die B_i für die zugelassenen Umdefinitionen der Renormalisation endlich bleiben, da die anderen Grössen in (79) endlich bleiben für jede bestimmte Ordnung der Störungsrechnung. Der Beweis, dass m in eindeutiger Weise von σ_{exp} abhängen muss, unabhängig davon, wie f_r aus f definiert wird, ist viel kürzer, wenn man die inverse Funktion von (70), $f = R^{-1}(f_r)$, benützen will. Jedoch ist es dann nicht so evident, unter welchen Bedingungen die Koeffizienten der Entwicklung von m nach Potenzen von f_r auch ohne Regularisierung endlich bleiben. Die hier verwendete Methode ist dagegen dem Formalismus der Störungstheorie angepasst und verwendet direkt die endlichen physikalischen Kopplungskonstanten.

Diese Invarianz gegenüber „Umeichungen" in der Renormalisierung gilt auch für die Elektrodynamik. Nur ist es dort eindeutig, was man als renormalisierte Elektronenladung zu definieren hat, da die elektrische Ladung eine unmittelbare physikalische Bedeutung hat und direkt messbar ist. (Für sie gilt ja sogar ein Erhaltungssatz.) Dagegen kommt der Mesonkopplungskonstanten wohl keine so direkte physikalische Bedeutung zu; ihr Wert muss indirekt z. B. aus Streuversuchen bestimmt werden.

Wenn für eine beobachtbare Grösse σ_{exp} (71) gilt: $|A_i| < A_{\max}$ für alle i, wo $A_{\max}$ eine feste Zahl ist, so kann die Renormalisation so definiert werden, dass die Reihe (71) schnell konvergiert. Über die Konvergenz der anderen Reihen, z. B. (76), ist damit jedoch nichts bewiesen.

§ 6. Das magnetische Moment in 4. Ordnung.

Für den effektiven Hamiltonoperator (17) findet man in 4. Ordnung, mit den gleichen Bezeichnungen wie in § 4 und mit $d^{16}x \equiv d^4x'\, d^4x''\, d^4x'''\, d^4x''''$,

$$\langle H_F^{(4)} \rangle_{1P,\,0M} = H_a^{(4)} + H_b^{(4)} + H_c^{(4)} + H_d^{(4)} + H_e^{(4)} + H_f^{(4)} + \tag{80}$$

+ Terme, die zum anomalen magnetischen Moment nichts beitragen.

$$H_a^{(4)}(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^6 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16}x\, \overline{\psi}(1)\, \gamma_5 S_c(12)\, \gamma_5 S_c(20)\, \gamma_\mu \times \\ \times S_c(03)\, \gamma_5 S_c(34)\, \gamma_5\, \psi(4)\, D_c(13)\, D_c(24)\,, \tag{80a}$$

$$H_b^{(4)}(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^6 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16}x\, \overline{\psi}(1)\, \gamma_5 S_c(12)\, \gamma_5 S_c(20)\, \gamma_\mu \times \\ \times S_c(03)\, \gamma_5 S_c(34)\, \gamma_5\, \psi(4)\, D_c(14)\, D_c(23)\,, \tag{80b}$$

$$H_c^{(4)}(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^6 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16}x \{\overline{\psi}(1)\, \gamma_5 S_c(10)\, \gamma_\mu S_c(02)\, \gamma_5 \times \\ \times S_c(23)\, \gamma_5 S_c(34)\, \gamma_5\, \psi(4) + (\leftarrow)\} D_c(13)\, D_c(24)\,, \tag{80c}$$

$$H_d^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16}x \{\overline{\psi}(1)\, \gamma_5 S_c(10)\, \gamma_\mu S_c(02)\, \gamma_5 \times \\ \times S_c(23)\, \gamma_5 [i\varepsilon(24)\, S(34) + 2i\overline{S}(34)]\, \gamma_5\, \psi(4) + (\leftarrow) + \\ + \overline{\psi}(1)\, \gamma_5 S_c(10)\, \gamma_\mu [i\varepsilon(03)\, S(02) + 2i\overline{S}(02)]\, \gamma_5 \times \\ \times S_c(23)\, \gamma_5 S_c(34)\, \gamma_5\, \psi(4) + (\leftarrow)\} D_c(14)\, D_c(23)\,, \tag{80d}$$

$$H_e^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16}x \{\overline{\psi}(1)\, \gamma_5 S_c(10)\, \gamma_\mu S_c(02)\, \gamma_5 \times \\ \times [i\varepsilon(24)\, S(23) + 2i\overline{S}(23)]\, \gamma_5 S_c(34)\, \gamma_5\, \psi(4) + \\ + (\leftarrow)\} D_c(12)\, D_c(34)\,, \tag{80e}$$

$$H_f^{(4)}(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^7 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16}x\, \overline{\psi}(1)\, \gamma_5 S_c(10)\, \gamma_\mu \times \\ \times S_c(02)\, \gamma_5\, \psi(2)\, Sp(\gamma_5 S_c(34)\, \gamma_5 S_c(43)) \times \\ \times \{D_c(13)[i\varepsilon(23)\, D(24) + 2i\overline{D}(24)] + \\ + D_c(23)[i\varepsilon(13)\, D(14) + 2i\overline{D}(14)]\}. \tag{80f}$$

Die (80a) — (80f) entsprechenden Feynman-Dysonschen Symbole sind in Fig. 3, a—f, zusammengestellt. Die Ausdrücke, die den Symbolen g und h entsprechen, kompensieren sich gerade, wie das auch in der Quantenelektrodynamik der Fall ist.

Zur Ausrechnung von (80a)—(80f) setzt man die Fourierdarstellungen (14), (40) und (41) für S_c, S und $\overline{S}$ ein und die entsprechenden Fourierdarstellungen für D_c, D und $\overline{D}$. Ebenso ersetzt man ψ und $\overline{\psi}$ durch Fourierkomponenten (46) und (47). Die Terme, die Produkte von ε mit S oder D enthalten, lassen sich, genau wie in § 4,

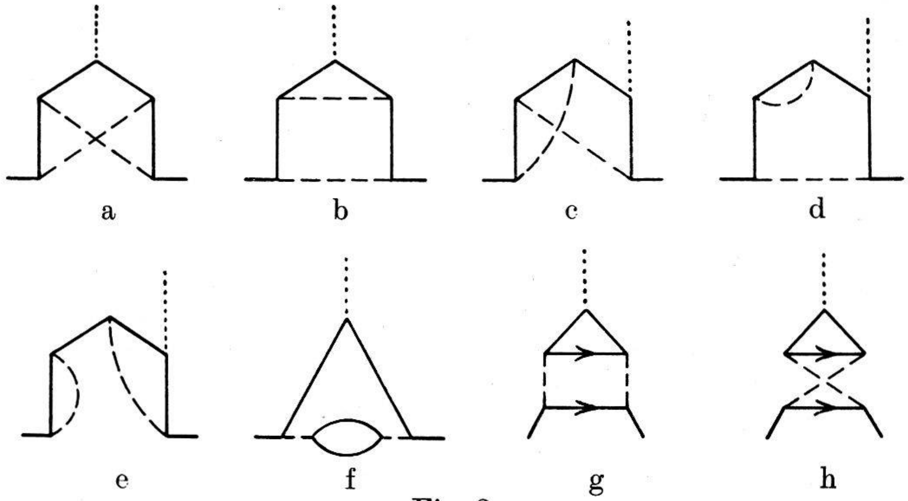


Fig. 3.

Feynman-Dysonsche Figuren für die Streuung eines Protons an einem äusseren elektromagnetischen Feld in 4. Ordnung, soweit sie zum anomalen magnetischen Moment beitragen.

durch Integration über ein x und eine Variable p oder k so umformen, dass die S- oder D-Funktion dasselbe Argument bekommt wie die ε-Funktion. Von hier an ist die Lorentzinvarianz der Ausdrücke evident. Für die so erhaltenen $\overline{S}$ und $\overline{D}$ setzt man ebenfalls die Fourierdarstellung ein. Der Rest der Rechnung verläuft analog wie bei Karplus und Kroll[7]). Alle x-Integrationen geben δ-Funktionen, und es bleiben zwei nichttriviale Integrationen über „Impulse" p oder k übrig. Die Brüche fasst man mit Feynmans Formel (43) zusammen. Durch Schiebungen von der Art (44) werden die Nenner rein quadratisch in der Variablen k oder p gemacht, über die man integrieren soll. Nach Feynman[4]) ist

$$\int d^4k \,\frac{(1;k_\sigma;k_\sigma k_\varrho)}{(k^2+A)^3} = \left(\frac{\pi^2 i}{2A};\,0;\,\frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\varrho}\int d^4k\,\frac{k^2}{(k^2+A)^3}\right), \tag{81}$$

$$\int d^4k\,\frac{(1;k_\sigma;k_\sigma k_\varrho)}{(k^2+A)^4} = \int d^4k\,\frac{(1;k_\sigma;\frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\varrho}\,k^2)}{(k^2+A)^4} =$$
$$= \left(\frac{\pi^2 i}{6A^2};\,0;\,\frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\varrho}\,\frac{\pi^2 i}{3A}\right), \tag{82}$$

wobei in A immer ein infinitesimaler negativ-imaginärer Zusatz zu denken ist, der festlegt, wie die Pole bei der k_0-Integration umfahren werden müssen. Wegen (81) und (82) lassen sich die Ausdrücke in den γ-Matrizen vereinfachen. Dank den bequemen Eigenschaften von γ_5 ist das hier etwas einfacher als in der Quantenelektrodynamik. Eine Erleichterung kommt auch dadurch, dass man die zu erwartenden Renormalisationen zum Ausdruck in 2. Ordnung bereits kennt; sie lassen sich leicht vom Rest abspalten, ohne dass es nötig ist, diesen als Funktion von $i\gamma p + M$ usw. zu schreiben.

Nach Abspaltung der Renormalisationen und Ausführung der Impulsraumintegrationen für den Rest bleiben nur noch Integrale über die Feynmanschen Parameter von (43) übrig. Auf Grund der Eigenschaften der Dirac-Matrizen und mit Hilfe der Beziehungen (48), (49) lassen sich alle Ausdrücke in den γ-Matrizen auf die Form

$$\gamma_\mu F[(q-q')^2] \quad \text{oder} \quad (q_\mu - q'_\mu)\, G[(q-q')^2] \quad \text{oder} \quad \sigma_{\mu\nu}(q_\nu - q'_\nu)\, L[(q-q')^2]$$

bringen. Da uns Ladungsrenormalisationen und, wie in 2. Ordnung, Viererdivergenzen und Terme $\sim \partial A_\mu / \partial x_\mu$ oder $\sim \Box A_\mu$ nicht interessieren, schreiben wir nur Terme der Form $\sigma_{\mu\nu}\,(q_\nu - q_\nu')\; L\,[0]$ an. So erhalten wir, wenn wir die Fourierkomponenten (46) und (47) wieder durch $\psi\,(x)$ und $\overline{\psi}\,(x)$ ersetzen,

$$\left.\begin{aligned}
H_a^{(4)} &\to -\,\mu_a^{(4)} f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu}\,,\\
H_b^{(4)} &\to -\,[\mu^{(2)} R_a^e + \mu_b^{(4)}]\, f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu}\,,\\
H_c^{(4)} &\to -\,[\mu^{(2)} R_a + \mu_c^{(4)}]\, f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu}\,,\\
H_d^{(4)} &\to -\,[\mu^{(2)}\, 2\, R_b^e + \mu_d^{(4)}]\, f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu}\,,\\
H_e^{(4)} &\to -\,\mu^{(2)} R_b^e f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu}\,,\\
H_f^{(4)} &\to -\,[\mu^{(2)} R_c + \mu_f^{(4)}]\, f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Wegen $R_b = 2\, R_b^e$ (62) sieht man, dass man wirklich die in (64) erwarteten Renormalisationen erhält, so dass nur noch die renormalisierten Grössen auftreten:

$$\begin{aligned}
\langle H_F^{(2)} + H_F^{(4)} \rangle_{1P,\,0M} = &-\mu^{(2)} f_r^2 \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu})_{\text{ren.}} - \\
&- \mu^{(4)} f_r^4 \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}\, m_{\mu\nu})_{\text{ren.}} +
\end{aligned} \tag{84}$$

+ Terme, die kein anomales magnetisches Moment beschreiben,

$$\mu^{(4)} = \mu_a^{(4)} + \mu_b^{(4)} + \mu_c^{(4)} + \mu_d^{(4)} + \mu_f^{(4)}. \tag{85}$$

Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^2 \equiv (\mu/M)^2, \quad f(v) \equiv v^2 + \delta^2(1-v), \quad g(v) \equiv 1 - \delta^2 v(1-v), \\
&h \equiv (1-\eta)\,v - (\xi-\eta)\,w, \qquad l \equiv \frac{h}{1-\eta}, \\
&N \equiv \eta(1-\eta) f(v) - 2\,\eta(\xi-\eta)\,v\,w + \eta\,\frac{(\xi-\eta)^2}{1-\eta}\,w^2 + w f(\xi)
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

wird

$$\begin{aligned}
\mu_a^{(4)} = {} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{8} \int_0^1 d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^1 dv \int_0^v dw \left\{ \frac{w}{N^2} \left[\xi^2 \left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) \eta (2v - w) + \right.\right. \\
& + \xi(1-\xi)\,\eta\,h(2v-w) - \xi\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)\eta^2 l - (1-\xi)\,\eta^2(1-\eta)\,l^2 + \\
& \left. + \frac{1}{2}\eta^2(1-\eta)^2 l^3 - \frac{1}{2}\xi\,\eta\,h^2(2v-w) \right] + \\
& + \frac{1}{N}\left[-\xi\,w(1-v+2w) - \eta(v-w) + \xi^2 w(1+2w) + \right. \\
& + \xi\,\eta\left(3v - \frac{1}{2}w - v\,w\right) - \frac{3}{2}\eta^2 v + \frac{1}{2}\xi(1-\eta)\,w^2 + \\
& + \left(2\xi - \frac{3}{2}\eta\right) h\,w - 2\,\xi\,\eta\,\frac{1-\xi}{1-\eta}\,w + \frac{3}{2}\eta^2\,\frac{\xi-\eta}{1-\eta}\,w - \\
& \left.\left. - \xi\,\eta\,\frac{\xi-\eta}{1-\eta}\,w + \eta\,l^2 \right]\right\},
\end{aligned} \tag{87a}$$

$$\begin{aligned}
\mu_b^{(4)} = {} & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{8} \left\{ \int_0^1 d\xi \int_0^1 dv \int_0^v dw \int_0^w dt\, \xi^2(1-\xi) \times \right. \\
& \times [\xi(1-\xi) f(v) + t f(\xi)]^{-1} + \\
& + \int_0^1 d\xi \int_0^1 dz \int_0^1 dv \int_0^v dw\, \frac{\xi(v-w)}{z} \left[(4v^2 - 2v) \left[f(v) + \frac{w}{\xi(1-\xi)\,z} f(\xi) \right]^{-1} + \right. \\
& \left.\left. + (2v^3 - v^4) \left[f(v) + \frac{w}{\xi(1-\xi)\,z} f(\xi) \right]^{-2} \right] + \left[\int_0^1 d\xi\, \frac{\xi^3}{f(\xi)} \right]^2 \right\},
\end{aligned} \tag{87b}$$

$$\mu_c^{(4)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{4} \Bigg\{ \int_0^1 d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^1 dz \int_0^1 dv \int_0^v dw\,(v-w)\,\times$$

$$\times \left[4\left[-2\,l^2 + l\,\frac{1-\xi}{1-\eta}\right]\left[z\,(l^2+\delta^2(1-v)) + \frac{w\,f(\xi)}{\eta(1-\eta)}\right]^{-1} + \right.$$

$$+ 2\,l^2\left[l^2 - 2\,l\,\frac{1-\xi}{1-\eta}\right] z\left[z\,(l^2+\delta^2(1-v)) + \frac{w\,f(\xi)}{\eta(1-\eta)}\right]^{-2} +$$

$$+ \frac{1}{\eta(1-\eta)}\left[-\xi\,(v-w)\,l + \left(2\,\xi - \xi^2 - \frac{1}{2}\,\xi\,(v+w) + \xi\,w\,\frac{\xi-\eta}{1-\eta}\right) l^2 - \right.$$

$$\left. - 2\,(1-\xi)\,\eta\,l^3 + \eta\,(1-\eta)\,l^4\right]\left[l^2 + \delta^2(1-v) + \frac{w\,f(\xi)}{\eta(1-\eta)}\right]^{-2} +$$

$$+ \left[-\xi + \frac{3}{2}\,\xi\,(v+w) - 3\,\xi\,w\,\frac{\xi-\eta}{1-\eta} + 2\,(1-\xi)\,\eta\,l - 4\,\eta\,(1-\eta)\,l^2\right]\times$$

$$\left.\times \left[l^2 + \delta^2(1-v) + \frac{w\,f(\xi)}{\eta\,(1-\eta)}\right]^{-1}\right] + \left[\int_0^1 d\xi\,\frac{\xi^3}{f(\xi)}\right]^2 \Bigg\} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^1 d\xi\,\frac{\xi^3}{f(\xi)} \int_0^1 dv \int_0^v dw \int_0^1 dz\,\left[-\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2(v-w)\,w}{f(v) - \delta^2 z\,(v-w)\,w} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\,\frac{\delta^2\,v^2\,(v-w)\,w}{f(v)\,[f(v) - \delta^2(v-w)\,w]} - \frac{1}{4}\,\frac{\delta^2(v-w)\,w}{f(v) - \delta^2(v-w)\,w}\right]. \qquad (87\,\mathrm{c})$$

(Die letzten Terme, die proportional δ^2 sind, fallen weg, wenn die Renormalisation gemäss Fall I von § 5 definiert wird.)

$$\mu_d^{(4)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{4} \int_0^1 d\xi \int_0^1 dz \int_0^1 dv \int_0^v dw \left\{\left[\frac{w\,\xi}{z} - \frac{(1-\xi)\,v^2}{z}\right]\times\right.$$

$$\left.\times \left[f(v) + \frac{w\,f(\xi)}{z\,\xi\,(1-\xi)}\right]^{-1} + \int_0^1 dt\,\frac{2\,\xi\,v^2\,w}{z\,t^2}\left[f(v) + \frac{w\,f(\xi)}{t\,z\,\xi\,(1-\xi)}\right]^{-2}\right\}, \qquad (87\mathrm{d})$$

$$\mu_f^{(4)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 dz \int_0^1 dv\,\xi^2(1-\xi)^2\,v^3\,\times$$

$$\times\left[-3 + z\left(1 - \frac{2\,\delta^2\,\xi\,(1-\xi)}{g(\xi)}\right)\right]\left[(1-v)\,g(\xi) + z\,\xi\,(1-\xi)\,f(v)\right]^{-1}. \qquad (87\mathrm{f})$$

In allen diesen Ausdrücken sind die einfachsten Integrationen über einen oder mehrere der Feynman-Parameter bereits ausgeführt. Die Resultate der restlichen Integrationen sind Funktionen von δ^2. Für π-Mesonen (μ = 275 Elektronenmassen) ist $\delta^2 \approx 0{,}022 \ll 1$. Um analytisch weiter rechnen zu können, beschränken wir uns auf den Grenzfall

$$\delta^2 = 0. \qquad (88)$$

Sollten einzelne Terme dann divergieren, so müsste man natürlich Ausdrücke der Form $\ln \delta$ usw. mitnehmen. Eine nähere Untersuchung zeigt jedoch, dass alle Ausdrücke (87a)—(87f) einzeln endlich bleiben, wenn man $\delta^2 = 0$ setzt. Das steht im Gegensatz zur Elektrodynamik[7]), wo man in den zu $\mu_c^{(4)}$ und $\mu_d^{(4)}$ analogen Termen zunächst eine endliche Photonmasse einführen muss, da sie sonst divergieren würden.

Auch im Grenzfall (88) macht die Ausführung der Integrale (87a) bis (87f) den weitaus grössten Teil der ganzen Arbeit aus. Am langwierigsten sind (87a) und (87c). (87b) ist erheblich einfacher, (87d) und (87f) sind leicht. Viel hängt auch davon ab, in welcher Reihenfolge die Integrationen ausgeführt werden. Bei den ersten Integrationen werden die Ausdrücke stets umfangreicher und spalten sich auf in Terme, die bei den letzten zwei Integrationen einzeln divergieren, wenn man bis exakt zu den Grenzen integriert. Man hat deshalb, soweit nötig,

$$\int_0^1 du \int_0^u dv \ldots \quad \text{durch} \quad \int_{\varepsilon_3}^{1-\varepsilon_1} du \int_{\varepsilon_1}^{u-\varepsilon_2} dv \ldots$$

zu ersetzen. Für $\varepsilon_i \to 0$ müssen sich alle Divergenzen innerhalb jedes Terms $\mu_a^{(4)}, \ldots, \mu_f^{(4)}$ kompensieren, was übrigens eine gute Kontrolle für allfällige Rechenfehler bietet. Alle Integrationen sind analytisch ausführbar. Bei der zweitletzten Integration gewisser Terme stösst man auf die Funktion

$$\varphi(z) = \int_0^z d\zeta \frac{\ln(1+\zeta)}{\zeta}. \tag{89}$$

Die benötigten Eigenschaften dieser Funktion findet man z. B. in Arbeiten von Powell[16]) und Mitchell[17]). Bei der letzten Integration erhält man für alle Terme in (87a), (87b), (87c) und (87f) — abgesehen vom Faktor $(1/2\pi)^4$ — rationale Resultate und Terme der Form

$$\varphi(1) = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \varphi(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \tag{90}$$

In $\mu_a^{(4)}$ sowie in $\mu_f^{(4)}$ heben sich alle transzendenten Terme der Form (90) am Ende weg. In (87c) stösst man noch auf das Integral

$$\int_0^1 dv \frac{\ln v \, \ln(1-v)}{v} = \int_0^1 dv \frac{\ln v \, \ln(1-v)}{1-v} = \zeta(3), \tag{91}$$

wo

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}202 \tag{92}$$

die Riemannsche ζ-Funktion vom Argument 3 bedeutet. Die Resultate sind

$$\left.\begin{aligned}
\mu_a^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \\
\mu_b^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{8}\left[-\frac{13}{24} + \frac{1}{9}\pi^2\right] \\
\mu_c^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}\left[\frac{61}{24} - \frac{2}{9}\pi^2 - \zeta(3)\right] \\
\mu_d^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}\left[\frac{11}{24} - \frac{1}{18}\pi^2\right] \\
\mu_f^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Nach (84), (38), (85) und (93) erhält man somit für das anomale magnetische Moment in 2. und 4. Ordnung in der Näherung $\delta^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\mu^{(2)} f_r^2 + \mu^{(4)} f_r^4 &= -\left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^4 \left[\frac{131}{192} - \frac{1}{18}\pi^2 - \frac{1}{4}\zeta(3)\right] = \\
&= -\left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^2 \cdot 0{,}250 - \left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^4 \cdot 0{,}166\,,
\end{aligned} \tag{94}$$

in Kernmagnetonen $e/2M$ gemessen, während der experimentell gefundene Wert

$$\mu_{\exp} = (+\,1{,}79268 \pm 0{,}00006)\ \mathrm{KM} \tag{95}$$

beträgt[18]). Das magnetische Moment in 4. Ordnung hat also, wie dasjenige 2. Ordnung, das falsche Vorzeichen, wenn man nur ein neutrales Mesonfeld ankoppelt. Für den von LUTTINGER[6]) versuchsweise gebrauchten Wert von $f_r^2/4\pi \approx 36$ wird $\mu^{(2)} f_r^2 \approx -3$, $\mu^{(4)} f_r^4 \approx -22$. Nun sind aber die experimentellen Werte der Kopplungskonstanten selbst grössenordnungsmässig noch unsicher. Auf jeden Fall müssen in einer Theorie mit γ_5-Kopplung die Effekte 4. Ordnung bei der Bestimmung der Kopplungskonstanten mitberücksichtigt werden*). Dann zeigt sich auch, dass man für f_r^2 wesentlich kleinere Werte bekommt[15])[19]). Nehmen wir versuchsweise f_r^2 um einen Faktor 10 kleiner, so wird $\mu^{(2)} f_r^2 \approx -0{,}3$, $\mu^{(4)} f_r^4 \approx -0{,}2$.

Die Resultate (93) stimmen in Vorzeichen und Grössenordnung mit den entsprechenden Ergebnissen in der Arbeit von NAKABAYASI und SATO[11]) überein, worin die magnetischen Momente der Nukleonen in 4. Ordnung der pseudoskalaren Mesontheorie durch nu-

---

*) Vgl. hierzu R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. 76, Seite 783.

merische Integration für $\delta^2 = 0{,}022$ abgeschätzt werden. Immerhin ergeben sich Abweichungen, die jedoch nicht mehr als etwa 15% betragen, ausser im Falle von $\mu_c^{(4)}$, wo sich ein Unterschied um einen Faktor 3,5 ergibt.

Eine Möglichkeit, diesen Unterschied zu erklären, könnte darin liegen, dass die Approximation (88) schlecht ist. Während in der japanischen Arbeit ein maximaler Fehler von wenigen Prozent angegeben wird, ist der Fehler, der durch das Nullsetzen von δ^2 entsteht, schwierig abzuschätzen. Er beträgt für das magnetische Moment in 2. Ordnung etwa 5%. Nur im Ausdruck $\mu_f^{(4)}$ kann man, wegen der besonderen Form des Nenners in (87f) leicht zeigen, dass der Fehler nicht mehr als etwa 1% betragen kann. Tatsächlich stimmt $\mu_f^{(4)}$ bis auf wenige Prozent mit dem entsprechenden Resultat von Nakabayasi und Sato überein (abgesehen von einem Faktor 2, der in der japanischen Arbeit für diesen speziellen Term, und nur für diesen, hinzukommt, weil dort auch Neutronen an das Mesonfeld angekoppelt sind. Vgl. die Bemerkung hierzu in § 5 der vorliegenden Arbeit).

Eine zweite Möglichkeit könnte in der verschiedenartigen Renormalisierung der Kopplungskonstanten gesucht werden. Da in der japanischen Arbeit keine Regularisierung verwendet wird, unterscheiden sich die Renormalisationskonstanten dort von den unsrigen um endliche Summanden. Das hat dort z. B. zur Folge, dass das Neutron vom geladenen Mesonfeld her eine endliche elektrische Ladung $\sim f^2$ bekommt (die mit $\sum_i c_i = 0$ verschwinden würde), wodurch Ladungserhaltung und Eichinvarianz verlorengehen. Wahrscheinlich haben diese Differenzen bei der Renormalisierung jedoch keinen Einfluss auf die Berechnung des anomalen magnetischen Momentes.

Das Endresultat (94) stimmt mit demjenigen von Nakabayasi und Sato im Vorzeichen überein. Beide Arbeiten kommen demnach zu der Feststellung, dass das magnetische Moment des Protons durch neutrale pseudoskalare Mesonfelder bis in 4. Ordnung nicht richtig wiedergegeben werden kann. Nach Nakabayasi und Sato ist es in einer pseudoskalaren geladenen oder symmetrischen Theorie möglich, das richtige Protonmoment zu erhalten, jedoch wird dann das magnetische Moment des Neutrons falsch. Die besten Möglichkeiten, um die Momente für Proton und Neutron in einer pseudoskalaren Theorie bis zur 4. Ordnung richtig zu bekommen, scheint die Kombination einer symmetrischen mit einer neutralen Theorie zu bieten. Man hat dann aber Werte der Kopplungskonstanten nötig, die es wahrscheinlich machen, dass auch die Beiträge noch höherer Ordnungen eine wichtige Rolle spielen.

Wahrscheinlich ist auch von den in der kosmischen Strahlung gefundenen V-Mesonen ein Beitrag zu den magnetischen Momenten der Nukleonen zu erwarten; doch ist im Augenblick noch so wenig über diese schweren Mesonen bekannt, dass es für eine Diskussion ihres Einflusses zu früh ist.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Pauli, möchte ich für sein dauerndes Interesse an dieser Arbeit herzlich danken. Besonderen Dank schulde ich auch Herrn Dr. R. Jost für seine wertvollen Ratschläge beim Beginn dieser Arbeit. Weiter bin ich Herrn Prof. Dr. F. J. Dyson für eine aufschlussreiche Diskussion zu grossem Dank verpflichtet und Herrn Prof. Dr. R. Kronig für einige wertvolle Hinweise.

Literatur.

1) S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **1**, 27 (1946); Z. Koba, T. Tati and S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **2**, 101, 198 (1947); S. Kanesawa and S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **3**, 1, 101 (1948); S. Tomonaga, Phys. Rev. **74**, 224 (1948).
2) J. S. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); Phys. Rev. **75**, 651 (1949); Phys. Rev. **76**, 790 (1949). Im Text mit S I, S II bzw. S III bezeichnet.
3) F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949); Phys. Rev. **75**, 1736 (1949). Im Text mit D I bzw. D II bezeichnet.
4) R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749, 769 (1949); Phys. Rev. **80**, 440 (1950).
5) J. S. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948); Phys. Rev. **75**, 898 (1949); Phys. Rev. **76**, 790 (1949).
6) J. M. Luttinger, Helv. Phys. Acta **21**, 483 (1948); K. M. Case, Phys. Rev. **74**, 1884 (1948); Phys. Rev. **75**, 1440 (1949); Phys. Rev. **76**, 1 (1949); M. Slotnick and W. Heitler, Phys. Rev. **75**, 1645 (1949); S. Borowitz and W. Kohn, Phys. Rev. **76**, 818 (1949); G. Heber, Ann. d. Phys. 6. Folge, **9**, 151 und 169 (1951).
7) R. Karplus and N. M. Kroll, Phys. Rev. **77**, 536 (1950).
8) J. Géhéniau et F. Villars, Helv. Phys. Acta **23**, 178 (1950).
9) G. Källén, Arkiv för Fysik **2**, 187 und 371 (1950).
10) P. T. Matthews, Phil. Mag. **41**, 185 (1950).
11) K. Nakabayasi and I. Sato, Prog. Theor. Phys. **6**, 252 (1951); Science Reports, Tôhoku Univ., first ser., **34**, 170 (1950).
12) R. Jost und J. M. Luttinger, Helv. Phys. Acta **22**, 391 (1949).
13) M. R. Schafroth, Helv. Phys. Acta **22**, 501 (1949).
14) W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
15) K. M. Watson and J. V. Lepore, Phys. Rev. **76**, 1157 (1949).
16) E. O. Powell, Phil. Mag. **34**, 600 (1943).
17) K. Mitchell, Phil. Mag. **40**, 351 (1949).
18) H. Sommer, H. A. Thomas and J. A. Hipple, Phys. Rev. **80**, 487 (1950).
19) H. A. Bethe, Phys. Rev. **76**, 191 (A) (1949).