Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 26 (1953)

Heft: III-IV

Artikel: Note sur le lien entre spin et statistique dans la théorie des particules élémentaires

Autor: Rivier, Dominique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112417

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Note sur le lien entre spin et statistique dans la théorie des particules élémentaires

par **Dominique Rivier***).

Division of Physics, National Research Council of Canada, Ottawa, Canada.

(17 IV 1953.)

L'existence d'un lien entre le spin des particules élémentaires et la statistique qui en régit les ensembles a été mise en évidence de manière générale par M. PAULI[1]) comme une conséquence, sous certaines conditions, de l'invariance relativiste de la théorie des champs décrivant ces particules. Plus précisément, soient les deux postulats suivants:

1° *Pour un système de particules libres, c'est-à-dire sans action les unes sur les autres et en l'absence de forces extérieures, la contribution de chaque particule à l'énergie totale du système est définie positive.*

2° *A deux grandeurs physiques observées en deux points distincts sur une surface spatiale de l'espace temps correspondent deux opérateurs commutables dans l'espace de* HILBERT *des états quantiques du système.*

PAULI a montré que l'invariance des équations de mouvement du système de particules par rapport à une transformation continue de LORENTZ jointe au premier postulat entraîne l'application nécessaire de la statistique de FERMI-DIRAC aux ensembles de particules à spin demi-entier ($\hbar$, la constante de PLANCK divisée par 2π, est l'unité de spin). La même invariance jointe au deuxième postulat entraîne la nécessité de la statistique de BOSE-EINSTEIN pour décrire les ensembles de particules à spin entier.

Mais pour l'établissement de ce lien entre spin et statistique, un troisième postulat est nécessaire:

3° *La métrique de l'espace de* HILBERT *des états quantiques du système est définie positive.*

---

*) National Research Laboratories Postdoctorate Fellow.

Ce postulat, généralement admis sans autre commentaire, fait partie de la définition même de l'espace de HILBERT. Cependant, on sait que dans sa *Bakerian Lecture*[2]) du 19 juin 1941 M. DIRAC a envisagé la possibilité de décrire les états des systèmes quantiques dans un espace analogue à l'espace de HILBERT, mais où la métrique est indéfinie. L'interprétation physique de théories quantiques utilisant de tels espaces comme espaces des états du système se heurte à la difficulté des probabilités négatives, liées semble-t-il à une métrique indéfinie. Malgré cette difficulté, il est possible d'étudier les théories quantiques utilisant ces espaces où le troisième postulat n'est plus valable. On trouve alors que l'abandon de ce dernier postulat a une influence décisive sur les conclusions que l'on peut tirer des deux premiers joints à l'invariance relativiste quant au lien entre spin et statistique. En fait, PAULI a montré[3]) que si l'on admet un espace à métrique indéfinie pour décrire les états du système, le lien entre spin et statistique considéré comme une conséquence des postulats 1 et 2 et de l'invariance relativiste disparaît. En d'autres termes, dans de tels espaces on peut, de manière compatible avec ces postulats et l'invariance relativiste, décrire des ensembles de particules à spin demi-entier en utilisant la statistique de BOSE-EINSTEIN, et aussi des ensembles de particules à spin entier en se servant de la statistique de FERMI-DIRAC; cela au prix de l'introduction de probabilités négatives. Le fait que jusqu'à aujourd'hui la nature ne nous a pas encore révélé de particules nécessitant ces descriptions est un argument (provisoire, c'est bien sûr) contre l'introduction d'espaces à métrique indéfinie pour décrire les états des systèmes quantiques.

Quoiqu'il en soit, la présente note a plus spécialement trait au cas des théories quantiques utilisant l'espace de HILBERT à métrique définie positive: le postulat 3 est donc valable.

Revenons aux deux premiers postulats. Leur origine physique apparaît immédiatement: le premier traduit la propriété fondamentale de l'énergie totale d'un système isolé d'être définie positive; le second est motivé par l'indépendance cinématique de deux observations faites en deux points distincts d'une surface spatiale de l'espace temps. Il est important de noter que, dans le cas de la théorie classique, ces deux propriétés peuvent être considérées comme deux conséquences de la théorie de la relativité restreinte: équivalence entre masse et énergie d'une part, et existence d'une vitesse limite supérieure pour la propagation des perturbations énergétiques d'autre part. Cela conduit naturellement à penser que le lien entre spin et statistique peut être une conséquence directe

de l'invariance relativiste de la théorie classique des champs de particules et du principe de quantification de cette théorie (c'est-à-dire du principe qui donne la manière de transcrire la théorie classique dans l'espace de HILBERT des états quantiques), sans qu'il soit nécessaire d'invoquer spécifiquement les postulats 1 et 2.

Habituellement, le principe de quantification est fondé sur le formalisme canonique, soit implicitement, soit explicitement[4]; il utilise soit la correspondance entre crochets de POISSON et commutateurs, soit la correspondance entre transformations canoniques et transformations unitaires. Alors, comme l'a montré PAULI, il est nécessaire de recourir explicitement aux postulats 1 et 2 afin d'établir le lien entre spin et statistique. Le recours nécessaire à ces postulats peut surprendre si l'on adopte le point de vue donné plus haut, car alors 1 et 2 semblent pouvoir perdre leur caractère de postulats pour devenir des conséquences de l'invariance relativiste et du principe de quantification.

Le but de cette note est de signaler que les postulats 1 et 2 peuvent en fait être économisés par l'introduction d'un principe de quantification sans aucun lien avec le formalisme canonique et qui utilise la théorie des groupes continus de transformations. Ce principe est le suivant:

Les opérateurs de la théorie quantique qui correspondent aux constantes de mouvement de la théorie classique forment, dans l'espace de HILBERT *des états quantiques, une représentation des opérateurs infinitésimaux qui définissent les groupes continus de transformations laissant invariantes les équations de mouvement de la théorie classique, et auxquels correspondent les constantes de mouvement.*

Les raisons qui conduisent à l'introduction de ce principe de quantification, et l'application à la théorie des particules élémentaires libres dont il est question ici, ont été données ailleurs[5]. On ne présente donc que l'essentiel de l'argument, en renvoyant pour les détails et les preuves à l'article cité.

On sait que la description classique des particules libres est fournie par des champs d'ondes $\chi_\varrho(x)$ satisfaisant l'équation

$$(\Box - \varkappa^2)\, \chi_\varrho(x) = 0 \tag{1}$$

où $\Box$ désigne le dalembertien $-\partial_\mu \partial^\mu = -g_{\mu\nu}\partial^\mu \partial^\nu$ avec $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4 = ct) = (\vec{x}, x^4)$, et où $g_{\mu\nu}$ représente le tenseur métrique fondamental: $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -1$. En outre $\varkappa = mc/\hbar$, où m est la masse de la particule correspondant

au champ $\chi_\varrho(x)$, $\hbar$ est la constante de PLANCK divisée par 2π et c la vitesse de la lumière.

L'invariance relativiste des équations de mouvement entraîne, en théorie classique, l'existence de dix constantes de mouvement $G_{(i)}$ $i = 1, \ldots 10$, à savoir l'impulsion-énergie P_μ et les moments angulaires généralisés $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, correspondant aux dix opérateurs infinitésimaux $g_{(i)}$, $i = 1, \ldots 10$ du groupe de LORENTZ: les quatre translations p_μ et les six rotations généralisées $m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$. Les constantes de mouvement s'expriment en fonction des champs et des opérateurs infinitésimaux par les formules

$$G_{(i)}[\chi] = \hbar c \int_\Sigma d\sigma_\lambda(y)\, \chi_\varrho^+(y)\, C^\lambda(y)\, g_{(i)}\, \chi_\varrho(y), \quad i = 1 \ldots 10. \tag{2}$$

Dans (2) l'intégrale du second membre est étendue à une surface spatiale quelconque Σ, avec $d\sigma_\lambda(y) = n_\lambda(y)\, d\sigma(y)$, où $d\sigma(y)$ est l'élément de surface et $n_\lambda(y)$ le vecteur unité normal en chaque point avec $n_4 > 0$. L'opérateur $C^\lambda(y)$ qui figure dans la relation (2) apparaît aussi dans la formule

$$\chi_\varrho(x) = \int_\Sigma d\sigma_\lambda(y)\, F_{\varrho\sigma}(x-y)\, C^\lambda(y)\, \chi_\sigma(y) \tag{3}$$

qui généralise de manière invariante l'égalité

$$\chi_\varrho(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (dy)^3\, \delta(\vec{x} - \vec{y})\, \chi_\varrho(\vec{y}, t) \tag{4}$$

servant à la définition de la fonction de DIRAC dans l'espace à trois dimensions. $C^\lambda(y)$ et la distribution $F_{\varrho\sigma}(x-y)$ qui apparaît avec lui dans (3) sont complètement déterminés par les équations de mouvement des champs, en particulier par la densité d'action $L[\chi]$ utilisée par le principe de variation dont ces équations peuvent se déduire. En fait, on a

$$C^\lambda(y) = \frac{i}{\hbar c}\left(V^{L\lambda}(y) - V^\lambda(y)\right) \tag{5}$$

avec

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \chi_\varrho(y))} = \chi_\varrho^+(y)\, V^{L\lambda}(y)\,, \quad \frac{\partial L}{\partial(\partial_\lambda \chi_\varrho^+(y))} = V^\lambda(y)\, \chi_\varrho(y). \tag{6}$$

Le passage à la théorie quantique utilise pour celle-ci la forme de HEISENBERG (*Heisenberg's picture*) des équations de mouvement, où l'état quantique du système n'évolue pas avec le temps. Alors aux

fonctions $\chi_\varrho(x)$ correspondent dans l'espace de HILBERT les opérateurs de champ $\boldsymbol{\chi}_\varrho(x)$, dont les équations de mouvement sont identiques à celles des champs classiques $\chi_\varrho(x)$. Si l'on désigne par $\boldsymbol{G}_{(i)} \equiv G_{(i)}[\boldsymbol{\chi}]$ l'opérateur qui, dans l'espace de HILBERT, correspond à la constante de mouvement $G_{(i)}[\chi]$, le principe de quantification proposé plus haut donne les dix relations

$$\frac{1}{\hbar c}\left[G_{(i)}[\boldsymbol{\chi}],\ \boldsymbol{\chi}_\varrho(x)\right]_- = g_{(i)}\,\boldsymbol{\chi}_\varrho(x), \quad i = 1\ldots 10. \tag{7}$$

dont la compatibilité est assurée par la structure des fonctionnelles $G_{(i)}[\chi]$ données en (2). Les relations (7), jointes à (2) et (3) déterminent de manière unique les relations fondamentales de commutation sous la forme

$$\begin{gathered}\eta(\omega)\,[\boldsymbol{\chi}_\varrho(x),\ \boldsymbol{\chi}_\sigma^+(y)]_\omega = -F_{\varrho\sigma}(x-y),\\ [\boldsymbol{\chi}_\varrho(x),\ \boldsymbol{\chi}_\sigma(y)]_\omega = [\boldsymbol{\chi}_\varrho^+(x),\ \boldsymbol{\chi}_\sigma^+(y)]_\omega = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]_\omega = \boldsymbol{AB} + \omega\boldsymbol{BA}, \quad \omega = \pm 1, \quad \eta(+1) = \pm 1, \quad \eta(-1) = +1.$$

A première vue pourtant, les facteurs ω et $\eta(\omega)$ sont partiellement indéterminés. Et le facteur ω est essentiel dans la question qui nous occupe ici, à savoir le lien entre spin et statistique. En effet, suivant que ω vaut $+1$ ou -1, c'est l'anticommutateur ou le commutateur qui intervient dans les relations fondamentales (8). Et l'on voit alors que la statistique de FERMI-DIRAC doit être utilisée dans le cas où $\omega = +1$, et celle de BOSE-EINSTEIN dans celui où $\omega = -1$.

Or, il se trouve que la valeur de ω et celle de $\eta(\omega)$ sont déterminées par la distribution $F_{\varrho\sigma}(x-y)$ du second membre de (8). Pour s'en rendre compte, il suffit de calculer à partir de (8)

$$\begin{gathered}\eta(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}(dx)^3\left\{[\boldsymbol{\chi}_\varrho(x),\ \boldsymbol{\chi}_\varrho^+(y)]_\omega + [\boldsymbol{\chi}_\varrho(y),\ \boldsymbol{\chi}_\varrho^+(x)]_\omega\right\}_{x^4=y^4} =\\ -\int_{-\infty}^{+\infty}(dx)^3\left\{F_{\varrho\varrho}(x-y) + F_{\varrho\varrho}(y-x)\right\}_{x^4=y^4}\end{gathered} \tag{9}$$

et d'utiliser les propriétés de la distribution $F_{\varrho\sigma}(x-y)$: on voit alors que dans le cas de spin 0,1 (entier) le second membre de (9) est nul, tandis qu'il est défini positif dans le cas de spin $^1/_2$ (demi-entier). Mais on doit demander du premier membre de (9) qu'il jouisse des mêmes propriétés que le second. Et cela n'est possible en général (si on exclut le cas de champs identiquement nuls) que si ω a la valeur -1 dans le cas de spin entier et la valeur $+1$ dans

celui de spin demi-entier. Remarquons en passant que pour ce dernier raisonnement, il faut faire intervenir explicitement le troisième postulat de la métrique définie positive de l'espace de HILBERT.

L'argumentation qui vient d'être esquissée montre donc que l'invariance de la théorie classique des champs par rapport au groupe continu de LORENTZ d'une part, et le principe de quantification proposé ci-dessus d'autre part, déterminent complètement les relations fondamentales de commutations (8) entre les opérateurs des champs; et en particulier la valeur du paramètre ω en fonction du spin de la particule attachée au champ: ce qui n'est autre chose que le lien entre spin et statistique. Les postulats 1 et 2 ne sont pas intervenus dans le raisonnement, et maintenant l'on voit même que ces postulats peuvent à juste titre être considérés comme des conséquences (sous certaines conditions) de l'invariance de la théorie dans le groupe continu de LORENTZ, et du principe de quantification. Dans le même ordre d'idées, il peut être intéressant de noter que le second postulat (qui peut, dans une certaine mesure, être considéré comme une condition nécessaire pour la quantification) est ici directement lié à la possibilité de localiser le champ d'onde $\chi_\varrho(x)$ qui décrit la particule élémentaire. Car cette propriété de la fonction $\chi_\varrho(x)$ de ne dépendre que d'un seul point x de l'espace temps joue un rôle essentiel dans le développement de la théorie tel qu'il vient d'être esquissé, particulièrement dans la définition des constantes de mouvement.

Dans un récent mémoire, M. SCHWINGER[6]) a présenté le lien entre spin et statistique comme une conséquence: premièrement d'un principe de quantification implicitement lié au formalisme canonique; deuxièmement de l'invariance de la théorie par rapport à une transformation continue de LORENTZ; et troisièmement de l'invariance de la théorie par rapport à une symétrie qui combine la conjugaison de la charge avec l'inversion par rapport au temps. Quel que soit l'intérêt de ce point de vue, il semble important de souligner que le lien entre spin et statistique est déjà une conséquence de l'invariance de la théorie par rapport à une transformation continue de LORENTZ, sans qu'il soit nécessaire de considérer l'invariance par rapport à des symétries. Et la présente note ne peut que confirmer l'opinion émise par M. PAULI à la fin de son mémoire de 1940[7]):

„... the connection between spin and statistics is one of the most important applications of the special relativity theory."

Notes.

[1]) W. PAULI, Phys. Rev. **58**, 716 (1940). Consulter aussi du même auteur: Ann. Inst. H. Poincaré **6**, 137 (1936), et encore M. FIERZ, Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939); W. PAULI and F. J. BELINFANTE, Physica **7**, 177 (1940).

[2]) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. A. **180**, 1 (1942).

[3]) W. PAULI, Progress of Theoretical Physics **5**, 526 (1950).

[4]) A la suite de P. JORDAN et W. PAULI, Zeit. f. Phys. **47**, 151 (1928), de nombreux auteurs (M. FIERZ, loc. cit.; P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, seconde édition 1935; W. PAULI, Revs. of Mod. Phys. **13**, 203 (1941), etc.) introduisent pour la quantification la relation

$$i\hbar \dot{\boldsymbol{f}} = [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{f}]_- \tag{7a}$$

comme une condition à satisfaire par l'opérateur d'énergie $\boldsymbol{H}$. Mais les raisons qui entraînent cette condition semblent dans ces travaux se réduire à l'analogie de (7a) avec la relation

$$\dot{f} = \{ H, f \}$$

tirée de la mécanique classique; cette dernière relation est manifestement liée au formalisme canonique, dont (7a) procède alors aussi. Il est toutefois bien clair que (7a) peut aussi être considérée comme une des relations (7), avec $\boldsymbol{G}_{(4)} \equiv \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{H}$ et $g_{(4)} = i \frac{d}{dx^4}$.

[5]) D. RIVIER, Progress of Theoretical Physics (sous presse).

[6]) J. SCHWINGER, Phys. Rev. **82**, 914 (1951). Le lien entre le principe d'action généralisé (utilisé dans le mémoire pour obtenir les relations de commutation) et le formalisme canonique apparaît dans l'usage essentiel des quantités Π_α, conjuguées *canoniques* des champs φ_α.

[7]) W. PAULI, Phys. Rev. **58**, 716 (1940), p. 722.