

# La normalisation des constantes dans la théorie des quanta

Autor(en): **Stueckelberg, E.C.G. / Petermann, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **26 (1953)**

Heft V

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-112426>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## La normalisation des constantes dans la théorie des quanta\*)

par E. C. G. Stueckelberg et A. Petermann.

(Lausanne et Genève.)

(28. III. 53.)\*\*)

*Summary.* This article proposes a mathematical foundation to the method previously employed (STUECKELBERG and RIVIER<sup>1</sup>), (STUECKELBERG and GREEN<sup>2</sup>) to give a definite meaning to the products of invariant distributions such as  $(\Delta_{x-y}^{(1)} D_{x-y}^{(s)} + {}^{(s)}(1))$ ,  $(\Delta_{x-y}^{(1)} \Delta_{y-z}^{(s)} D_{x-z}^{(s)} + \dots)$ , etc. in terms of arbitrary constants  $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_{r(n)}$ . The  $n$ 'th approximation  $\mathbf{S}^{(n)}$  of the  $\mathbf{S}[V]$  matrix (defined for a given space-time region  $V$ ) depends on these  $r(n)$  arbitrary constants in addition to the arbitrary physical parameters (masses  $\kappa, \mu$ , and coupling constants  $e, g, \dots$ ).

In the introduction (§ 1), we see that a definite physical meaning can be given to the masses  $\kappa, \mu$ . A coupling parameter, however, can only be specified in terms of a chosen development of a function  $S(xy, \dots, \kappa, \dots, c_1, \dots)$  of physical significance. However, the terms of the actual correspondence development (in terms of  $e^2$ )  $S = S_2 + S_4 + \dots$  have no physical meaning. Therefore the coefficient  $e^2$  in  $S_2$  has only a mathematical significance. It requires that the functions of  $xy, \dots, S_4, S_6, \dots, S_n$  have all been specified. As this specification involves the  $c_i$ 's, we must expect that a group of infinitesimal operations  $\mathbf{P}_i = (\partial/\partial c_i)_{c=0}$  exists, satisfying

$$\mathbf{P}_i S = h_{ie}(\kappa, \mu, e) \partial S(\kappa, \mu, e, 0, 0, \dots) / \partial e,$$

admitting thus a *renormalization* of  $e$ .

§ 2 contains an outline of the general problem without referring to correspondence.

However the only way of attack being the correspondence principle, we discuss (§ 3) the invariance properties of a classical theory, linear in the DIRAC field. In addition to the Weyl group of Gauge invariance, a group exists whose consequence is the *equivalence theorem between pseudoscalar and pseudovector coupling* with the pseudoscalar meson field. In § 4, we show that the definition of distributions in terms of the  $c_i$ 's is a generalization of the method of M. L. SCHWARTZ<sup>6</sup>). This permits to discuss the *group of normalization* given by the  $\mathbf{P}_i$ 's. § 5 imposes certain restrictions on this group, if we require invariance of  $\mathbf{S}$  with respect to the corresponding classical groups (WEYL and equivalence). The limiting case of photons with zero rest mass then can be defined.

\*) Recherche subventionnée par la Commission Suisse d'énergie Atomique (C.S.A.).

\*\*\*) Le présent travail constitue, à des détails près, une thèse présentée par l'un de nous (P) à l'Université de Lausanne, le 9 mai 1952, pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences.

### 1. Introduction.

Le but du présent article est une mise au point du problème de la normalisation des constantes dont dépendent les amplitudes de probabilités pour processus entre quanta. Il fait ainsi suite à des publications antérieures<sup>1) 2) 5)</sup>. Quelques résultats ont déjà paru sous forme de notes<sup>3) 4)</sup>. La mise au point en question a été grandement facilitée par l'ouvrage de M. L. SCHWARTZ<sup>6)</sup> sur la *Théorie des distributions*.

Un processus est caractérisé par une première répartition de quanta  $N'(\varphi)$  parmi tous les paquets d'ondes ( $\varphi = \varphi(x)$ ) incidents dans une région d'espace-temps  $V$  (caractérisée par  $V(x) = 1$ ), et une seconde répartition  $N''(\varphi)$  parmi les paquets émergents de  $V$ . Le processus a lieu essentiellement dans la région d'évolution  $V$ , séparée du reste de l'univers (caractérisé par  $V(x) = 0$ ) par une couche  $v$  (caractérisée par  $\partial_x V(x) \neq 0$ ). Dans une expérience idéale, la couche  $v$  serait constituée par des compteurs idéaux. Ceux-ci distinguent d'abord entre quanta incidents et émergents (cf. § 1 de I\*). Ensuite ils précisent le nombre de charges portées par chaque quantum, sa masse, son spin, sa parité, sa position dans l'espace  $x$  et sa quantité de mouvement (à  $\Delta x^i \Delta p^i \geq 1/4$  près). L'époque d'observation  $x^4 \cong t$  et l'énergie disponible  $E' = p_1^4 + p_2^4 + \dots$  sont incertains à  $\Delta E \Delta t \geq 1/4$  près. Les amplitudes de probabilité sont ainsi fonctionnelles de  $V(x)$ ,  $N''(\varphi)$  et  $N'(\varphi)$ , et forment la matrice  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}[V(), N''()/N'()] \rightarrow \mathbf{S}[V] = \sum_{N''} \sum_{N'} \mathbf{S}_{N'' N'}[V]; \mathbf{S}_{00} = \mathbf{1} S_{00}[V] \quad (1.1)$$

que l'on doit considérer comme le développement

$$N''! N'! \mathbf{S}_{N'' N'} = S_{\varphi_1''} \cdots S_{\varphi_{N''}''} \mathbf{c}^\dagger(\varphi_1'') \cdots \mathbf{c}(\varphi_{N'}') S[V, \varphi_1'' \cdots \varphi_{N''}'' / \varphi_1' \cdots \varphi_{N'}'] \quad (1.2)$$

avec

$$S[V, \varphi_1'' \cdots / \cdots \varphi_{N'}'] = \int_{x_1''} \cdots \int_{x_{N''}''} \varphi_1^\dagger(x_1'') \cdots \varphi_{N''}^\dagger(x_{N''}'') \varphi_1(x_1') \cdots \varphi_{N'}(x_{N'}') \cdot S[V, x_1'' \cdots / \cdots x_{N'}']; \int_x = \int dx ||-g_{\alpha\beta}||^{1/2} V(x). \quad (1.3)$$

en terme des produits ordonnés pour les opérateurs de création  $\mathbf{c}^\dagger$  et d'annihilation  $\mathbf{c}$ . Seuls les cas où l'étendue temporelle de la région  $V$  est très grande par rapport à celle de  $v$  présentent un intérêt physique. On peut alors nettement distinguer les *processus conservatifs* (auxquels principalement les événements se produisant

\*) La mention *I* se référera à l'article 2).

à l'intérieur de  $V$  contribuent), des *processus non conservatifs* (pour lesquels l'incertitude d'énergie  $\Delta E$  participe au bilan de conservation et qui se déroulent à l'intérieur des couches  $v$  ou tout près d'elles (cf. I § 3, et 2)). Comme nous aurons souvent besoin de relations ne tenant que dans la limite où ces « processus de surface » peuvent être négligés, il est avantageux d'introduire le symbole suivant :

$$\cong \text{ signifie : « à des contributions de surface près ». } \quad (1.5)$$

Si les amplitudes de probabilité sont normalisées et si l'on admet le principe de superposition pour les états  $N(\varphi)$ , la matrice  $\mathbf{S}$  doit être unitaire ( $\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger = \mathbf{1}$ ). Les amplitudes  $S[V, \varphi'' \dots / \varphi' \dots]$  sont alors observables par des procédés statistiques. Les représentations de LORENTZ (paquets  $\varphi_\mu(x)$ ) étant spécifiées par la nature des compteurs ( $\mu = \text{spin, parité, nombre de charge et masse}$ ), les transformées  $S[V, x'' \dots / \dots x']$  sont elles-mêmes observables dès que la normalisation de

$$S_{\varphi_\mu} \varphi_\mu(x) \varphi_\mu^\dagger(y) = D_\mu^{(+)}(xy) = D_\mu^{(-)}(yx) \quad (1.6)$$

a été convenue. En terme de l'opérateur d'ondes  $\Omega_\mu$  (appartenant à la représentation  $\mu$ ) :  $\Omega_\mu(x) \varphi_\mu(x) = \varphi_\mu(x) \Omega_\mu(x) = 0$  et de  $\delta(xy) = || -g_{\alpha\beta} ||^{1/2} \delta(x - y)$ , cette normalisation s'effectue par un facteur  $Z_\mu^2 > 0$ , dit de normalisation :

$$\Omega_\mu(x) D_\mu^{(c)}(xy) = D_\mu^{(c)}(xy) \Omega_\mu(y) = -Z_\mu^2 \delta(xy) \quad (1.7)$$

$$D_\mu^{(c)}(xy) = \frac{i}{2} D_\mu^{(\pm)}(xy) \text{ pour } x^4 \leq y^4. \quad (1.8)$$

Admettons maintenant qu'une matrice  $\mathbf{S}[V]$  ait été trouvée qui satisfasse aux conditions physiques (causalité et unitarité, voir § 2). Une telle matrice peut alors dépendre encore de certains paramètres à normaliser par des *conventions* :

1° *La phase*. De l'invariance et de l'unitarité, il suit que

$$S_{N''0} = S[V, \varphi_1 \varphi_2 \dots / ] \cong; \quad S_{00} = S[V, / ] \cong e^{i\eta[V]} \equiv 1. \quad (1.9)$$

La dernière identité arbitraire est appelée *convention de phase*.

2° *Les masses*. Pour les mêmes raisons, il suit, avec l'aide de la convention (1.9) :

$$\delta(\varphi''/\varphi') + S_{11}[V, \varphi''/\varphi'] \cong \delta(\varphi''/\varphi') e^{-i\alpha' - \beta'}. \quad (1.10)$$

Il est nécessaire que  $\beta'$  soit positif. En effet, la probabilité de trouver, au lieu du seul quantum incident en  $\varphi'$ , d'autres répartitions comprenant plusieurs quanta vaut  $1 - e^{-2\beta'}$ ,  $\beta' > 0$  et implique

que le quantum  $\varphi'$  est instable<sup>2)</sup>. La condition  $\mathbf{S}[V_2] \mathbf{S}[V_1] = \mathbf{S}[V_2 + V_1]$  s'applique à tout  $V = V_1 + V_2$ , dès que la couche des compteurs de quanta émergents de  $V_1$  se confond à celle des compteurs de quanta incidents en  $V_2$ . Elle impose que l'exposant  $-i\alpha' - \beta'$  soit fonction linéaire de la durée  $t'' - t'$  de  $V$ :

$$-i\alpha' - \beta' \equiv -i[\sqrt{\omega'^2 + \Delta(\mu^2)} - \omega'](t'' - t') \quad (1.11)$$

si  $V$  est limité par deux plans temporels  $x^4 \cong t'$  et  $x^4 \cong t''$ . Cet exposant doit dépendre du paquet  $\varphi'$  et de la durée, de telle manière que

$$\psi'(\vec{x}, t) = \varphi'(\vec{x}, t) \exp[-i(\sqrt{\omega'^2 + \Delta(\mu^2)} - \omega')t] \quad (1.12)$$

satisfasse à une équation d'onde invariante. Si

$$\varphi'(\vec{x}, t) = \varphi'(\vec{x}, 0) \exp(-i\omega't), \quad (1.13)$$

$\Delta(\mu^2)$  est indépendant du paquet. Il représente un changement complexe (à partie imaginaire positive) du carré de la masse de repos. Il est ainsi avantageux d'imposer la *convention de masse* suivante à  $\mathbf{S}$ :

$$\text{Partie imaginaire de } S_{11}[V, \varphi''/\varphi'] \cong 0. \quad (1.14)$$

Elle spécifie que  $\Delta(\mu^2)$  est imaginaire. En vertu de (1.12) et (1.13), un quantum stable dans un paquet avec  $\vec{p} \sim \vec{p}'$  se propage maintenant avec la vitesse  $\vec{v} = \vec{p}' (\mu^2 + |\vec{p}'|^2)^{-1/2}$ . Les compteurs parfaits mesurant  $\mu^2$  sont en effet construits de façon à mesurer la masse en terme de  $\vec{v}$  et de  $\vec{p}$ .

<sup>3)</sup> *Les constantes de couplage.* Après l'examen de  $\mathbf{S}_{00}$  et  $\mathbf{S}_{11}$ , il convient de passer à celui de  $\mathbf{S}_{12}$ ,  $\mathbf{S}_{22}$ , etc. En électrodynamique, nous avons en particulier l'émission d'un photon par un électron  $S_{12}[V, \varphi''_\alpha u''^A/u'^B]$  qui a une signification dès que  $\Omega_{AB}(x)$  dépend de  $x$  (champs classiques dans l'éq. d'onde). On peut alors l'utiliser pour définir des constantes de couplage. Dans cette intention, on exprime  $S_{12}$  par un *développement formel en terme de distributions ponctuelles* (mesure de DIRAC et ses dérivées)

$$-i2^{3/2} S_{AB}^\alpha(zxy) = e\gamma_{AB}^\alpha \delta(zx) \delta(zy) + m\gamma_{AB}^{\alpha\beta} \delta_\beta(zx) \delta(zy) + \dots \quad (1.16)$$

On interprète alors les parties réelles des coefficients  $e, m, \dots$  comme les intensités des *pôle* (charge), *dipôle*, *quadrupôle*, etc. *électriques* ( $\mu_0 = (\text{masse de } \varphi_\alpha) \rightarrow 0$ ). Une meilleure interprétation en serait fournie par le développement de  $S_{A''A'B''B'}$  ( $x''y''/x'y'$ ) qui apparaît

dans la collision entre deux électrons. La discussion en sera évidemment facilitée, si on la fait sur l'intégrale :

$$-i 2! 2^2 \int_x \int_y S(xy/x'y') \cong \gamma^\alpha \gamma_\alpha F(x'y') + \gamma^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \partial_\beta G(x'y') + \dots^* \quad (1.17)$$

Pour chaque fonction  $F, G, \dots$  on fait un *développement formel en terme de distributions causales* de masses différentes et de leurs dérivées. La partie réelle  $e^2$  du coefficient de  $D_{\mu_0}^{(e)}$  en  $F$  est alors interprétée comme le carré du pôle électrique, etc.

Toute cette discussion s'applique au cas où l'on a trouvé un  $\mathbf{S}[V]$ . Pour l'instant, on ne connaît que des  $\mathbf{S}[V]**)$  établis par une correspondance classique et par un développement en série de certaines constantes de couplage  $e, m, \dots$  à signification classique. Les détails du procédé de développement en série ont été discutés en I, § 2. Nous relierons ici d'une manière plus précise *Causalité* et *Correspondance*.

### 2. Causalité et correspondance.

Soient  $\varphi_{(s\mu)a}(x)$  les composantes tensorielles ou spinorielles (index  $a$ ) d'un champ quantifié de spin  $s$  et de masse  $\mu$ . Un tel champ est toujours la somme de deux parties à fréquence définie en terme de l'opérateur d'onde  $\Omega_{(s\mu)}$  :

$$2^{1/2} \varphi_{(s\mu)a}(x) = (\varphi_{(s\mu)a}^{(+)} + \varphi_{(s\mu)a}^{(-)})(x); \varphi_{\mu}^{(+)}(x) = \mathbf{S} \mathbf{c}(\varphi_{\mu}) \varphi_{\mu}(x), \varphi_{\mu}^{(-)} = \dots \quad (2.1)$$

Dans les notations suivantes la sommation sur tous les spins et toutes les masses est comprise dans la somme sur  $a^{***})$ . La *condition d'unitarité* s'exprime par un système infini d'équations intégrales ( $S^\dagger(x_1 \dots / \dots y_N) = \bar{S}(y_N \dots / \dots x_1)$  \*\*\*\*)

$$S_{00}^\dagger S_{00} + \sum_N (N!)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^N \int_{x_1} \dots \int_{y_N} S_{0N}^\dagger(/x_N \dots x_1) S_{N0}(y_1 \dots y_N/) \cdot D^{(+)}(x_1 y_1) \dots D^{(+)}(x_N y_N) = 1. \quad (2.3a)$$

\*) Une meilleure interprétation de  $e^2$  est obtenue en développant «l'interaction retardée»  $G(x'' y''/x' y')$  de l'équation inhomogène (BETHE et SALPETER<sup>7</sup>) à laquelle doit satisfaire le noyau de FEYNMAN<sup>8</sup>)  $K_{22}^{(c)}(x'' y'' x' y') = i \int \dots \int \Delta^{(c)}(x'' y), \Delta^{(c)}(y'' x) S_{22}(xy/\xi \eta) \Delta^{(c)}(\xi y') \Delta^{(c)}(\eta x') + \Delta^{(c)}(x'' y') \Delta^{(c)}(y'' x') - \Delta^{(c)}(x' y') \Delta^{(c)}(y'' x'')$ .

\*\*\*) Il est remarquable que dans les  $\mathbf{S}[V]$  ainsi trouvés, on ait  $S(V, x_1 x_2 \dots / \dots x_N) = S[V, x_1 \dots x_N]$ . Le développement peut donc s'effectuer en produits ordonnés  $\varphi^N(x_1 \dots x_N)$  de (5.1).

\*\*\*\*)  $\equiv$  Sommation sur toutes les représentations du groupe de LORENTZ.

\*\*\*\*\*)  $\bar{f}$  = Nombre conjugué complexe de  $f$ .

$$\begin{aligned}
 & S_{00}^\dagger S_{NM}(x_1 \dots x_N / y_1 \dots y_M) + S_{00} S_{NM}^\dagger(x_1 \dots / \dots y_M) \\
 & + \sum_{\text{Perm}} (N! M!)^{-1} \sum_{N'M'}^\infty \dots \sum_{N''M''>0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \\
 & \cdot (n!) \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_{x'_1} \dots \int_{x'_n} \int_{y'_1} \dots \int_{y'_n} S_{N'M'}^\dagger(x_1 \dots x_N / y_1 \dots y_{M-n} x'_n \dots x'_1) \\
 & \cdot S_{N''M''}(y'_1 \dots y'_n x_{N'+1} \dots x_N / y_{M'-n+1} \dots y_M) \\
 & \cdot D^{(+)}(x'_1 y'_1) \dots D^{(+)}(x'_n y'_n) = 0^* \quad (2.3b)
 \end{aligned}$$

La condition de causalité est une condition asymptotique que l'on doit imposer à la solution du système (2.3). Elle a la forme suivante :

Si un premier groupe de  $N$  événements ( $x'_i \sim x''_k \sim \dots \sim x$ ) est dans le futur lointain ( $x^4 - y^4 \rightarrow +\infty$ ) d'un second groupe de  $M$  événements ( $y'_i \sim y''_k \sim \dots \sim y$ ), avec  $N + M = N' + N''$ , le développement de FOURIER doit satisfaire à :

$$\lim S_{N''N'}(x'_1 \dots y'_1 \dots / x''_i \dots y''_k \dots) \rightarrow S_{N''N'}^{(+)}(x'_1 \dots) \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned}
 S^{(+)}(x'_1 \dots) = & \int \dots \int dk_1 \dots dk_N \exp \{i(k_1 x'_1 + \dots + k_i x''_i + \dots)\} \\
 & \cdot s^{(+)}(k_1 \dots k_N, y'_i \dots y''_M) \quad (2.5b)
 \end{aligned}$$

$$s^{(+)}(k_1 \dots k_N, y'_i \dots y''_M) = 0 \text{ pour } k_1^4 + k_2^4 + \dots + k_N^4 < 0. ** \quad (2.5c)$$

Le fait expérimental qu'il existe un spectre discret d'un nombre infini de masses différentes (comprenant les particules dites élémentaires et les états liés entre plusieurs particules élémentaires), semble indiquer que l'équation intégrale (2.3) ne possède un système de solutions causales que si :

1° Toutes les représentations du groupe de LORENTZ (tous les spins) ont été prises en considération.

\*) (2.3) a été écrit pour des spins entiers. La somme sur les permutations est alors à effectuer sur les  $N! M!$  permutations des  $x_i, y_i$ , les fonctions  $S$  étant symétriques par rapport à ces permutations. Pour des spins demi-entiers, on remplacerait  $\frac{1}{2} D^{(+)}(x x')$  par l'anticommutateur

$$\frac{i}{2} \Delta_{AA'}^{(+)}(x x') = -\frac{i}{2} \Delta_{A'A}^{(-)}(x' x) = [\mathbf{v}_A^{(+)}(x), \mathbf{v}_{A'}^{(-)}(x')]_+ \quad (2.4)$$

Les  $S$  deviennent alors antisymétriques pour une permutation de deux événements spinoriels. De plus des facteurs  $\pm 1$  interviennent dans la somme des permutations.

\*\*\*) Les  $S(x, \dots) = S[Vx, \dots]$  dépendent explicitement du domaine d'intégration. Donc (2.5), comme (1.16) et (1.17), ne peut être postulé que si la région d'évolution s'étend sur une grande région d'espace-temps et si  $x^4 - y^4$  reste petit par rapport aux époques qui séparent les  $x^4_i$  des époques d'observation. Notons enfin que la causalité peut être définie pour des métriques plus générales sans référence au développement de FOURIER.

2° Pour un spin  $s$  et une parité  $p^*$ , les masses forment un ensemble dénombrable  $\mu = \mu_{psn}$ .

$$p = 0, 1; \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

A l'époque actuelle, on ne connaît aucun procédé pour discuter le problème formulé par (2.3), (2.5) et (2.6). On doit ainsi se contenter de considérer 1° et 2° comme une hypothèse. On traitera, par la suite, le problème des collisions par la méthode d'approximation exposée en I. On discute donc :

a) Un opérateur  $\mathbf{S}$  qui ne fait intervenir qu'un nombre fini de représentations de LORENTZ, par exemple la restriction aux seuls champs : électron-positron  $\mathbf{u}^\dagger, \mathbf{u}$ , photon  $\varphi_\alpha$  et méson  $\Phi_5$  avec les masses  $\kappa, \mu_0$  et  $\mu$ .

b) La dépendance de  $\mathbf{S}$  (outre des masses  $\kappa, \mu_0$  et  $\mu$  arbitrairement choisies) d'un nombre fini de constantes arbitraires additionnelles  $e, g, f$  et  $m$ . Ces constantes sont définies comme les cofacteurs de certaines actions locales hermitiennes. Ils remplacent, dans une certaine mesure, les représentations omises. Dans notre exemple, les actions locales sont : l'action vectorielle ( $v$ ), pseudovectorielle ( $pv$ ), pseudoscalaire ( $ps$ ) et tensorielle ( $t$ ), soit

$$\begin{aligned} e \mathbf{A}_{(1)}^{(v)} &= e \int \mathbf{J}^\alpha \varphi_\alpha; \quad f \mathbf{A}_{(1)}^{(pv)} = f \int \mathbf{J}^{\alpha 5} \partial_\alpha \Phi_5; \\ g \mathbf{A}_{(1)}^{(ps)} &= g \int \mathbf{J}_5 \Phi_5; \quad m \mathbf{A}_{(1)}^{(t)} = \frac{1}{2} m \int \mathbf{J}^{\alpha\beta} \mathbf{B}_{\alpha\beta}; \\ \mathbf{J}^{\alpha\beta\dots} &= (\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^{AB} \gamma_{AB}^{\alpha\beta\dots} (\mathbf{u}^\dagger \gamma^{\alpha\beta\dots} \mathbf{u}) \sim^{**} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Développant alors  $\mathbf{S} = \mathbf{1} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots$  en termes de puissances des constantes de couplage, on exige que chaque approximation satisfasse aux conditions d'unitarité et de causalité. La série ainsi obtenue

$$\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{S}^{(n)}(\kappa, \mu_0, \mu, e, g, \dots) = \mathbf{1} + \mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_n \quad (2.8)$$

$$\mathbf{S}_1 = i \{ e \mathbf{A}_{(1)}^{(v)} + f \mathbf{A}_{(1)}^{(pv)} + g \mathbf{A}_{(1)}^{(ps)} \} \equiv i \mathbf{A}_1. \quad (2.9)$$

est formellement univoque. Le développement est identique à la

\*)  $p$  distingue le champ tensoriel du champ pseudotensoriel de même spin.

\*\*) Les  $\gamma^\alpha = \gamma^{\alpha A}_B$  sont réels. On a d'autre part  $f_A = \xi_{AB} f^B, \xi_{AB} = -\gamma^A_B$ . Les quatre  $\gamma^{\alpha\beta}_{AB}$  sont ainsi réels, donc hermitiens. Le sont également :  $\gamma^0 = -i\xi$  et  $\gamma^5 = -\gamma_5 = -i\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \equiv \gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}$  ( $\alpha\beta\gamma\delta =$  permutation paire de 1234), les six  $\gamma^{\alpha\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta, \alpha \neq \beta$  et les quatre  $\gamma^{\alpha 5} = \gamma^\alpha \gamma^5 \equiv -\gamma_{\beta\gamma\delta}$ .  $\sim$  est le signe d'ordonnation des opérateurs, c'est-à-dire, si  $2^{1/2} \mathbf{u} = \mathbf{v}^{(+)} + \mathbf{w}^{(-)}, 2 (\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}_B) \sim = \mathbf{v}_A^{(-)} \mathbf{v}_B^{(+)} - \mathbf{w}_B^{(-)} \mathbf{w}_A^{(+)} + \mathbf{v}_A^{(-)} \mathbf{w}_B^{(-)} + \mathbf{w}_A^{(+)} \mathbf{v}_B^{(+)} \equiv (\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})_{AB} (xy)$ , cf. aussi (5.1).



suite  $\mathbf{S}^{(n)}$  purement formelle, obtenue par la représentation d'interaction de TOMONAGA et SCHWINGER, à condition que la région  $V(x) = 1$  soit délimitée par deux surfaces temporelles. Comme cette représentation a été obtenue par une Lagrangienne  $L(u^\dagger, u, \varphi, \Phi)$  fonctionnelle des champs classiques :

$$L(u^\dagger u, \varphi, \Phi) = L^{(u^0)} + L^{(\varphi)} + L^{(\Phi)} + A_1 \equiv L^{(u)} + L^{(\varphi)} + L^{(\Phi)}. \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} L^{(u^0)} &= - \int \frac{1}{2i} [ - (\mathbf{u}^\dagger \Omega) \mathbf{u} + \mathbf{u}^\dagger (\Omega \mathbf{u}) ] \sim; \quad \Omega_{AB}(x) = (\gamma^\alpha \partial_\alpha(x) + \kappa \xi)_{AB} \\ L^{(\varphi)} &= - \int \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{B}_{\alpha\beta} \mathbf{B}^{\alpha\beta} + \mu_0^2 \varphi_\alpha \varphi^\alpha \right] \sim \\ L^{(\Phi)} &= - \int \frac{1}{2} [ \partial_\alpha \Phi_5 \partial^\alpha \Phi_5 + \mu^2 \Phi_5 \Phi_5 ] \sim, \end{aligned} \quad (2.11)$$

la théorie formelle:  $\mathbf{S}[v] = \mathbf{1} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots$  correspond à une théorie classique engendrée par la Lagrangienne  $L$  de (2.10). Nous allons, par conséquent, étudier d'abord le groupe qui laisse invariante la partie bilinéaire en  $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}$ , soit :

$$\begin{aligned} L^{(u)} &= \int \left[ \frac{1}{2i} ((\mathbf{u}^\dagger \partial_\alpha) \gamma^\alpha \mathbf{u} - \mathbf{u}^\dagger \gamma^\alpha (\partial_\alpha \mathbf{u})) + \mathbf{J}^0 \chi_0 + e \mathbf{J}^\alpha \chi_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2m} \mathbf{J}^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + f \mathbf{J}_\alpha^5 \chi_5^\alpha + g \mathbf{J}^5 \chi_5 \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les grandeurs  $\chi$  sont des champs quelconques avec lesquels les particules du champ  $\mathbf{u}$  sont en interaction. Pour fixer les idées, on retrouve l'exemple étudié, si l'on pose:  $\chi_0 = -\kappa$ ,  $\chi_\alpha = \varphi_\alpha$ ,  $m = 0$ ,  $\chi_{\alpha 5} = \partial_\alpha \Phi_5$  et  $\chi_5 = \Phi_5$ .

### 3. Le groupe de jauge.

La Lagrangienne  $L^{(u)}$ , définie en (2.12), dépend des spineurs  $u_A^\dagger$  et  $u_A$ , du tenseur symétrique  $g_{\alpha\beta}$  et des quatre tenseurs  $\chi_\alpha$ ,  $\chi_{\alpha\beta}$ ,  $\chi_5^\alpha$ ,  $\chi_5 = ||g|| \chi_5^*$ .

Les spinotenseurs  $\gamma$  dépendent de  $g_{\alpha\beta}$  par la relation  $\delta \gamma^\alpha = \frac{1}{2} \gamma_\beta \delta g^{\alpha\beta}$ , qui laisse invariant l'anticommutateur  $[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]_+ = 2 g^{\alpha\beta}$ .

Le but du présent paragraphe est de montrer que cette Lagrangienne est invariante par rapport au groupe engendré par les trois paramètres infinitésimaux  $\delta \tau_0$ ,  $\delta \lambda_0$  et  $\delta \lambda_5$ , définis comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u^A &= \delta \Gamma_B^A u^B, \quad \delta u_A^\dagger = - u_B^\dagger \delta \Gamma_A^{\dagger B}; \\ \delta \Gamma &= \frac{3i}{4} \gamma^0 \delta \tau_0 + e \gamma^0 \delta \lambda_0 + i f \gamma^5 \delta \lambda_5; \quad \gamma_B^{0A} = -i \delta_B^A. \end{aligned} \quad (3.1)$$

\*) Souvent, par la suite, pour alléger la typographie,  $\mathbf{u}$ ,  $\chi \dots$  sont imprimés:  $u$ ,  $\chi \dots$ . Le lecteur rétablira lui-même le caractère opératoire de ces grandeurs si besoin est.

En d'autres termes, nous nous proposons donc de voir qu'une modification infinitésimale des paramètres  $\tau_0$ ,  $\lambda_0$  et  $\lambda_5$ , dont paraît a priori dépendre  $L$ , laisse cette dernière inchangée. Les conclusions auxquelles on parvient alors sont les suivantes :

1° La transformation  $\delta\tau_0$  n'est qu'un changement de normalisation de la métrique et par conséquent se trouve être sans intérêt direct pour ce qui va suivre. Nous n'y reviendrons donc pas.

2° La transformation  $\delta\lambda_0$  exprime un changement de la jauge électromagnétique habituelle.

3° La transformation  $\delta\lambda_5$ , elle, montrera que les Lagrangiennes engendrées par des potentiels scalaires, pseudoscalaires et pseudovectoriels reliés entre eux par certaines relations sont équivalentes au sens du théorème d'équivalence bien connu, relatif aux premières approximations de la théorie pseudoscalaire avec couplages  $ps$  et  $pv$ . Elle comprendra entre autres la transformation indiquée par M. L. L. FOLDY<sup>10</sup>). Par analogie avec 2°, nous dirons qu'elle exprime un changement de la jauge mésonique.

Si l'on varie les tenseurs  $g$  et  $\chi$ , conformément à :

$$\delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \delta\tau_0; \quad \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \delta\tau_0; \quad \delta\gamma^\alpha = \frac{1}{2} \gamma^\alpha \delta\tau_0; \quad (3.2)$$

$$\delta\chi_\alpha = -\partial_\alpha \delta\lambda_0; \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\chi_0 &= -2fg\chi^5\delta\lambda_5 \\ \delta\chi_5 &= -2\frac{f}{g}\chi_0\delta\lambda_5 \\ \delta\chi_5^\alpha &= \partial^\alpha\delta\lambda_5 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\chi_{\alpha\beta}\right) = \frac{f}{4!}\chi^{\gamma\delta}\delta\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.5)$$

il s'en suit immédiatement que  $\delta L^{(u)} \cong 0$ . La transformation  $\delta\lambda_0$  (3.3) est le groupe de jauge habituel pour le vecteur  $\chi_\alpha$ . Un champ  $\chi_\alpha$  de masse non nulle (à quatre polarisations) peut être décomposé suivant :

$$\chi_\alpha = \varphi_\alpha - \partial_\alpha \lambda_0; \quad \partial^\alpha(\varphi_\alpha) = 0 \quad (3.6)$$

en un champ à trois polarisations  $\varphi_\alpha$  (agissant sur  $J^\alpha$ ) et un champ scalaire  $\lambda_0$  (sans influence sur  $J^\alpha$ ). On appellera ce groupe, le *groupe électromagnétique*. La transformation  $\delta\lambda_5$  (3.4) montre que le groupe de jauge pseudovectorielle laisse invariant le scalaire

$$\chi_0^2 - g^2 \chi^5 \chi_5 \equiv \chi_0^2 + g^2 (\chi_5)^2 = (a_0^2 + b_5^2); \quad (\equiv, \text{ si } \|g_{\alpha\beta}\| = -1). \quad (3.7)$$

Ce groupe sera appelé *groupe mésonique*.

Ainsi les Lagrangiennes engendrées par tous les potentiels scalaires, pseudoscalaires et pseudovectoriels reliés par

$$\left. \begin{aligned} \chi_0 &= a_0 \cos (2 f \lambda_5) + b_5 \sin (2 f \lambda_5) \\ g \chi_5 &= -a_0 \sin (2 f \lambda_5) + b_5 \cos (2 f \lambda_5) \\ \chi_{\alpha 5} &= \varphi_{\alpha 5} + \partial_\alpha \lambda_5, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

sont équivalentes. La théorie du couplage pseudoscalaire pur  $\mathbf{A}_1 = g \mathbf{A}_1^{(ps)}$ , peut être réalisé par la jauge  $f \lambda_5 = 0$ , si l'on choisit:  $a_0 = -\kappa$ ,  $b_5 = g \Phi_5$ , car  $\chi_0 = -\kappa$ ,  $g \chi_5 = g \Phi_5$ ,  $f \chi_{\alpha 5} = 0$ . Posant ensuite  $f \lambda_5 = -g/2\kappa \Phi_5$  en (3.8), on constate que ce couplage pseudoscalaire pur est en particulier équivalent à un couplage pseudovectoriel

$$\mathbf{A}_1 = f \mathbf{A}_1^{(pv)}, \text{ avec } f = -g(2\kappa)^{-1} \quad (3.10)$$

$$f \chi_{\alpha 5}^* = -\frac{g}{2\kappa} \partial_\alpha \Phi_5 \equiv f \partial_\alpha \Phi_5, \quad (3.11)$$

auquel s'ajoutent des couplages pseudoscalaires et scalaires sans terme linéaire dus à:

$$\left. \begin{aligned} g \chi_5^* &= -\kappa \sin (g \kappa^{-1} \Phi_5) + g \Phi_5 \cos (g \kappa^{-1} \Phi_5) = -\frac{1}{3} \kappa^{-2} (g \Phi_5)^3 + \dots \\ \chi_0^* &= -\kappa \cos (g \kappa^{-1} \Phi_5) - g \Phi_5 \sin (g \kappa^{-1} \Phi_5) \\ &= -\kappa - \frac{1}{2} \kappa^{-1} (g \Phi_5)^2 + \frac{1}{8} \kappa^{-3} (g \Phi_5)^4 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

La correspondance formelle nous fait donc attendre que la série  $\mathbf{S}^{(n)}$  en  $g$  engendrée par l'action locale pseudoscalaire et linéaire:

$$\mathbf{A}_1 = e \mathbf{A}_1^{(v)} + g \mathbf{A}_1^{(ps)}; \quad g \mathbf{A}_1^{(ps)} = \int \mathbf{J}^5 (g \Phi_5), \quad (3.13)$$

soit égale à la série en  $g$  obtenue de l'action locale pseudovectorielle et non linéaire:

$$\mathbf{A}^* = e \mathbf{A}_1^{(v)} + f \mathbf{A}_1^{(pv)} + \sum_{l=2}^{\infty} g^l \mathbf{B}_{(l)} \quad (3.14)$$

avec:

$$\mathbf{A}_1^{(pv)} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{J}^{\alpha 5} (\kappa^{-1} \partial_\alpha \Phi_5) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B}_{(l)} = a_l \int (\mathbf{u}^\dagger \gamma^0 \kappa (i \gamma^5 \kappa^{-1} \Phi_5)^l \mathbf{u})^{\sim *}$$

et

$$a_2 = \frac{1}{2}; \quad a_3 = \frac{1}{3}; \quad a_4 = \frac{1}{8}; \dots \quad (3.16)$$

\*)  $\gamma^0 \frac{A}{B} = -i \delta_{AB}^A$ ;  $(\gamma^5)^2 \frac{A}{B} = \delta_{AB}^A$ ;  $\gamma_{AB}^0$  et  $\gamma_{AB}^5$  sont hermitiennes.

Si l'on veut, lors d'une transformation de jauge, que les actions électriques et mésoniques restent indépendantes l'une de l'autre, il est nécessaire que le moment magnétique disparaisse ( $m = 0$ ). Par contre, une action  $\int \mathbf{J}^{\alpha 5} \varphi_{\alpha 5}$  d'un champ mésonique à spin 1, peut toujours être superposée, sans changer le théorème d'équivalence. On verra pourtant par la suite qu'en théorie quantifiée, la théorie

$$f \varphi_{\alpha 5} = 0; \quad \frac{1}{2} m \mathbf{B}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.17)$$

est la seule qui soit normalisable.

#### 4. Le groupe de normalisation en théorie quantique.

Les méthodes de calcul destinées à évaluer les termes  $\mathbf{S}^{(n)}$  de la suite d'approximations de  $\mathbf{S}$  (cf. (2.8)), qu'elles procèdent par construction différentielle ou intégrale de la matrice  $\mathbf{S}$ , sont amenées à intégrer sur le domaine d'évolution ( $V(x) = 1$ ) des produits de noyaux  $D(xy)$ ,  $\Delta(xy)$ , etc. Il est bien connu que ces produits, considérés comme produits de fonctions, conduisent à des difficultés de sommation (divergences) ainsi qu'à des inconsistances (ambiguïtés telles que perte de l'invariance de jauge dans l'espace de FOURIER, etc.). Or, les  $D, \Delta \dots$  sont des distributions, solutions tempérées d'équations hyperboliques. Leur analyse ressort strictement de la théorie des distributions établie en détail par M. L. SCHWARTZ<sup>6</sup>). A la différence des formalismes récents (DYSON et autres), dans lesquels les divergences sont acceptées comme telles et «renormalisent», au moyen d'une algèbre de grandeurs infinies, les constantes du problème, nous considérons que les produits multiplicatifs  $T$  de distributions  $A, B \dots$ , c'est-à-dire  $T = AB \dots$ , ne sont en général pas définis. Le développement en série, qui fait intervenir de tels produits n'a donc pas de sens précis.

Il est cependant possible de *définir* ces produits  $T$  chaque fois qu'ils apparaissent dans la série en employant le détour suivant: On cherche d'abord une distribution  $Q = \vartheta T$  définie univoquement pour toute association des facteurs de  $\vartheta$  et de  $T$ . Ensuite, par division de  $Q$  par  $\vartheta$ , on obtient la définition de  $T$ , à l'indétermination du problème de la division près. Cette définition peut être ainsi effectuée en deux étapes distinctes:

1<sup>o</sup> Recherche des distributions  $Q$  qui, par division par  $\vartheta$  donneront le produit  $T$  cherché.

2<sup>o</sup> Discussion de l'indétermination provoquée par la division.

Le point 1<sup>o</sup> a été discuté en I et peut se résumer ainsi: Si l'on a à définir une distribution  $T(xy\dots)$ , produit des deux distributions  $A(xy\dots)$ ,  $B(xy\dots)$  selon

$$T(xy\dots) = A(xy\dots) \cdot B(xy\dots), \quad (4.1)$$

on est ramené à la recherche de distributions  $Q$  définies univoquement:

$$Q^{\alpha\beta\dots\gamma}(xy\dots) = \vartheta^{\alpha\beta\dots\gamma}(xy\dots t) T(xy\dots t) \quad (4.2)$$

avec

$$\vartheta^{\alpha\beta\dots\gamma}(xy\dots t) = (x^\alpha - t^\alpha)^{n_\alpha} \dots (y^\beta - t^\beta)^{n_\beta} \dots + \dots \quad (4.3)$$

Les tenseurs  $\vartheta^{\alpha\beta\dots}$  sont des fonctions covariantes, définies dans la région  $V(x) \neq 0$ .  $T$  est alors défini par division de  $Q$  à l'indétermination de cette division près. Un certain ensemble de ces  $\vartheta$  forme un *système définissant*  $\Theta_T$ , définissant  $T$ , si la définition de  $T$  en terme de  $Q$  est faite avec le minimum de constantes arbitraires\*).

De plus, si  $T$  est un produit de la forme

$$T(x\dots u\dots) = \int A(x\dots y\dots) O(y\dots) B(y\dots u\dots) \quad (4.4)$$

défini sur  $R^{n_0}$ , et que les produits:

$$T_1(x\dots y\dots) = A(x\dots y\dots) O(y\dots) \quad (4.5)$$

$$T_2(y\dots u\dots) = O(y\dots) B(y\dots u\dots) \quad (4.6)$$

donnés sur  $R^{n_1}$  et  $R^{n_2}$  respectivement ne sont eux-mêmes déterminés qu'à une certaine combinaison linéaire arbitraire de mesures de DIRAC et de leurs dérivées  $\Sigma \delta a_i \delta^{(i)}(x\dots y\dots)$ ,  $\Sigma \delta b_k \delta^{(k)}(y\dots u\dots)$  près,  $T$  est elle-même indéterminée, en plus des termes  $\Sigma \delta d_l \delta^{(l)}(x\dots u\dots)$ , aux expressions

$$\int \sum_{\gamma} \delta a_i \delta^{(i)}(x\dots y\dots) B(y\dots u\dots) = \sum_{i=0}^{m_1-1} \delta a_i T_{1i}(x\dots u\dots)$$

et  $\Sigma \delta b_k T_{2k}(x\dots u\dots)$  près. On a donc

$$\begin{aligned} \delta T(x\dots u\dots) = & \sum_{i=0}^{m_1-1} \delta a_i T_{1i}(x\dots u\dots) + \sum_{k=0}^{m_2-1} \delta b_k T_{2k}(x\dots u\dots) \\ & + \sum_{l=0}^{m_0-1} \delta d_l \delta^{(l)}(x\dots u\dots) \end{aligned} \quad (4.7)$$

\*) Les entiers positifs  $n_\alpha$ ,  $n_\beta$ , ... ont la valeur minimum nécessaire pour que  $Q$  soit une distribution déterminée.

où les  $T_{\alpha i}$  sont des couches multiples d'ordre  $i + 1$  composées de distributions définies sur  $R^{n_\alpha}$  (\*). Ainsi, sous la forme des  $T_{\alpha i}$  sont immédiatement séparées les divergences d'empiétement, sans avoir recours à un vocabulaire autre que celui de la théorie des distributions (comparer avec A. SALAM<sup>15</sup>).

Il est entendu, comme nous l'avons exposé en I, que la définition n'est nécessaire que pour les distributions du complément causal. La réalité des constantes  $a, b \dots$  est donc imposée.

*Exemple 1:*  $T$  est donné sur  $R^{1**}$ ) par la trace du bi-spineur  $tr(\Delta_{x-y} \Delta_{x-y})$  non défini, comme c'est le cas dans deuxième approximation de la «self-énergie» du photon, par exemple.  $Q_{x-y} = (x-y)^3 tr \Delta_{x-y} \Delta_{x-y}^{***})$  est une distribution  $Q$  déterminée pour toute association de facteurs  $(x^\alpha - y^\alpha), (x^\beta - y^\beta), (x^\gamma - y^\gamma)$  et  $\Delta_{x-y}$ . Par division on obtient:

$$T_{x-y} = tr \Delta_{x-y} \Delta_{x-y} = \frac{Q}{(x-y)^3} \quad (4.8)$$

à une indétermination  $I(x-y)$  près qui satisfait  $(x-y)^3 I_{x-y} = 0$ . Celle-ci ne peut être qu'une combinaison linéaire, arbitraire de la mesure de DIRAC et de ses dérivées d'ordre  $\leq 2$  (support  $x-y=0$ )  $c_0 \delta_{x-y} + c_{1\alpha} \delta_{x-y}^\alpha + c_{2\alpha\beta} \delta_{x-y}^{\alpha\beta}$ . La trace étant un scalaire, l'indétermination se réduit à  $c_0 \delta_{x-y} + c_3 \square \delta_{x-y}$ , car, pour des raisons de symétrie, aucun vecteur constant  $b_\alpha$  ne peut intervenir (cas du «photon scalaire»). Une fois la division effectuée, le calcul de l'élément de matrice qui contient la distribution  $T$  s'effectue de la manière suivante:

$$M(\varphi''/\varphi') = \int \int dx dy V \varphi^{\dagger''}(x) T_{x-y} V \varphi'(y).$$

C'est une régularisation de  $T_{x-y}$  par la fonction  $V \varphi''(y)$  (\*\*\*\*)  $(T_* V \varphi')(x)$ , suivie du produit scalaire de cette régularisée par la fonction  $V \varphi^{\dagger''}(x)$ . D'où:

$$M = ((T_* V \varphi'), V \varphi^{\dagger''}) = (V \varphi^{\dagger''}, (T_* V \varphi')). \quad (4.10)$$

*Exemple 2:* («Renormalisation de la charge»)  $T$  est donnée sur  $R^2$  par le bi-spineur  $\Delta_{x-y} \Delta_{y-z} \Delta_{x-z} = T_{AB}(xyz)$  non défini.

$$\begin{aligned} Q_1(x-y, y-z) &= \vartheta_1(\Delta \Delta D)_{x-y, y-z} = (x-y) (\Delta \Delta D)_{x-y, y-z} \\ Q_2(x-y, y-z) &= \vartheta_2(\Delta \Delta D)_{x-y, y-z} = (y-z) (\Delta \Delta D)_{x-y, y-z} \end{aligned} \quad (4.11)$$

\*) L. SCHWARTZ<sup>6</sup>, Tome I, p. 125. Théorème VIII.

\*\*\*) Espace à  $1 \times 4$  dimensions  $x^\alpha - y^\alpha$ .

\*\*\*\*) 3 est la valeur minimum de l'exposant pour que  $Q$  soit déterminée (cf. I et 4)).

\*\*\*\*\*) Voir index terminologique de M. L. SCHWARTZ<sup>6</sup>, tome II.  $V \varphi'(x)$  est une fonction à décroissance rapide.

sont des distributions déterminées. Les définitions par division

$$1^0 (\Delta\Delta D)_{x-y, y-z} = Q_1/\vartheta_1; \quad 2^0 (\Delta\Delta D)_{x-y, y-z} = Q_2/\vartheta_2$$

sont indéterminées à des couches multiples d'ordre 1 (portées par  $x - y = 0$ ,  $y - z = 0$  respectivement) près. On a donc:

$$1^0 \Delta\Delta D = \frac{Q_1}{\vartheta_1} + I_1 \delta_{y-z} \delta_{x-y}; \quad 2^0 \Delta\Delta D = \frac{Q_2}{\vartheta_2} + I_2 \delta_{x-y} \delta_{y-z}. \quad (4.13)$$

L'associativité demande  $Q_1/\vartheta_1 = Q_2/\vartheta_2$ . Donc  $\Delta\Delta D$  est indéterminé à

$$\Delta\Delta D = \langle \Delta\Delta D \rangle + a \delta_{x-y} \delta_{y-z}; \quad \delta(\Delta\Delta D) = \delta a \delta_{x-y} \delta_{y-z} \quad (4.14)$$

près. Par  $\langle \Delta\Delta D \rangle$  on comprend une distribution définie.

*Exemple 3:* («self énergie» en 4<sup>e</sup> approximation)  $T$  est donné sur  $R^1$  par le bi-spineur

$$T_{AB \ x-u} = \int \int dy dz \Delta_{x-y} D_{x-z} \Delta_{y-z} D_{y-u} \Delta_{z-u}. \quad (4.15)$$

$(x - u)^2 T_{x-u}$  est défini, comme on va le constater. Vu que  $(x - u) = (x - y) + (y - z) + (z - u)$ , et  $(x - u)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + \dots$ , on a  $\vartheta T_{x-u} = (x - u)^2 T_{x-u} =$

$$\begin{aligned} &= 1^0 \int \int_y^z (x - y)^2 \Delta_{x-y} D_{x-z} \Delta_{y-z} D_{y-u} \Delta_{z-u} \\ &2^0 + \int \int (z - u)^2 \Delta_{x-y} \dots \dots \dots \\ &3^0 + \int \int (y - z)^2 \Delta_{x-y} \dots \dots \dots \\ &4^0 + \int \int 2(x - y)(y - z) \Delta_{x-y} \dots \dots \dots \\ &5^0 + \int \int 2(x - y)(z - u) \Delta_{x-y} \dots \dots \dots \\ &6^0 + \int \int 2(y - z)(z - u) \Delta_{x-y} \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

1<sup>0</sup> Le premier produit multiplicatif  $(x - y)^2 \Delta_{x-y} D_{x-z} \Delta_{y-z}$  est défini. Par contre, le produit  $\Delta_{y-z} D_{y-u} \Delta_{z-u}$  ne l'est pas et sa définition doit être effectuée conformément à l'exemple 2, c'est-à-dire  $T_1 = \langle \Delta_{y-z} D_{y-u} \Delta_{z-u} \rangle + a \delta_{y-z} \delta_{z-u}$ .

2<sup>0</sup> On invoque, pour la définition de 2<sup>0</sup>, un argument en tous points analogue à celui utilisé pour 1<sup>0</sup>.

3<sup>0</sup>—6<sup>0</sup> sont tous définis.

La division par  $(x - u)^2$ , que l'on effectue ensuite, donne :

$$1^0 \int \int (x-y)^2 (x-u)^{-2} \Delta D \langle \Delta D \Delta \rangle + b_1 \delta_{x-u} + b_2 \gamma_\alpha \delta_{x-u}^\alpha + a \Delta_{x-u} D_{x-u}$$

$$2^0 \int \int (z-u)^2 (x-u)^{-2} \langle \Delta D \Delta \rangle D \Delta + b_3 \delta_{x-u} + b_4 \gamma_\alpha \delta_{x-u}^\alpha + b \Delta_{x-u} D_{x-u} \dots$$

Au total on obtient :

$$T = \int \int \langle \Delta D \Delta D \Delta \rangle + d_1 \delta_{x-u} + d_2 \gamma_\alpha \delta_{x-u}^\alpha + a \langle \Delta D \rangle + b \langle \Delta D \rangle + a c_1 \delta_{x-u} + a c_2 \gamma_\alpha \delta_{x-u}^\alpha + \dots$$

$$\delta T_{a=b=\dots 0} = \delta d_1 \delta_{x-u} + \delta d_2 \gamma_\alpha \delta_{x-u}^\alpha + \delta a \langle \Delta D \rangle + \delta b \langle \Delta D \rangle \equiv \sum_{c_i=d_1 d_2 a b \dots} \delta c_i \mathbf{P}_i T_i \tag{4.17}$$

avec :  $\int \int \langle \Delta D \Delta D \Delta \rangle$

$$= \int \int (x-u)^{-2} [(x-y)^2 \Delta D \langle \Delta D \Delta \rangle + (z-u)^2 \langle \Delta D \Delta \rangle D \Delta + \dots]$$

$A \Delta D \Delta D \Delta$  correspond un diagramme (*losange*). Il en est de même pour les  $\Delta D \Delta$  (*triangles*) et les  $\Delta D$  (*biangles*). On peut alors formuler le groupe sous la forme symbolique suivante :

$$\delta \begin{array}{c} y \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad \quad u \\ \diagdown \quad \diagup \\ z \end{array} = \delta d_1 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ x \end{array} + \delta d_2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ x \end{array} + \delta a \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \text{~~~~~} \end{array} + \delta b \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \text{~~~~~} \end{array} \tag{4.17a}$$

et dire que le losange est défini à ses diagrammes affaissés près. Un diagramme peut être affaissé par rapport à n'importe quel diagramme qu'il contient. Ainsi, l'affaïssement du losange par rapport à lui-même est le «point à deux attaches» (intervenant avec deux couplages différents  $\delta(x - u)$  et  $\gamma_\alpha \delta^\alpha(x - u)$ ). Affaïssé par rapport à un des triangles, il fournit un des biangles de la self-énergie, car le triangle affaïssé est un «point à trois attaches».

Les images de FOURIER des systèmes définissants sont des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles. Pour cette raison, il est avantageux d'utiliser la transformation de FOURIER pour le calcul, comme nous l'avons fait en I.

La définition par division met à disposition une infinité de distributions différent entre elles par des expressions du type (4.7). Le problème  $S$  envisagé peut donc sembler à première vue complètement indéterminé. Or, il est possible de montrer que des changements des paramètres (réels) du groupe  $\delta c_i$ , ne font rien d'autre



que de changer les valeurs des constantes  $\kappa$ ,  $\mu_0 \dots$ ,  $g$ . Pour le voir, il est avantageux de considérer les champs quantifiés  $\varphi$  et  $\Phi$  comme les produits  $e\varphi$  et  $g\Phi$ , soit des champs normalisés en terme des fonctions causales par les relations (1.7) (1.8) :

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu_0} D^{(c)\alpha}_{\beta} &= D \Omega_{\mu_0 \beta}^{\alpha} = -e^2 \delta_{\beta}^{\alpha} \delta(x, y); & \Omega_{\mu_0}^{\alpha\beta} &= (\square - \mu_0^2) g^{\alpha\beta} - \partial^{\alpha} \partial^{\beta} \\ \Omega_{\mu} D_{\mu}^{(c)5} &= D \Omega_{\mu 5}^5 = -g^2 \delta(x, y); & \Omega_{(\mu)}^{55} &= \Omega_{(\mu)}^{55} = (\square - \mu^2) \parallel - g \parallel \\ \Omega_{\kappa} \Delta_{B}^{(c)A} &= -\Delta^{\dagger} \Omega_{\kappa B}^A = Z \delta_B^A \delta(x, y); & \Omega_{\kappa}^{AB} &= \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \gamma^{\alpha} + \kappa \xi)^{AB} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$e^2$  et  $g^2$  sont alors des facteurs de normalisation.

Au lieu des constantes de couplage, nous utilisons les  $\nu$  paramètres  $\varepsilon_{\varrho}$  ( $\varrho = s$  à  $\nu$ ), introduits dans l'opérateur Lagrangien afin de développer  $S$  en série des  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 &= \mathbf{1}; & \mathbf{S}_1 &= i\mathbf{L}; & \mathbf{S}_2 &= \dots \text{ avec:} \\ \mathbf{L} &= \varepsilon_u \mathbf{L}^{(u0)} - \varepsilon_{\kappa} \int \kappa \mathbf{J}^0 + \varepsilon_{\varphi} \mathbf{L}^{(\varphi)} - \varepsilon_{\mu_0} \int \frac{\mu_0^2}{2} (\varphi_{\alpha} \varphi^{\alpha})^2 + \varepsilon_{\nu} \mathbf{A}^{(\nu)} + \varepsilon_{ps} \mathbf{A}^{(ps)} + \dots \\ & \dots + \varepsilon_4 \int \frac{\mu^4}{4} \Phi^4. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le  $S^{(n)}$  ainsi défini dépend, outre des paramètres  $\varepsilon_{\nu}$ , des grandeurs physiques  $\kappa$ ,  $\mu_0, \dots$ ,  $e$ ,  $g, \dots$  ainsi que de  $r = r(n)$  paramètres supplémentaires  $c_i$ . On constate d'abord que l'opérateur de LAGRANGE contient, en plus des termes d'interaction (2.7) (tri- et multi-linéaires dans les champs) des termes bilinéaires.

Aux relations évidentes

$$\partial/\partial \log \varepsilon_{\nu} \mathbf{S}^{(n)} = \partial/\partial \log e \mathbf{S}^{(n)} \dots \dots \text{ etc.} \quad (4.21)$$

on ajoute encore

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon_u} \mathbf{S}^{(n)} &\cong \partial/\partial \log Z \mathbf{S}^{(n)} \\ (1 + \varepsilon_{\kappa} + \varepsilon_u) \partial_{\varepsilon_{\kappa}} \mathbf{S}^{(n)} &= \partial/\partial \log \kappa \mathbf{S}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

et d'autres relations analogues pour  $\varepsilon_{\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\mu_0}$  et pour  $\varepsilon_{\Phi}$ ,  $\varepsilon_{\mu}$ , en terme de  $e$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu$  et  $g$ . On les démontre par intégrations partielles (cf. I, § 3) et à l'aide de la relation :

$$\partial/\partial \log \kappa \Delta_{x-y} = -\kappa \int_z \Delta_{x-z} \Delta_{z-y}, \quad \partial/\partial \log \kappa u(x) = -\kappa \int_z \Delta_{x-z} u(z). \quad (4.23)$$

Ayant ainsi montré que toute variation des  $\varepsilon$  peut s'exprimer par des variations de grandeurs physiques, il nous reste finalement à voir qu'une variation des  $r(n)$  constantes arbitraires est toujours équivalente à une variation des  $\varepsilon_{\varrho}$ .

Une variation des constantes arbitraires peut être générée par le groupe infinitesimal:

$$\delta S_{(n)} = \sum_i \delta c_i \mathbf{P}_i S^{(n)}; \quad \mathbf{P}_i = (\partial/\partial c_i)_{c_1=c_2=\dots=c_{r(n)}=0}. \quad (4.24)$$

Pour un diagramme de complication quelconque dans  $S^{(n)}$ , les  $\mathbf{P}_i S^{(n)}$  sont des *diagrammes affaissés* par rapport à un diagramme qu'il contient, à savoir celui qui est indéterminé à une distribution près dont  $\delta c_i$  est le co-facteur. Ce diagramme affaissé contient donc, à la place de l'élément primitif, une interaction ponctuelle. Or, ce diagramme existant déjà dans  $S^{(n)}$  muni d'un paramètre  $\varepsilon_\rho$ , on peut trouver des fonctions

$$h_{i\rho} = h_{i\rho}(\kappa \dots Z, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu) \quad (4.25)$$

telles que

$$\mathbf{P}_i S^{(n)} = \sum_{\rho=1}^{\nu} h_{i\rho} \partial_{\varepsilon_\rho} S^{(n)}; \quad i = 1 \dots r(n) \quad (4.26)$$

ait lieu, pour autant qu'il existe des coefficients  $L_{ik}^l$  (indépendants des  $c_i$ ) satisfaisant:

$$[\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_k]_- = - \sum_l L_{ik}^l \mathbf{P}_l, \quad (4.27)$$

ce qui est bien le cas<sup>5</sup>).

On a donc bien montré, comme on l'avait annoncé, qu'une variation des constantes arbitraires ne change que les constantes physiques  $\kappa, \mu_0, \mu \dots Z, g$ .

La normalisation de  $Z$  est arbitraire. L'arbitraire dans la normalisation des autres constantes, par contre, n'est qu'une confirmation du fait que le développement en série ne peut pas donner d'information sur les valeurs numériques des grandeurs physiques  $\kappa, \mu_0 \dots$  (cf. fin du § 2).

### 5. Le groupe électro-mésonique en théorie quantique.

La correspondance d'une théorie  $\mathbf{S}$  à une théorie classique du type (2.10), fait attendre que les propriétés de cette dernière, en particulier l'invariance par rapport aux sous-groupes (3.3) et (3.4), puissent être étendues à la première. Nous allons examiner, dans ce paragraphe, les conditions pour qu'il en soit ainsi:

*Groupe électromagnétique.* En terme des puissances ordonnées de  $\mathbf{u}^{\dagger A}, \mathbf{u}^B, \varphi_\alpha$  et  $\Phi_5$ ,

$$\begin{aligned} u^\dagger(x) u(y) &= (u^\dagger u)(xy) + \frac{1}{2} \Delta^{(+)}(xy); \\ (u^\dagger u)(xy) (u^\dagger u)(zt) &= (u^\dagger u)^2(xyzt) + \dots \\ \varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(y) &= \varphi_{\alpha\beta}^2(xy) + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta}^{(+)}(xy). \end{aligned} \quad (5.1)$$

l'opérateur  $S$  s'exprime par :

$$S(\Phi \varphi) = \sum_{ENM} \mathbf{S}_{ENM} = \int \cdots \int \sum_{xyz t} (E!)^{-2} (N! M!)^{-1} (\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^E \varphi^N \Phi^M \times \\ \times S_{ENM}(x_1 y_1 \cdots y_E z_1 \cdots z_N t_1 \cdots t_M) \quad (5.2)$$

où

$$S_{ENM} = S_{A_1 B_1 A_2 \cdots B_E}^{\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_N 5_1 \cdots 5_M}(x_1 y_1 \cdots z_k \cdots t_M). \quad (5.3)$$

Une condition suffisante pour qu'il soit invariant par rapport au groupe électromagnétique

$$\chi_\alpha = \varphi_\alpha - \mu_0^{-1} \nabla_\alpha \lambda_0; \quad \delta_{\lambda_0} \chi_\alpha = -\mu_0^{-1} \nabla_\alpha \delta \lambda_0 \quad (5.4)$$

est que les courants électriques

$$\mathbf{J}_{ENM}^{\alpha_1 \cdots \alpha_i \cdots}(z_1 \cdots t_M) = -i \int_x \int_y (E!)^{-2} (\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^E S_{ENM}^{\alpha_1 \cdots \alpha_i \cdots}(x y \cdots z \cdots t) \quad (5.5)$$

satisfassent, à des effets de surface près, à l'équation de continuité :

$$\partial_{\alpha_i} \mathbf{J}_{ENM}^{\alpha_1 \cdots \alpha_i \cdots}(z t) \cong 0. \quad (5.6)$$

Cette relation est satisfaite par la plupart des termes du développement de  $\mathbf{S}$ , en vertu de l'équation d'onde (dont  $\partial_\alpha \mathbf{J}_{110}^\alpha(z) = 0$  est une conséquence). Mais, pour le terme de la self-énergie, (5.6) impose des conditions aux constantes arbitraires. Dans sa première approximation, (5.6) se réduit à  $\partial_{\alpha_1} S_{020}^{\alpha_1 \alpha_2}(z_1 z_2) = 0$  pour la distribution produit  $S_{020}^{\alpha_1 \alpha_2} = -\frac{i}{2} t r (\gamma^{\alpha_1} \Delta^{(1)}(z_1 - z_2) \gamma^{\alpha_2} \Delta^{(s)}(z_2 - z_1) + {}^{(s)(1)})$  (cf. I, § 4). Simultanément il est nécessaire de poser  $\varepsilon_\varphi + \varepsilon_{\mu_0} = 0$ . La définition par division a été faite en I et a introduit trois constantes arbitraires\*).

Si on les définit par I (4.22), la condition de continuité (5.6) exige que

$$b_1 = 0; \quad b_0 + b_2 = 0 \quad \text{en I (4.22)}. \quad (5.7)$$

Utilisant alors (5.6), on démontre, par intégrations partielles, que

$$\mathbf{S}^* - \mathbf{S} \equiv S(\chi, \Phi) - S(\varphi, \Phi) \cong 0; \quad \delta_{\lambda_0} \mathbf{S}(\chi, \Phi) \cong 0. \quad (5.8)$$

$\mathbf{S}^* = S(\chi, \Phi)$  est donc, à des termes de surface près, invariant

\*) Ceci peut directement être déduit de notre exemple 1 du § 4: étant données les propriétés des  $\gamma^\alpha$ , la trace est un tenseur symétrique. Son indétermination vaut (cf. 4.9)

$$I_{\alpha_1 \alpha_2}(z_1 - z_2) = b_1 g_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{z_1 - z_2} + b_2 g_{\alpha_1 \alpha_2} \square \delta_{z_1 - z_2} + b_0 \delta_{z_1 - z_2}^{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (5.9)$$

Si la partie déterminée est définie de manière à satisfaire  $\partial_{\alpha_1} \langle S_{020}^{\alpha_1 \alpha_2} \rangle = 0$ , (5.7) en résulte.

par rapport au groupe de jauge du potentiel vecteur  $\chi_\alpha$ . Si l'on décompose un  $\chi_\alpha$  quelconque selon (5.4) (avec  $\nabla^\alpha(\chi_\alpha) \neq 0$ ), les quanta du champ  $\lambda_0$  ne sont émis ou absorbés que dans la couche superficielle entourant la région  $V$ . Ces effets étant inobservables par définition, l'invariance de jauge est démontrée.

L'invariance de jauge permet de faire le passage à la limite  $\mu_0 \rightarrow 0$  et arriver ainsi à l'électrodynamique des photons à masse nulle. Pour cela, il est nécessaire qu'une transformation de jauge de  $\varphi_\alpha$  à  $\chi_\alpha$  puisse être trouvée, qui fasse intervenir, au lieu de la distribution causale  $D_{\alpha\beta}^{(c)}$ , une distribution  $D_{\alpha\beta}^{*(c)}$  satisfaisant à (4.18) avec

$$\Omega_{\alpha\beta}^{*c} = (\square - \mu_0^2) \delta_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + (\nabla_\alpha \partial^\beta \log \mu_0^2) + (\partial^\beta \log \mu^2) \nabla_\alpha. \quad *) \quad (5.10)$$

( $R_{\alpha\beta}$  = tenseur de Riemann-Christoffel contracté.)

Dans un référentiel de LORENTZ on a alors :

$$D_{\alpha\beta}^{*(c)}(xy) = g_{\alpha\beta} (2\pi)^{-4} \int dp e^{ip(x-y)} (p^2 + \mu_0^2)^{-1} = g_{\alpha\beta} D_{00}^{(c)}(xy)$$

$$\longrightarrow g_{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{4\pi} \delta((x-y)^2) + i \frac{1}{4\pi^2} (x-y)^{-2} \right] \quad (5.11)$$

qui n'est autre chose que l'interaction causale du champ électromagnétique, d'où le terme  $\mu_0^{-2} \partial_{x\alpha} \partial_{y\beta} D_{00}^{(c)}(xy)$  qu'on avait en I (4.9) a disparu.

Pour découvrir la transformation adéquate, il faut se souvenir que tout  $D^{(c)} = i/2 (D^{(1)} - 2i D^{(s)})$  apparaissant dans le développement en  $\varepsilon^n$  provient d'une contribution hermitienne  $D^{(1)}$  en  $\mathbf{H}_n$  (§ 1 de I) et de son complément causal  $-2i D^{(s)}$  en  $i\mathbf{A}_n$ . Le  $D_{\alpha\beta}^{*(1)}$  apparaît ainsi lors de la mise en ordre des produits de  $\chi$  en  $\mathbf{A}_n$ , conformément à :

$$\chi_\alpha(x) \chi_\beta(y) + \chi_\beta(y) \chi_\alpha(x) = \chi_{\alpha\beta}^2(xy) + \chi_{\beta\alpha}^2(yx) + D_{\alpha\beta}^{*(1)}(xy). \quad (5.12)$$

Afin d'obtenir  $D_{\alpha\beta}^*$  au lieu de  $D_{\alpha\beta}$ , il est nécessaire de normaliser le champ  $\lambda_0$  en terme de  $\Omega D_{00}^{(c)} = -e^2 \delta(xy)$  et d'introduire des probabilités négatives<sup>11) 12)</sup> pour les états à nombre de quanta  $\lambda_0$  impair. On a alors le commutateur changé de signe

$$[\lambda_0^{(+)}(x), \lambda_0^{(-)}(y)]_- = -1/2 D_{00}^{(+)}(xy) \quad (5.13)$$

(5.12) contient alors :

$$D_{\alpha\beta} - \mu_0^{-2} \nabla_{x\alpha} \nabla_{y\beta} D_{00}(xy) = D_{\alpha\beta}^* \quad (5.14)$$

qui satisfait à (4.18) avec (5.10). Vu que l'émission des quanta  $\lambda_0$  ne peut se faire que dans les couches superficielles, des transitions

\*)  $\nabla_\alpha$  est la dérivée covariante définie par  $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$ .

à des états à probabilités négatives ne sont jamais contenus dans les éléments observables de  $\mathbf{S}$  (processus conservatifs). Il reste à voir que la probabilité d'émission pour un quantum longitudinal de  $\varphi$  est toujours inférieure à celle concernant un quantum transversal (rapport de l'ordre de  $\mu_0^2/(k^4)^2$ ). Cela ressort d'un calcul essentiellement classique<sup>13</sup>). On peut alors substituer à  $\varphi_\alpha$  un champ transversal  $\mathbf{A}_\alpha$  de masse nulle ( $\square \mathbf{A}_\alpha = 0$ ;  $\nabla^\alpha (\mathbf{A}_\alpha) = 0$ ).

On peut directement montrer que la matrice invariante  $\mathbf{S}^* = S(\mathbf{A}_\alpha \Phi_5, D_{\alpha\beta}^*)$  est causale et unitaire (dans le sens  $\mathbf{S}^{*\dagger} \mathbf{S}^* \cong 1$ ), malgré le fait que la relation habituelle entre le champ  $\mathbf{A}_\alpha$  transversal et  $D_{\alpha\beta}^{*(1)}$  n'existe pas. On part de l'interaction vectorielle non invariante de la théorie du rayonnement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_v \mathbf{A}_1 + \varepsilon_v^2 \mathbf{C}_2 = \varepsilon_v \int_x (\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{J}} - \text{grad} (-\Delta)^{-1} \text{div. } \vec{\mathbf{J}}) (x) + \\ + \varepsilon_v^2/2 \int_x \mathbf{J}^4 (-\Delta)^{-1} \mathbf{J}^4 (x) \end{aligned} \quad (5.16)$$

contenant des interactions non locales. Ce sont : l'interaction entre le champ transversal et la charge, et l'interaction statique de COULOMB<sup>\*</sup>). La loi de commutation

$$[\mathbf{A}_i^{(+)}, \mathbf{A}_k^{(-)}] = (g_{ik} + \partial_{xi} \partial_{yk} (-\Delta)^{-1}) D_{00}^{(+)} (xy) \quad (5.17)$$

et la loi de continuité en chaque approximation font ressortir de l'interaction non invariante une matrice  $\mathbf{S}$  unitaire et causale (mais non invariante). Par des intégrations partielles, on peut alors l'amener à la forme invariante<sup>\*\*</sup>)  $\mathbf{S}^* = S(\mathbf{A}_\alpha \Phi, D_{\alpha\beta}^*) \cong \mathbf{S}$ .

*Groupe mésonique.* L'invariance de  $\mathbf{S}$  par rapport au groupe mésonique réclame une démonstration laborieuse et ne revêt, d'autre part, pas plus d'intérêt que l'invariance de  $\mathbf{S}$  par rapport à la transformation particulière (3.8) pour  $f\lambda_5 = 0$  et  $f\lambda_5 = -g/2\kappa \Phi_5$ . Nous nous en tiendrons donc à cet exemple.

A cette fin, on calcule tout d'abord l'opérateur  $\mathbf{S}^*$  engendré par la Lagrangienne  $\mathbf{L}^*$  formé par le  $\mathbf{A}^*$  en (3.14) :

$$\mathbf{L}^* = \sum_q \varepsilon_q \mathbf{L}_q = \dots + \varepsilon_{(v)} \mathbf{A}_1^{(v)} - \varepsilon_{(pv)} (2\kappa)^{-1} \mathbf{A}_1^{(pv)} + \sum_{l=2}^{\infty} (\varepsilon_{(pv)})^l \mathbf{B}_{(l)}. \quad (5.18)$$

On calcule ensuite l'opérateur  $\mathbf{S}$  obtenu à partir de

$$\mathbf{L} = \dots + \varepsilon_{(v)} \mathbf{A}_1^{(v)} + \varepsilon_{(ps)} \mathbf{A}_1^{(ps)} \quad (5.19)$$

\*)  $(-\Delta)^{-1}$  est l'opérateur du potentiel de COULOMB.

\*\*\*) Outre le fait que l'interaction (5.16) est non invariante, elle est de plus non définie, car le terme coulombien est «non ordonné». On ne l'ordonnera qu'une fois la forme invariante  $\mathbf{S}^* = \mathbf{1} + \mathbf{S}_1^* + \mathbf{S}_2^* + \dots$  obtenue.

et compare les résultats à chaque approximation par intégration partielle des éléments de  $\mathbf{S}^*$ . On montre alors que  $\mathbf{S}^* - \mathbf{S} \cong 0$ , exprimant l'équivalence des deux représentations; cela, pour autant que les conditions suivantes sont satisfaites:

1° les coefficients numériques  $a_i$  contenus dans les termes  $\mathbf{B}_i$  doivent prendre les valeurs (3.16), conformément aux séries (3.12);

2° parmi l'infinité de distributions, provenant de la définition par division des produits

$$\delta_{x-y} [D_{x-y}^{(c)}]^N = b_N \delta_{x-y} \quad (*) \quad (5.20)$$

(non définis à priori), le choix  $b_N = 0$  doit s'imposer.

Il est à remarquer enfin que la condition (5.6) impose encore d'autres restrictions sur le groupe des  $c_i$  que celle énoncée en (5.7); par exemple, dans le problème de la désintégration d'un méson scalaire (neutre) en deux photons (couplage scalaire), une relation du type  $c_1 + c_2 = -\pi$  est nécessaire à la sauvegarde de la continuité (5.6). Cette relation, entre deux facteurs arbitraires  $c_1$  et  $c_2$  provenant de la définition par division, est équivalente à une des conditions données par FUKUDA et KINOSHITA<sup>14</sup>). Comme le demande du reste la théorie de la division des distributions, une telle relation ne peut être invoquée que lorsqu'une condition physique du type (5.6) l'exige, et *dans ce cas seulement*. Son emploi inconsidéré, c'est-à-dire l'emploi de cette *même égalité* chaque fois que *le même problème de division* se présente, conduit à des erreurs manifestes (cf. les conditions en <sup>14</sup>). Z. KOBA et ses collaborateurs sont parvenus, lors d'un récent travail, à des conclusions identiques<sup>16</sup>).

En résumé de ces pages, on peut donc affirmer qu'il est possible d'effectuer par voie intégrale, dans l'électromésodynamique envisagée, un développement unitaire de la matrice  $\mathbf{S}$  sans infinités ni ambiguïtés.

L'un de nous (St) tient à remercier M. N. BOHR; c'est en effet, lors d'un séjour à Copenhague, en 1947, qu'il a pu mettre au point ses notions sur la causalité. Nous remercions en outre M. G. DE RHAM d'avoir attiré notre attention sur les travaux de M. SCHWARTZ.

Institut de Physique de l'Université, Genève.

---

\*) Des intégrations par parties transforment les polygones électroniques, photoniques..., etc. fermés, en boucles fermées, qui demandent une définition des produits de distributions (5.20).

**Bibliographie.**

- 1) E. C. G. STUECKELBERG et D. RIVIER, *Helv. Phys. Acta* **23**, Suppl. 3, 236 (1950).
  - 2) E. C. G. STUECKELBERG et T. A. GREEN, *Helv. Phys. Acta* **24**, 153 (1951).
  - 3) A. PETERMANN et E. C. G. STUECKELBERG, *Phys. Rev.* **82**, 548 (1951).
  - 4) E. C. G. STUECKELBERG et A. PETERMANN, *Helv. Phys. Acta* **24**, 317 (1951).
  - 5) E. C. G. STUECKELBERG, *Phys. Rev.* **81**, 130 (1951).
  - 6) L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions. Tomes I et II. Chez Hermann & Cie, Paris (1950 et 1951).*
  - 7) E. E. SALPETER et H. A. BETHE, *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951).
  - 8) R. P. FEYNMAN, *Phys. Rev.* **76**, 749, 769 (1949).
  - 9) H. WEYL, *Raum-Zeit-Materie*, 5e édit., Berlin, p. 128 (1923).
  - 10) L. L. FOLDY, *Phys. Rev.* **84**, 168 (1951).
  - 11) S. N. GUPTA, *Proc. Phys. Soc.* **53**, 681 (1950).
  - 12) K. BLEULER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 567 (1950).
  - 13) E. C. G. STUECKELBERG, *Helv. Phys. Acta* **14**, 51 (1941).
  - 14) H. FUKUDA et T. KINOSHITA, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 1024 (1950).
  - 15) A. SALAM, *Phys. Rev.* **82**, 217 (1951).
  - 16) Z. Koba et collaborateurs, *Progr. Theor., Phys.* **6**, 849 (1951).
-