

# Remarques sur la singularité du temps, l'utilisation d'un formalisme quantique homogène et sur la relation d'incertitude entre le temps et "l'énergie"

Autor(en): **Wilker, P. / Mercier, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **26 (1953)**

Heft III-IV

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-112406>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**Remarques sur la singularité du temps,  
l'utilisation d'un formalisme quantique homogène  
et sur la relation d'incertitude entre le temps et «l'énergie»<sup>1)</sup>**

par **P. Wilker** et **A. Mercier** (Berne)<sup>2)</sup>.

(15 IV 1953.)

*Résumé:* La singularité de la variable temps. Le problème d'homogénéisation. Premier procédé. Deuxième procédé. Particule libre. Potentiel  $-V(x)$ .

**1. La singularité de la variable temps.**

Le formalisme canonique ordinaire (= non homogène), comme le formalisme quantique, mettent en évidence le rôle singulier du temps par rapport à tous les paramètres du genre coordonnée, moment etc. Ni le corset relativiste, qui ne s'applique d'une façon systématique que pour la particule (ou le champ quantique correspondant), ni l'homogénéisation du formalisme canonique, ne sont parvenus à effacer cette singularité. Cette dernière paraît bien être d'ordre physique et non pas seulement mathématique<sup>3)</sup>. Le meilleur moyen de définir l'espace est celui préconisé par LIE qui le fait engendrer par un groupe d'opérations<sup>4)</sup>. S'il est juste de procéder ainsi, — et il convient de le faire non seulement pour l'espace ordinaire, mais pour tout espace employé dans une description physique (configuration, phase, HILBERT...), le temps, lui, n'est pas engendré par un groupe; en revanche, il apparaît, dans tous les cas non-relativistes en tous cas, comme l'actualisation physique du paramètre du groupe (continu) et l'introduction de la relativité ne fait qu'en reporter formellement l'actualité sur un nouveau paramètre.

C'est tout d'abord son sens unique qui donne au temps sa singularité. C'est pourquoi il est artificiel d'intégrer le temps à l'ensemble des coordonnées de tel ou tel espace en cause. Si c'est cependant, ce que fait la théorie de relativité dans la forme minkowskienne par

---

<sup>1)</sup> Une note préliminaire a été présentée sous le titre «Beziehung einer Unbestimmtheitsrelation von Energie und Zeit zum homogenen kanonischen Formalismus» au Congrès International de Mécanique à Istamboul, 1952.

<sup>2)</sup> Hommage au professeur Albert Perrier pour son jubilé scientifique.

<sup>3)</sup> Voir, pour plus ample information, une étude parue dans les Stud. phil., X, 85 (1950).

<sup>4)</sup> Voir H. MARGENAU, The Nature of Physical Reality (New York, 1950), spécialement le chap. 7.

exemple, de nombreux auteurs se sentent tenus de rappeler qu'une différence persiste; pour le voir, on s'en référera à l'absurdité qu'il y aurait à passer de la « succession » physiquement possible

$$x_1, x_2, x_3 = x_1, \text{ pour des époques } t_1 < t_2 < t_3,$$

à « l'ordre » physiquement impossible

$$t_1, t_2, t_3 = t_1 \text{ pour des positions } x_1 < x_2 < x_3.$$

Cette absurdité se manifeste dans toute théorie qui fait usage d'une équation dynamique dont les solutions ne sont définitivement déterminées que par la fixation de conditions initiales (Newton, ... SCHRÖDINGER, ...). On remarquera qu'elle n'est pas en contradiction avec une équation de continuité à cause de l'usage que fait cette dernière du vecteur de la densité de courant.

C'est ensuite la distinction réversible—irréversible qui renforce la singularité du temps. Dans le formalisme canonique, on voit qu'il y a deux types de réversibilité, celle des  $dq_k$ , qui est une réversibilité géométrique, et celle des  $dp_k$  qui est dynamique. Dans les traités, on n'explique jamais que la seconde.

Le caractère d'irréversibilité des théories statistiques semble intimement lié non seulement à une référence à l'espace de phase dont l'origine canonique est bien évidente, mais aussi à l'emploi d'équations dynamiques rentrant dans le cadre canonique, de façon qu'on ait quelque chose comme le théorème de LIOUVILLE qui, sans être encore part intégrante de la théorie statistique, en assure néanmoins le bon sens. Le théorème de LIOUVILLE est d'ailleurs l'une des propositions de la physique qui, sans être postulées comme d'autres équations de continuité, mettent le mieux en relief la singularité du temps.

Or (voir ci-dessous), la correspondance entre la mécanique non-quantique et la mécanique ondulatoire n'est nulle part aussi symétrique, que dans un formalisme homogène où le temps  $t$  est considéré comme une coordonnée ayant perdu, formellement en tous cas, sinon actuellement, le caractère singulier commenté ci-dessus. Pour cette raison, il est utile d'examiner l'effet d'une homogénéisation ( $q_1, q_2, \dots, q_l, t \equiv q_{l+1}$ ) aussi bien dans le cadre non-quantique qu'en mécanique ondulatoire. Mais il faut le faire sans perdre de vue ce qui a été dit plus haut, pour en reconnaître les bornes. Les calculs qui suivent n'ont donc pas la prétention d'ôter à  $t$  sa réalité singulière. Le but en est d'une part de montrer comment on peut concevoir et effectuer une homogénéisation du formalisme quantique<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Celle du formalisme de la mécanique préquantique est connu dans ses grandes lignes et sera développé systématiquement ailleurs.

d'autre part d'attirer l'attention sur certains caractères probabilistes et conjointement, sur la relation d'incertitude censée exister entre l'énergie et le temps.

## 2. Le problème d'homogénéisation.

En dynamique analytique classique, il est possible de réunir les  $l$  coordonnées  $q_k$  et le temps  $t = q_{l+1}$  en un ensemble de  $\lambda = l + 1$  coordonnées. On introduit un  $\lambda^{\text{ième}}$  moment conjugué  $p_\lambda$ , les indices grecs variant de 1 à  $\lambda$  et les latins de 1 à  $l$ ; on a alors les équations canoniques dites homogènes

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\alpha} \quad (1)$$

pourvu que l'hamiltonien homogène  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(q_1, \dots, q_\lambda, p_1, \dots, p_\lambda)$  satisfasse à la condition

$$\mathfrak{H} = 0^1). \quad (2)$$

$\mathfrak{H}$  admet la forme particulière

$$\mathfrak{H} = H + p_{l+1} \quad (3)$$

où  $H = H(q_1, \dots, q_l; t; p_1, \dots, p_l)$  est l'hamiltonien ordinaire non homogène.

La règle d'application la plus rapide et en même temps la plus élégante pour obtenir l'équation de SCHRÖDINGER consiste à remplacer les  $\lambda$  moments  $p_\alpha$  par  $\mathbf{p}_\alpha \equiv \hbar/i \partial/\partial q_\alpha$  dans (2) avec (3) appliqué alors à une fonction  $\psi = \psi(q_1, \dots, q_\lambda)^2$ , et l'on a automatiquement

$$\mathbf{H}\psi + \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (\hbar = 1; \mathbf{H} = H(q, t, \mathbf{p})). \quad (4)$$

Mais d'ordinaire, le temps  $t$ , ci-dessus  $q_{l+1}$ , est en mécanique quantique un nombre  $c$  au contraire des  $q_k$ . Si le formalisme doit être vraiment homogène, pourquoi y a-t-il cette différence!

On peut indiquer deux procédés pour atteindre une homogénéisation quantique plus parfaite.

D'une part on peut reporter sur un nouveau paramètre  $\tau$  le rôle de variable indépendante assumé par le temps déjà dans le formalisme inhomogène. D'autre part on peut chercher à formuler les opérations qui transforment l'équation (4) distinguant le temps, en une équation distinguant n'importe quelle variable  $q_\alpha$ .

<sup>1)</sup> Un exposé très complet du formalisme homogène de la mécanique analytique paraîtra dans un ouvrage en préparation.

<sup>2)</sup> Voir H. A. KRAMERS, Grundlagen der Quantentheorie (Leipzig 1938), p. 46.

### 3. Premier procédé.

En utilisant la fonction delta, on peut repousser sur un paramètre  $\tau$  le rôle de variable indépendante en introduisant une nouvelle fonction d'onde  $\varphi(q_1 \dots q_\lambda, \tau)$  égale à

$$\varphi = \sqrt{\delta(t - q_\lambda(\tau))} \psi(q_1 \dots q_\lambda, t).$$

Si l'on pose alors, avec  $g' \equiv dg/d\tau$ ,

$$\mathfrak{H} = q'_\lambda \mathfrak{H},$$

on trouve

$$\mathfrak{H} \varphi + \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0$$

et l'on peut interpréter

$$|\varphi|^2 dV$$

comme la probabilité de trouver le système dans l'état limité à l'élément de configuration homogène  $dV = dq_1 \dots dq_\lambda$ . En vertu des propriétés de la fonction delta, l'équation de continuité en  $\varphi$  est satisfaite si elle l'est en  $\psi$ .

Ce premier procédé ne mène pas très loin parce qu'il repousse formellement l'inhomogénéité sur  $\tau$ , et on pourrait l'appliquer successivement à  $\tau(\sigma)$ , etc. Néanmoins il permet l'évaluation de commutateurs qui n'apparaissent pas dans le formalisme inhomogène. On démontre que

$$\mathbf{p}_\alpha \mathbf{q}_\beta - \mathbf{q}_\beta \mathbf{p}_\alpha = \frac{1}{i} \delta_{\alpha\beta} \text{ pour } \alpha, \beta = 1, \dots, \lambda \quad (5)$$

et que

$$\mathfrak{H} \mathbf{q}_\kappa - \mathbf{q}_\kappa \mathfrak{H} = \frac{1}{i} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\kappa}, \quad \mathfrak{H} \mathbf{p}_\kappa - \mathbf{p}_\kappa \mathfrak{H} = -\frac{1}{i} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\kappa} \quad (\kappa = 1, \dots, \lambda). \quad (6) \text{ et } (7)$$

C'est donc entre  $\mathbf{p}_\lambda$  et  $\mathbf{q}_\lambda = \mathbf{t}$  qu'on obtient, de (5), une relation de commutation dont découle une relation d'incertitude et non pas entre  $\mathbf{H}$  et  $t$ .

En prenant

$$\tilde{F}(\tau) = \int \varphi^* \mathbf{F} \varphi dV$$

pour valeur moyenne de  $F$  dans le formalisme homogène, on établit à partir de (6) et (7) les équations canoniques pour les valeurs moyennes

$$\tilde{q}'_\kappa = \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}}{\partial p_\kappa}, \quad \tilde{p}'_\kappa = -\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}}{\partial q_\kappa}.$$

Pour  $\kappa = k$ , on trouve les relations canoniques inhomogènes bien connues, car  $\tilde{q}_k = \bar{q}_k$  et  $\tilde{p}_k = \bar{p}_k$ , où  $\bar{g} = \int \psi^* \mathbf{g} \psi dv$  est la valeur

moyenne dans le formalisme inhomogène. Quant à  $\varkappa = \lambda$ , on obtient  $\tilde{q}'_\lambda = t'$  et

$$\tilde{p}_\lambda = -\frac{\overline{\partial H}}{dt}.$$

Aussi, lorsque l'hamiltonien ne contient pas explicitement le temps, trouve-t-on

$$\tilde{p}_\lambda = \text{const.}$$

C'est  $-\mathbf{p}_\lambda$  qui est l'opérateur d'énergie (et non pas  $\mathbf{H}$ ). Cette observable a une valeur moyenne constante lorsque  $\partial H/\partial t = 0$ : telle est l'une des démonstrations les plus élégantes du théorème de conservation de l'énergie en théorie quantique. On a d'ailleurs en toute circonstance

$$\tilde{p}_\lambda = -\overline{H}.$$

#### 4. Deuxième procédé.

Soit  $\psi^\lambda(q_1 \dots q_\lambda)$  la solution d'une équation de SCHRÖDINGER

$$[H(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_\lambda; \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{\lambda-1}) + \mathbf{p}_\lambda] \psi = 0 \quad (8)$$

distinguant  $q_\lambda = t$ . On sait que

$$\varrho^t \equiv \varrho^\lambda = \varrho^\lambda(q_1 \dots q_{\lambda-1}; q_\lambda) \equiv |\psi|^2$$

est la densité de probabilité à une époque donnée  $t = q_\lambda$ , soit: la densité de probabilité des variables non distinguées pour la valeur donnée de la variable distinguée.

Il s'agit alors de distinguer une variable quelconque  $q_\delta$  telle que,  $\psi^\delta(q_1 \dots q_\lambda)$  étant la solution d'une «équation transformée» de SCHRÖDINGER,

$$\varrho^\delta(q_1 \dots q_{\delta-1}, q_{\delta+1}, \dots q_\lambda; q_\delta) \equiv |\psi^\delta|^2 \quad (9)$$

fournisse la répartition statistique quantique des variables  $q_1, \dots, q_{\delta-1}, q_{\delta+1}, \dots, q_\lambda$  pour une valeur donnée de  $q_\delta$ .

Or (8) est la transcription quantique de (2) avec (3). Supposons alors l'équation (2) résolue par rapport au moment classique  $p_\delta$  et mise par conséquent sous la forme

$$H^{(\delta)} + p_\delta = 0 \text{ avec } H^{(\delta)} = H(q_1 \dots q_\lambda; p_1 \dots p_{\delta-1}, p_{\delta+1}, \dots p_\lambda). \quad (10)$$

L'hypothèse la plus simple est d'admettre qu'on peut écrire

$$[\mathbf{H}^{(\delta)} + \mathbf{p}_\delta] \psi^\delta = 0. \quad (11)$$

Le passage de (8) à (11) se fera en principe de façon que  $H^{(\delta)}$  soit hermitien dans l'espace où  $q_\delta$  est distingué, et l'on aura une

«conservation en  $q_\delta$ » pour  $|\psi^\delta|^2$ , dont la signification physique n'est cependant pas évidente. Il faut admettre une proposition ayant à peu près la teneur que voici: Le système se manifeste en chaque point à une époque  $t$  comprise entre  $-\infty < t < \infty$ . (Comparer la conclusion à la suite de (27), ci-dessous.)

On remarque de suite que l'application de (11) peut présenter une difficulté d'ordre mathématique. En physique quantique ordinaire,  $\mathbf{H}$  ( $\equiv \mathbf{H}^{(\lambda)}$ ) est, dans tous les cas connus, un polynôme hermitien en les  $\mathbf{p}_x$ . On ne peut s'attendre par contre à ce que  $\mathbf{H}^{(\delta)}$  en soit également un. Il faut donc faire appel à une méthode qui permette de formuler l'opération  $\mathbf{H}^\dagger \psi^\dagger$  pour un opérateur  $\mathbf{H}^\dagger$  quelconque. D'une part, H. WEYL<sup>1)</sup> a indiqué qu'on y parvient en développant  $H^\dagger(q, p)$  en intégrale de FOURIER

$$H^\dagger(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\sigma p + \tau q)} \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad (12)$$

puis en y remplaçant

$$e^{i(\sigma p + \tau q)} \text{ par } e^{-\frac{1}{2}i\sigma\tau} e^{i\tau q} \psi^\dagger(q - \sigma)$$

ce qui fournit une expression de  $\mathbf{H}^\dagger \psi^\dagger$ :

$$\mathbf{H}^\dagger \psi^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}i\sigma\tau} \xi(\sigma, \tau) e^{i\tau q} \psi^\dagger(q - \sigma) d\sigma d\tau. \quad (13)$$

D'autre part, J. VON NEUMANN<sup>2)</sup> a indiqué le procédé que voici: Un opérateur hermitien quelconque  $\mathbf{A}$  se développe selon son spectre

$$\mathbf{A} = \int \chi dE_\chi,$$

et toute fonction  $F(\mathbf{A})$  s'obtient sous la forme

$$F(\mathbf{A}) = \int F(\chi) dE_\chi.$$

On peut montrer que pour toute fonction de l'un des opérateurs  $\mathbf{q}$  ou  $1/i \partial/\partial q$ , les procédés de WEYL et NEUMANN coïncident. Par contre, le procédé de NEUMANN, au contraire de celui de WEYL, ne s'applique pas à une fonction des deux opérateurs non commutables  $\mathbf{q}_k$  et  $\mathbf{p}_k$ . Malheureusement le développement (12) n'est possible que lorsque  $H^\dagger$  remplit certaines conditions de convergence. Nonobs-

<sup>1)</sup> ZS. f. Physik, **46**, 1, 1928.

<sup>2)</sup> Annals of Math., **32**, 1931.

tant cela, on peut *formellement* effectuer une transformation de FOURIER pour calculer  $\xi(\sigma, \tau)$  que l'on réintroduit dans (13) qui s'écrit alors

$$\mathbf{H}^\dagger \psi^\dagger = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i\left[\frac{\sigma\tau}{2} + \tau\mu + \sigma\nu\right]} H^\dagger(\mu, \nu) e^{i\tau q} \psi^\dagger(q - \sigma) d\mu d\nu d\tau d\sigma. \quad (14)$$

L'intégrale converge si l'on impose à  $\psi^\dagger$  des conditions assez fortes. Supposant celles-ci remplies, on peut considérer (14) comme définition de l'opération  $H^\dagger \psi^\dagger$ . Nous traiterons les cas d'une particule unique libre et d'une particule dans un champ.

### 5. Particule libre.

On a les deux équations du type (2)

$$H^{(t)} + p_t \equiv \frac{1}{2} p_x^2 + p_t = 0 = \left(\frac{p_x}{\sqrt{2}}\right)^2 + p_t = \pi_x^2 + p_t, \quad (\pi_x = \frac{p_x}{\sqrt{2}}, \quad m = 1)$$

et

$$H^{(x)} + \pi_x \equiv \pm \sqrt{-p_t} + \pi_x = 0.$$

D'où les «équations de SCHRÖDINGER»

$$(\mathbf{H}^{(t)} + \mathbf{p}_t) \psi(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

$$(\mathbf{H}^{(x)} + \pi_x) \varphi(x, t) =$$

$$= \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty -\sqrt{\mu} \cos \lambda \sigma \varphi(x, t - \sigma) d\mu d\sigma + \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0^1). \quad (16)$$

L'équation (15) admet la solution particulière

$$\psi = e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{avec} \quad \frac{k^2}{2} = \omega. \quad (17)$$

<sup>1)</sup> En effet: Soit

$$\sqrt{-\mathbf{p}} = \int_0^\infty P(\sigma) \cos p\sigma d\sigma; \quad P(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{-\mu} \cos \mu\sigma d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{\mu} \cos \mu\sigma d\mu,$$

$$\text{donc} \quad \sqrt{-\mathbf{p}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{\mu} \cos \mu\sigma \cos p\sigma d\sigma d\mu = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{\mu} \cos \mu\sigma e^{ip\sigma} d\sigma d\mu,$$

et enfin en vertu de (13)  $\sqrt{-\mathbf{p}} \varphi(x, t) = \text{Re} \int_0^\infty \sqrt{\mu} \cos \mu\sigma \varphi(x, t - \sigma) d\sigma d\mu$ . D'où

l'équation (16).

Tentons de prendre le second membre de (17) pour solution  $\varphi$  de (16) également :

$$\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad \varphi(x, t - \sigma) = e^{i\omega\sigma} \varphi, \quad \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{k}{\sqrt{2}} \varphi, \quad (18)$$

donc selon (16),

$$- \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\mu} \cos \mu \sigma e^{i\omega\sigma} d\mu d\sigma + \frac{k}{\sqrt{2}} = 0.$$

L'intégrale étant l'intégrale de FOURIER de  $\sqrt{\omega}$ , on a automatiquement  $k = \sqrt{2\omega}$ , et (18) est bien solution. Mais la fonction  $\psi$  de (17) n'est pas absolument intégrable et l'intégrale diverge. Cela ne doit pas nous étonner, car la théorie quantique ordinaire ne considère pas des fonctions d'onde pareilles comme solutions strictement possibles, si ce n'est comme composantes de paquets d'ondes. (Comparer ci-dessous, à l'équation (26)).

## 6. Potentiel $-V(x)$ .

Les deux équations du type (2) s'écrivent

$$\pi_x^2 - V(x) + p_t = 0 \quad (19)$$

$$\pm \sqrt{V(x) - p_t} + \pi_x = 0, \quad (20)$$

«celles» de SCHRÖDINGER

$$- \frac{1}{2} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - V(x) \psi + \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

$$(\mathbf{H}^{(x)} + \pi_x) \varphi \equiv - \frac{1}{2\pi} \int e^{i\sigma\mu} \sqrt{V(x) - \mu} \varphi(x, t - \sigma) d\mu d\sigma + \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

L'équation (20) montre que  $t$  est variable cyclique, aussi essaiera-t-on comme solution (particulière) de (22) la fonction

$$\varphi_\omega = \chi(x) e^{i\omega t}, \quad (23)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(x)} \varphi &= \chi(x) \mathbf{H}^{(x)} e^{i\omega t} = \chi(x) \left[ - \frac{1}{2\pi} \int e^{i\sigma\mu} \sqrt{V(x) - \mu} e^{i\omega(t-\sigma)} d\mu d\sigma \right] \\ &= \varphi_\omega \left[ - \frac{1}{2\pi} \int e^{i\sigma\mu} \sqrt{V(x) - \mu} e^{i\omega\sigma} d\mu d\sigma \right] \equiv \varphi K(x, \omega) \end{aligned} \quad (39)$$

où l'intégrale est le développement de FOURIER de

$$K(x, \omega) = -\sqrt{V(x) - \omega}.$$

En introduisant (23) dans (22), il reste par conséquent une équation pour  $\chi$ , qui s'écrit

$$\frac{d\chi}{\sqrt{2} dx} = -i K(x, \omega) \chi,$$

d'où la solution particulière

$$\varphi_\omega(x, t) = e^{i \left[ \omega t - \sqrt{2} \int_0^x K(\tau, \omega) d\tau \right]} = e^{i \left( \omega t + \sqrt{2} \int_0^x \sqrt{V(\tau) - \omega} d\tau \right)}. \quad (25)$$

La solution générale s'obtient par superposition de solutions (25) correspondant à un spectre de fréquence  $A(\omega)$ :

$$\varphi(x, t) = \int A(\omega) e^{i\omega t} e^{i\sqrt{2} \int_0^x \sqrt{V(\tau) - \omega} d\tau}. \quad (26)$$

On déterminera  $A(\omega)$  en se donnant  $\varphi(0, t)$  à l'origine des  $x$ , car

$$\varphi(0, t) \equiv \int A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{d'où } A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(0, \sigma) e^{-i\omega\sigma} d\sigma.$$

Or, on démontre<sup>1)</sup> qu'étant donné une densité de probabilité du type (9) et la probabilité  $z(q_1, \dots, q_\lambda) dq_1 dq_2 \dots dq_\lambda$  de trouver simultanément les coordonnées  $q_\kappa$  dans les intervalles  $(q_\kappa, q_\kappa + dq_\kappa)$ , on a, indépendamment des équations de SCHRÖDINGER, mais simplement parce qu'il s'agit d'aléatoires,

$$\varrho^\delta = \frac{z(q_1 \dots q_\lambda)}{\int z dq_1 \dots dq_{\delta-1} dq_{\delta+1} \dots dq_\lambda}.$$

Pour  $x$  et  $t$ , donc,

$$\varrho^x(x, t) = \frac{z(x, t)}{\int z(x, t) dx}, \quad \varrho^t(x, t) = \frac{z(x, t)}{\int z(x, t) dt}.$$

Si l'état est stationnaire en  $t$ ,  $\varrho^t = \varrho^t(x)$  et

$$z(x, t) = \varrho^t(x) \int z(x, t) dx; \quad \int z dt = \varrho^t(x) \int \int z dx dt = \varrho^t(x),$$

puis

$$\varrho^x(x, t) = \frac{z(x, t)}{\int z dt} = \frac{\varrho^t(x) \int z dx}{\varrho^t(x)} = \int z(x, t) dx = \varrho^x(t).$$

<sup>1)</sup> Voir H. CRAMÉR, *Mathematical Methods of Statistics* (1946), p. 268 ff. et p. 292.

Ce calcul prouve que si  $\varrho^t(x)$  est indépendant de  $t$  (état stationnaire en  $t$ ),  $\varrho^x = \varrho^x(t)$  est indépendant de  $x$  (état stationnaire en  $x$ ). Il faut alors que

$$z(x, t) = \varrho^t(x) \varrho^x(t).$$

Soit alors un état stationnaire en  $t$ , de la forme  $\psi^t = a(x)e^{i\nu t}$ , solution particulière de (21), et sa densité de probabilité  $|\psi^t|^2 = \varrho^t$  indépendante de  $t$ ; il faut que pour la solution correspondante  $\psi^x$  de (22), la densité de probabilité  $|\psi^x|^2 = \varrho^x$  ne dépende pas de  $x$ . Pour y satisfaire, on choisira

$$A(\omega) = 0 \text{ pour } \omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \text{ et } \omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \Delta\omega \rightarrow 0$$

de sorte que

$$\psi^x(x, t) = A(\omega_0) e^{i\sqrt{2} \int_0^x \sqrt{V(\tau) - \omega_0} d\tau} e^{i\omega_0 t} \Delta\omega$$

$$\varrho^x = |\psi^x|^2 = |A(\omega_0)|^2 (\Delta\omega)^2.$$

En normant  $\psi^x$ :  $\int |\psi^x|^2 dt = \int |A(\omega)|^2 d\omega = |A(\omega_0)|^2 \Delta\omega = 1$ , on trouve simplement

$$\varrho^x = \Delta\omega \rightarrow 0. \quad (27)$$

Donc: Etant donné un état rigoureusement stationnaire en  $t$ , la probabilité  $\varrho^x$  de trouver la particule à une époque située dans l'intervalle  $(t, t + dt)$  en une position  $x$  donnée s'évanouit.

On rapprochera cette conclusion des estimations faites à propos de la relation d'incertitude censée exister entre le temps et l'énergie<sup>1)</sup>.

Il est entendu que la question capitale qui se pose est de savoir si la distinction d'une coordonnée quelconque  $q_\delta$ , même mathématiquement correcte, a un sens physique, car en fin de compte la grande multitude des expériences atomiques ne confirme sûrement que la distinction du temps  $t = q_\lambda$ , et pas une autre.

<sup>1)</sup> Comparer par exemple aux passages suivants: H. A. KRAMERS, Grundlagen der Quantentheorie (loc. cit.), page 25. — W. PAULI, Wellenmechanik (Hdb. der Physik, XXIV/1), p. 85 et p. 146, note. — E. S. SCHRÖDINGER, Berliner Sitzungsberichte (1931), page 243.