Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 29 (1956)
Heft: II

Artikel: Über die physikalische Deutung der erweiterten Gravitationstheorie P. Jordans

Autor: Fierz, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112699

Über die physikalische Deutung der erweiterten Gravitationstheorie P. Jordans

von **M. Fierz.**

(24. II. 56.)

Zusammenfassung. Durch das Postulat, dass sich Massenpunkte auf geodätischen Linien bewegen, kann die Metrik der Jordanschen Theorie definiert werden. Dieses Postulat ist dem anderen gleichwertig: die Comptonwellenlänge der Elementarteilchen liefert einen natürlichen Längenmaßstab. Die Gravitationskonstante wird als das Verhältnis von schwerer zu träger Masse definiert. Ferner folgt aus der Theorie im allgemeinen eine Dielektrizitätskonstante des Vakuums $\varepsilon_0 = 1/\mu_0$, deren Veränderlichkeit mit $\varkappa$ von der Wahl des von JORDAN eingeführten Exponenten η abhängt: $\varepsilon_0 = \varkappa^{1+1/\eta}$. $(\eta \neq 0)$.

Einleitung.

Es ist bekanntlich möglich, die Gleichungen des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes dadurch formal zusammenzufassen, dass man sie als Beschreibung eines fünfdimensionalen projektiven Raumes deutet[1]). Damit sich jedoch die richtige Anzahl von Feldgleichungen ergibt, hat man die metrischen Komponenten durch die Nebenbedingung

$$J = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 1 \tag{1}$$

zu normieren, wobei X^ν die 5 homogenen Koordinaten bedeutet.

P. JORDAN[2]) hat nun vorgeschlagen, die Theorie dadurch zu erweitern, dass man die Nebenbedingung (1) fallen lässt und J als variables Skalarfeld in die Theorie einführt. JORDAN nimmt an, dass die Feldgleichungen aus dem 5-dimensionalen Variationsprinzip

$$\delta \int J^\alpha \left(R - \lambda \left(J_{|\mu} J^{|\mu} / J^2\right)\right) \sqrt{-g^5}\, d^5 X \tag{2}$$

folgen. (P. J. § 26 (22)). Dabei ist J die Invariante (1), R der verjüngte 5-dimensionale Krümmungstensor. α und λ sind willkürliche

[1]) Siehe z. B. W. PAULI, Annalen d. Ph. **18**, 305 (1933).

[2]) P. JORDAN, Schwerkraft und Weltall, 2. erw. Auflage (Braunschweig 1955), S. 128ff. Wir zitieren im folgenden P. J. nebst § und Formelnummer.

Konstanten. Dies entspricht in 4 Dimensionen dem Variationsprinzip:

$$\delta \int J^{\eta}\Big(G - (\lambda + {}^1\!/_2)\, J_{|j}\, J^{|j}/J^2 - \frac{J}{2\,c^2}\, F_{kl}\, F^{kl}\Big) \sqrt{-g}\, d^4 x = 0 \qquad (3)$$

(vgl. P. J. § 27 (22)). Dabei ist $\eta = \alpha + {}^1\!/_2$. Jordan wählt für η den Wert 1. Da wir das nicht machen wollen, so ist es zweckmässig, falls $\eta \neq 0$

$$J^{\eta} = \varkappa$$

zu setzen. Dann nimmt (3) die folgende Gestalt an:

$$\delta \int \Big\{\varkappa \Big(G - \zeta\, \frac{\varkappa_{|j}\, \varkappa^{|j}}{\varkappa^2}\Big) - \frac{\varepsilon_0}{2\,c^2}\, F_{kl}\, F^{kl}\Big\} \sqrt{-g}\, d^4 x = 0 \qquad (3')$$

mit

$$\zeta = \frac{\lambda + 1/2}{\eta^2}, \quad \varepsilon_0 = \varkappa^{1+1/\eta}.$$

Jordan nimmt an, $\varkappa$ sei die „Gravitationskonstante", die in dieser Theorie veränderlich wird. Ferner deutet er die in G vorkommenden g_{ik} als metrische Komponenten des Viererraumes.

W. Pauli (P. J. § 28) hat nun darauf hingewiesen, dass durch das Prinzip (3), bzw. durch die aus ihm folgenden Differentialgleichungen, die Metrik gar nicht eindeutig festgelegt ist. Man kann nämlich durch eine Konformtransformation

$$g^*_{kl} = w(\varkappa)\, g_{kl}$$

eine neue Metrik einführen, die an Stelle der g_{ik} als die „richtige" Metrik gelten könnte. Dabei ist $w(\varkappa)$ weitgehend willkürlich. Dies hängt damit zusammen, dass im Variationsprinzip (3) das elektromagnetische Feld F_{ik} allein die Materie vertritt. Die Lichtstrahlen sind aber auch in dieser Theorie stets geodätische Nullinien. Diese Eigenschaft bleibt bei konformen Transformationen erhalten. Darum definiert das Licht keine Längeneinheit.

Die Deutung Jordans von g_{ik} als Metrik und von $\varkappa$ als Gravitationskonstante ist somit unbegründet. Das gesteht er auch selber zu (P. J., S. 170). Einzig die Deutung von F_{ik} als elektromagnetisches Feld ($\mathfrak{E}, \mathfrak{B}$) darf nicht bezweifelt werden, da diese Grössen Rotationen der Potentiale sind.

Eine Entscheidung darüber, was die Metrik und die Gravitationskonstante sei, wird erst möglich, wenn in die Theorie eigentliche Materie, z. B. Massenpunkte, eingeführt wird.

Die physikalische Deutung der in der Theorie vorkommenden Grössen hängt dabei von der Form der Zusatzterme ab, die im

Variationsprinzip die Materie beschreiben sollen. Wenn man sich über die Form dieser Terme entschieden hat, ist die Deutung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen eindeutig. Dies zu zeigen ist der Zweck unserer Arbeit.

Ob die Jordansche Theorie die Wirklichkeit besser beschreibe als die gewöhnliche Relativitätstheorie Einsteins, ist eine ganz andere Frage, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen. Freilich scheint uns, dass keine zwingenden physikalischen Gründe vorliegen, eine derartige Erweiterung vorzunehmen.

1. Klassische Beschreibung der Materie.

Wir wollen annehmen, dass ein Massenpunkt m vorhanden sei, dessen Weltlinie durch die Koordinaten $\xi^k(\lambda)$ beschrieben wird.

Darum fügen wir zum Variationsintegral den Term

$$m \int \varphi(\varkappa) \sqrt{\dot{\xi}^k \dot{\xi}^l g_{kl}}\, d\lambda \tag{4}$$

hinzu. Dabei ist $\varphi(\varkappa)$ eine willkürliche Funktion, die am Orte ξ^k zu nehmen ist.

Die Metrik definieren wir durch das Postulat:

I. Die Bahn $\xi^k(\lambda)$ des ungeladenen Massenpunktes ist eine geodätische Linie.

$$\bar{g}_{ik} = \varphi^2(\varkappa)\, g_{ik} \tag{5}$$

ist nun eine neue Metrik, die gemäss unserem Postulat als „richtige“ Metrik zu gelten hat. Denn das Integral (4) kann wie folgt geschrieben werden:

$$m \int \sqrt{\dot{\xi}^k \dot{\xi}^l \bar{g}_{kl}}\, d\lambda \tag{4'}$$

und liefert, bei Variation nach den ξ^k, die Gleichung einer geodätischen Linie in der Metrik $\bar{g}_{ik}$.

Wir wollen (3′) in die Metrik $\bar{g}_{ik}$ umrechnen. Dazu benützt man die folgende Formel: Sei $g^*_{kl} = w\, g_{kl}$, so gilt

$$G\sqrt{-g} = \frac{1}{w}\left(G^* - \frac{3}{2}\,\frac{w_{|k}\, w_{|l}}{w^2}\, g^{*kl}\right)\sqrt{-g^*} + \text{Divergenzglieder.} \tag{6}$$

(Vgl. P. J., § 28.) Indem man (6) zweimal anwendet, findet man, dass das Variationsintegral (3′) die Form

$$\int\left\{\frac{1}{f}\left[\bar{G} + \left(\frac{3}{2} - \zeta\right)\frac{\varkappa_{|k}\,\varkappa_{|l}}{\varkappa^2}\,\bar{g}^{kl} - \frac{3}{2}\,\frac{f_{|k}\, f_{|l}}{f^2}\,\bar{g}^{kl}\right] - \frac{\varepsilon_0}{2\,c^2}\,F_{kl}F^{kl}\right\}\sqrt{-\bar{g}}\, d^4x$$
$$+\, m\int \sqrt{\bar{g}_{kl}\,\dot{\xi}^k \dot{\xi}^l}\, d\lambda \tag{7}$$

annimmt. Dabei ist

$$\bar{g}_{ik} = \varphi^2(\varkappa)\, g_{ik},\; f(\varkappa) = \varphi^2(\varkappa)/\varkappa$$

und $\bar{G}$ bedeutet die mittelst der $\bar{g}_{ik}$ gebildete Invariante.

Ist der Massenpunkt geladen, so hat man im Variationsprinzip noch den Term

$$e \int \dot{\xi}^k \Phi_k \, d\lambda$$

zu addieren, wobei Φ_k das elektromagnetische Potential bedeutet. Dieser Zusatz ist nicht nur eichinvariant, sondern auch invariant bei der Transformation (5).

Durch Variation von (7) nach den g_{ik} erhält man die Gleichungen für das Gravitationsfeld.

Die Variation nach dem ξ^l liefert die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes.

Die „Gravitationskonstante" ist nun durch das Verhältnis von schwerer zu träger Masse definiert. Hieraus ergibt sich, dass diese proportional zu f sein muss.

Da nun $f(\varkappa)$ eine willkürliche Funktion von $\varkappa$ ist, so macht die Jordansche Theorie, ohne eine bestimmte Annahme über f, keine Aussage über die Gravitationskonstante. Setzt man insbesondere

$$\varphi^2(\varkappa) = \varkappa$$

so wird f konstant. Wenn die ursprünglichen g_{ik} die Metrik bilden sollen, ist $\varphi = 1$ zu setzen. Die Gravitationskonstante ist dann aber $1/\varkappa$. Wenn jedoch $\varkappa$ die Gravitationskonstante sein soll, so wird

$$\varphi(\varkappa) = \varkappa = f.$$

Dann vereinfacht sich (7) zu

$$\int \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left(\bar{G} - \zeta \varkappa_{|k} (\varkappa^{|k}/\varkappa^2) \right) - \frac{\varepsilon_0}{2c^2} F_{kl} F_{kl} \right\} \sqrt{-g}\, d^4 x + m \int \sqrt{\dot{\xi}^k \dot{\xi}_k}\, d\lambda. \tag{8}$$

Dies entspricht in gewisser Hinsicht der Wahl $\alpha = -3/2$, bzw. $\eta = -1$ (P. J., § 27 1). Es besteht aber doch ein wesentlicher Unterschied zwischen (8) und der zitierten Gleichung bei Jordan. Denn die von Jordan nicht angeschriebenen elektromagnetischen Terme werden, falls man $\eta = -1$ setzt, von $\varkappa$ unabhängig, während sie im allgemeinen mit $\varepsilon_0 = \varkappa^{1+1/\eta}$ multipliziert sind.

2. Beschreibung der Materie durch ein Wellenfeld.

An Stelle des Zusatzes (4) zum Variationsintegral kann die Materie auch durch den Term

$$\frac{1}{2} \int \alpha(\varkappa) \left[\hbar^2 \Psi_{|k} \Psi_{|l} g^{kl} - m^2 c^2 \varphi^2(\varkappa) \Psi^2 \right] \sqrt{-g}\, d^4 x \tag{9}$$

beschrieben werden. Dabei sind $\alpha(\varkappa)$ und $\varphi^2(\varkappa)$ wiederum willkürliche Funktionen. Ψ ist das, der Einfachheit halber, als reell angenommene Wellenfeld der Materie.

Wir können nun hier die Metrik dadurch definieren, dass wir verlangen:

II. Die Comptonwellenlänge der durch das Feld Ψ beschriebenen Teilchen ist konstant.

Das bedeutet natürlich physikalisch, dass man die Längen in Einheiten der Comptonwellenlänge messen soll.

Man erkennt sogleich, dass auch in diesem Falle die Transformation

$$\bar{g}_{ik} = \varphi^2(\varkappa)\, g_{ik} \tag{10}$$

die gewünschte Metrik liefert. Setzt man (10) in (9) ein, so folgt

$$\frac{1}{2}\int \frac{\alpha(\varkappa)}{\varphi^2(\varkappa)} \left[\hbar^2 \Psi_{|k} \Psi^{|k} - m^2 c^2 \Psi^2\right] \sqrt{-g}\, d^4 x\,. \tag{11}$$

Die zu (11) gehörige Wellengleichung ist:

$$\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\alpha}{\varphi^2} \sqrt{-\bar{g}}\, \bar{g}^{kl}\, \Psi_{|k}\right) + \frac{\alpha}{\varphi^2}\, m^2 c^2 \sqrt{-\bar{g}}\, \Psi = 0\,. \tag{12}$$

Wenn man in (12) mit dem Ansatz $\Psi = e^{(i/\hbar)S}$ eingeht, und nur die von $\hbar$ unabhängigen Terme berücksichtigt, so folgt die (12) korrespondierende Hamilton-Jakobische Gleichung

$$-\bar{g}^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} + m^2 c^2 = 0\,. \tag{13}$$

Diese besagt aber, dass sich die durch (11) beschriebenen Teilchen auf geodätischen Linien bewegen.

Somit sind die beiden Postulate I und II gleichwertig.

Für geladene Teilchen ist ψ komplex und in (9) und (11) ist $\hbar/i\; \partial/\partial x^k$ durch $\hbar/i\; \partial/\partial x^k - e\Phi_k$ zu ersetzen. Dabei sind die Φ_k die den F_{kl} entsprechenden Potentiale. Durch Variation von (11) nach den Φ_k erhält man die Stromdichte.

Es ist übrigens sinnvoll, an Stelle von Ψ das Feld

$$\chi = \sqrt{\alpha}/\varphi \cdot \Psi$$

einzuführen. Setzt man χ in (11) ein, so erhält man Zusatzterme, die proportional zu $\hbar(\partial\varkappa/\partial x^k)$ werden. Diese bedeuten eine Wechselwirkung der Teilchen mit dem $\varkappa$-Feld, die jedoch im klassischen Grenzfall (13) verschwindet. In einer Theorie, in der mehrere Teilchenarten vorkommen, muss bei allen Teilchen dieselbe Funktion

$\varphi(\varkappa)$ vorkommen. Wenn neben skalaren Feldern auch solche eingeführt werden, die der Diracschen Gleichung genügen, so ist in dieser der Massenterm mit $\varphi(\varkappa)$ zu multiplizieren, was schon aus Dimensionsgründen verständlich ist. Nur dann existiert eine Metrik, in der die Comptonwellenlängen aller Teilchen konstant sind. Wenn nämlich für zwei Teilchenarten zwei verschiedene Funktionen φ_1 und φ_2 eingeführt werden, so bedeutet φ_1/φ_2 die relative Änderung ihrer Comptonwellenlängen.

Von einem ganz formalen Standpunkt aus ist freilich auch gegen eine solche Theorie nichts einzuwenden. Nur besteht in diesem Falle keine Möglichkeit mehr, die Metrik in eindeutiger Weise zu definieren. Ferner aber, und dies scheint mir ein entscheidender Einwand zu sein, widerspricht eine derartige Annahme der grundlegenden Tatsache, auf der die allgemeine Relativitätstheorie beruht, der Gleichheit von schwerer und träger Masse: am selben Orte ist die Gravitationskonstante für alle Massen die gleiche. Nun ist die Gravitationskonstante durch

$$f = \varphi^2/\varkappa$$

gegeben; also muss $\varphi(\varkappa)$ für alle Massen denselben Wert besitzen. Diese Überlegung zeigt aufs deutlichste, dass nur die Gleichheit von schwerer und träger Masse der Metrik einen eindeutigen physikalischen Sinn verleiht.

3. Die Diëlektrizitätskonstante des Vakuums.

Die Elektromagnetischen Terme sind im Variationsprinzip (3') bzw. (8) mit ε_0 multipliziert. Daher lauten die aus (8) folgenden Maxwellschen Gleichungen

$$(\varepsilon_0 F^{kl})_{||l} = 0. \tag{14}$$

Ist geladene Materie vorhanden, so steht auf der rechten Seite von (14) die Stromdichte, welche der Kontinuitätsgleichung genügt. Man hat daher

$$\varepsilon_0 F^{kl}$$

mit den Feldintensitäten $\mathfrak{D}, \mathfrak{H}$ zu identifizieren. Das bedeutet, dass diese Theorie eine veränderliche Diëlektrizitätskonstante des Vakuums

$$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 = \varkappa^{1+1/\eta}$$

liefert. Diese gibt zwar zu keinem Brechungsindex Anlass, da $\varepsilon_0 \mu_0$ stets gleich 1 ist. Dagegen hat ε_0 zur Folge, dass für die Atomtheorie die Feinstrukturkonstante

$$e^2/\hbar\, c\, \varepsilon_0$$

massgebend wird, die somit veränderlich ist. Der Bohrsche Radius ist proportional zu ε_0, die Wellenlängen der Spektrallinien zu ε_0^2. Die Grösse von ε_0 ist, anders als die Gravitationskonstante, von der Definition der Längeneinheit unabhängig, wovon man sich leicht überzeugt.

Da nun die Länge eines materiellen Maßstabes, z. B. des Urmeters in Paris, durch den Bohrschen Radius bestimmt wird, so ist eine Längendefinition durch ein materielles Etalon in dieser Theorie wesentlich verschieden von derjenigen durch die Comptonwellenlänge. Eine wiederum andere Längendefinition liefern die Spektrallinien. Die relativen Längenänderungen der drei verschiedenen Längeneinheiten (Comptonwellenlänge, Urmeter, Spektrale Wellenlänge) sind im Prinzip beobachtbare Erscheinungen, die unabhängig von jeder Festlegung einer bestimmten Metrik sind.

Nimmt man an, dass $\varkappa$ in kosmischen Räumen variabel sei, so müsste sich diese Variabilität auf die Rotverschiebung des von fernen Sternen ausgestrahlten Lichtes auswirken. Dieser Effekt ist von JORDAN bei seiner Diskussion übersehen worden.

Es ist freilich naheliegend und wohl auch natürlich, in dieser Theorie $\eta = -1$, $\varphi = 1$ zu setzen. Dann wird $\varepsilon_0 = 1$, und $J = 1/\varkappa$ wird proportional zur „Gravitationskonstanten". Diese Auffassung widerspricht wohl kaum derjenigen Jordans, der selber Andeutungen in dieser Richtung gemacht hat (P. J., S. 172).

Andererseits führt das Variationsprinzip (2) mit $\alpha = -3/2$, $\lambda = 1$ (also $\eta = -1$, $\zeta = 3/2$), falls $\varphi^2 = \varkappa$ gesetzt wird, zu einem Variationsprinzip (7), in welchem $\varkappa$ nicht mehr vorkommt: d. i. die Einstein'sche Theorie. Dabei erweist sich die Nebenbedingung (1) als überflüssig.

Basel, Seminar für theoretische Physik der Universität.