

Metrik und Einheitssysteme in der Elektrodynamik

Autor(en): **Schilt, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **27 (1954)**

Heft I

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-112503>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Metrik und Einheitssysteme in der Elektrodynamik

von H. Silit.

Herrn Prof. Dr. W. SCHERRER zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

(11. I. 1954.)

Es ist eine merkwürdige Tatsache, dass in den Darstellungen der Relativitätstheorie nur das Gaußsche oder das Heavisidesche Massensystem benutzt wird¹⁾. Besonders auffallend ist diese Tatsache bei HUND, der die übrige Elektrizitätslehre so darstellt, dass die Formeln für alle gebräuchlichen Einheitssysteme gelten. In diesem Aufsatz soll gezeigt werden, dass man auch die Formeln der Relativitätstheorie allgemeingültig schreiben kann. Dabei ergeben sich zwanglos Beziehungen zur benutzten Metrik, wenn man auf den geometrischen Charakter der Feldgrößen achtet.

Zunächst legen wir unsern Betrachtungen den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum zugrunde.

Wenn eine elektrische Probeladung e vorgegeben ist und festgelegt ist, was Kraft \vec{F} bedeutet, so können damit experimentell und theoretisch die Felder \vec{E} und \vec{B} definiert werden, und zwar mit der Beziehung:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\kappa\vec{v}\vec{B}. \quad (1)$$

Hierin sind \vec{F} und \vec{E} kovariante Vektoren, und \vec{B} ist eine kontravariante Vektordichte, \vec{v} ein kontravarianter Vektor. Die Felder \vec{E} und \vec{B} genügen der 1. Gruppe der Maxwell-Gleichungen:

$$\text{rot } \vec{E} + \kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (2)$$

κ ist ein Umrechnungsfaktor und ist gleich der elektrischen Feld-

¹⁾ Man vergleiche etwa: v. LAUE, Die Relativitätstheorie (1952, Vieweg) und HUND, Einführung in die theoretische Physik, II, p. 269 ff. (Bibliographisches Institut, Leipzig 1951).

stärkeeinheit, dividiert durch die Geschwindigkeitseinheit und die Induktionseinheit.

Die Felder \vec{D} und \vec{H} sind zunächst nur durch die zweite Gruppe der Maxwell-Gleichungen definiert, die die Beziehungen zur Stromdichte \vec{s} und der Ladungsdichte ρ herstellen:

$$\text{rot } \vec{H} - \lambda \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = II \lambda \vec{s}, \quad \text{div } \vec{D} = II \rho. \quad (3)$$

Hierin sind \vec{H} ein kovarianter Vektor, \vec{D} eine kontravariante Vektordichte, λ und II Umrechnungsfaktoren¹⁾.

Aus Gleichung (3) folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div } \vec{s} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Die Felder \vec{D} und \vec{H} sind durch (3) nicht eindeutig definiert, ausserdem besteht kein Zusammenhang mit den Feldern \vec{E} und \vec{B} . Nur durch die Einführung einer Metrik gelingt es, diesen Zusammenhang herzustellen. Die Einführung einer Metrik ist notwendig, denn die Felder \vec{E} und \vec{D} bzw. \vec{H} und \vec{B} haben je verschiedenen geometrischen Charakter. Den geometrischen Charakteren entsprechend können die Beziehungen nur lauten:

$$D^i = \varepsilon_0 \sqrt{g} g^{il} E_l \quad \text{und} \quad B^i = \mu_0 \sqrt{g} g^{il} H_l, \quad (5)$$

vorausgesetzt, dass man nur lineare Beziehungen in Betracht ziehen will. Hierin sind ε_0 und μ_0 Umrechnungsfaktoren, g ist die Determinante $|g_{ik}|$ des metrischen Fundamentaltensors g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$), g^{il} ist der zu g_{ik} reziproke Tensor: $g^{il} g_{lk} = \delta_k^i$.

Erst mit der Beziehung (5) ist es möglich, die beiden Gruppen (2) und (3) zu kombinieren, insbesondere um daraus die Wellengleichung abzuleiten. Aus dieser ergibt sich die folgende Beziehung zwischen den Konstanten:

$$\varkappa \lambda \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (6)$$

Sonst besteht in der dreidimensionalen Darstellung keine weitere

¹⁾ Einheiten, für die $II = 1$ ist, heissen rationalisierte Einheiten.

Einschränkung zwischen den Konstanten. In den verschiedenen Maßsystemen haben diese folgende Werte³⁾:

System	Π	\varkappa	λ	ε_0	μ_0
elektrostatisches	4π	1	1	1	$1/c^2$
elektromagnetisches	4π	1	1	$1/c^2$	1
GAUSS	4π	$1/c$	$1/c$	1	1
HEAVISIDE	1	$1/c$	$1/c$	1	1
GIORGI	1	1	1	$\frac{10^7 \text{ Am}}{4 \pi c^2 \text{ Vs}}$	$\frac{4 \pi \text{ Vs}}{10^7 \text{ Am}}$

Übersichtlicher und in vielem deutlicher lassen sich die gleichen Fragen in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt darstellen. Die Felder \vec{E} und \vec{B} werden durch den kovarianten Tensor φ_{ik} zusammengefasst, der sich entsprechend (1) definieren lässt aus der Minkowsky-Kraft K_i und der Vierergeschwindigkeit u^k :

$$K_i = e u^k \varphi_{ik}; \quad (7)$$

aus φ_{ik} kann man die kontravariante Tensordichte ε^{lm} bilden:

$$\varepsilon^{lm} = \varphi_{ik} \quad (8)$$

$l m i k$ gerade Perm. von 1 2 3 4.

Die erste Gruppe der Maxwell-Gleichungen kann dargestellt werden entweder durch:

$$\frac{\partial \varepsilon^{lm}}{\partial x^l} = 0 \quad (9)$$

oder durch

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x^i} = 0,$$

wobei $i k l$ eine Kombination zur dritten Klasse aus den Elementen 1 2 3 4 sein muss. In (9) ist enthalten: $\varkappa = 1$.

Zur Formulierung der zweiten Gruppe der Maxwell-Gleichungen ist eine kontravariante Tensordichte H^{ik} nötig, die durch die Stromdichte s^k definiert ist:

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^l} = \Pi s^k, \quad (10)$$

womit die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial s^k}{\partial x^k} = 0 \quad (11)$$

erfüllt ist. In (10) ist $\lambda = 1$ gewählt.

³⁾ Vgl. dazu: SCHILT, Electricité (Griffon, Neuchâtel 1950), p. 235 ff.

Ein Zusammenhang der Tensoren H^{ik} und φ_{ik} ist wiederum nur nach Einführung einer Metrik formulierbar. Er lautet:

$$H^{ik} = A \sqrt{|g|} g^{il} g^{km} \varphi_{lm}. \quad (12)$$

Diese Gleichung gilt für alle Koordinaten- und Einheitssysteme, wobei allerdings die Metrik mit dem Einheitssystem korreliert ist. Bemerkenswert ist in dieser Gleichung die Tatsache, dass nur eine willkürliche Konstante A nötig ist, während die entsprechenden Gleichungen (5) zwei Konstanten enthalten. Das rührt daher, dass die Beziehung (6), die zwischen den zwei Konstanten erfüllt sein muss, in (12) durch die Einführung einer vierdimensionalen Metrik ersetzt ist.

Eine Zusammenstellung möge die Korrelation zwischen Metrik und Einheitssystem darlegen:

	Π	A	
Systeme mit Linienelement: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$			
elektrostatisches	4π	c	$H^{ik} = \frac{1}{\mu_0} \varphi_{ik}; H^{i4} = -\varepsilon_0 \varphi_{i4}$
elektromagnetisches	4π	$1/c$	
GIORGI	1	$\frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c$	
Systeme mit Linienelement: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2; u = ct$			
GAUSS ⁴⁾	4π	1	$\left. \begin{array}{l} H^{ik} = \varphi_{ik}; H^{i4} = -\varphi_{i4} \\ i, k = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$
HEAVISIDE ⁴⁾	1	1	
System mit Linienelement: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2; l = ict$			
WEYL	1	1	$H^{\rho\sigma} = \varphi_{\rho\sigma} \varrho, \sigma = 1, 2, 3, 4$

⁴⁾ Es ist eine historisch bedingte Inkonsequenz, dass bei diesen Systemen in den Formeln nicht u , sondern t als Variable verwendet wird, so dass bei den zeitlichen Ableitungen der Faktor $1/c$ erscheint. Man vergleiche dazu die Ausnahme in der Kontinuitätsgleichung, die durch die besondere Definition der Stromdichte bedingt ist; es wäre eigentlich sinnvoller, wenn die Stromdichte so festgelegt wäre, dass der Faktor λ auf der rechten Seite von (3) nicht erscheinen würde.