Espaces homogènes et isotropes de la Relativité

Espaces homogènes et isotropes de la Relativité

par J. TITS (Bruxelles)

1. Soit V_4 une variété à 4 dimensions munie d'une métrique de RIEMANN de signature $+ - - -$. V_4 est *homogène* si elle possède un groupe transitif d'isométries. Nous dirons qu'elle est *isotrope* (sous-entendu: pour les directions lumineuses) en un point p donné si les isométries conservant p sont transitives sur les directions lumineuses ($ds^2 = 0$) issues de ce point; on peut voir que cette condition est équivalente à la suivante (*isotropie d'espace*): il existe en p un élément plan ω à 3 dimensions de genre espace tel que les isométries conservant p et ω soient transitives sur les directions issues de p dans ω.

2. Les seules V_4 homogènes et isotropes sont

l'espace de de SITTER D_4, c'est-à-dire l'extérieur d'une hyperquadrique de signature $+ - - - -$ dans l'espace projectif P_4 à 4 dimensions muni de la métrique cayleyenne, et son revêtement double $D_4^{(2)}$;

l'«intérieur» C_4 d'une hyperquadrique de signature $+ + - - -$ dans P_4 muni de la métrique cayleyenne, et ses divers revêtements (revêtements finis $C_4^{(n)}$ et revêtement universel $C_4^{(\infty)}$);

les produits $M_4 = K_3 \cdot L$, où K_3 est un espace euclidien E_3, elliptique F_3, sphérique S_3 ou hyperbolique H_3 à 3 dimensions, et où L est l'ensemble R des nombres réels ou l'ensemble R_a des nombres réels modulo a (a donné), M_4 étant muni de la métrique $-ds_K^2 + dt^2$, où ds_K est la métrique sur K_3 et t est une variable dans L (en particulier, $E_3 \cdot R$ est l'espace de MINKOWSKI);

l'espace A_4 des variables x, y, z, t muni de la métrique $-a^t \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$ (identique à l'espace de de SITTER dont on a retiré un hyperplan tangent à l'absolu);

l'espace B_4 obtenu à partir de $S_3 \cdot R_a$ défini plus haut en identifiant les couples de points «diamétralement opposés» (p, t) et $(p', t + a/2)$ (p et p' = points diamétralement opposés sur S_3).

3. Parmi les espaces précités, seuls D_4, $D_4^{(2)}$, $C_4^{(\infty)}$, $K_3 \cdot R$ et A_4 sont infinis dans le sens du temps (non-existence de ligne de temps fermée).

4. Des définitions de l'homogénéité et de l'isotropie analogues à celles du n^0 1 peuvent être données pour les variétés V_4 munies seulement d'un champ de cônes quadratiques $ds^2 = 0$ de signature $+ - - -$, en remplaçant les isométries par les transformations conservant ce champ (transformations conformes). Les espaces homogènes et isotropes ainsi définis sont, en plus de ceux obtenus par abstraction à partir des espaces du n⁰ 2, l'«espace de MINKOWSKI conforme» (surface d'une hyperquadrique de signature $+ + - - - -$ dans l'espace projectif P_5) et ses divers revêtements (finis et universels).

5. En recherchant les V_3 riemanniennes de signature $+ - -$ qui sont homogènes et isotropes dans un sens analogue à celui du n^0 1, on trouve, outre les équivalents tridimensionnels des espaces du n^0 2, des espaces nouveaux $N(K_2, L, b)$ qui peuvent être caractérisés comme suit: $N(K_2, L, b)$ est fibré de base $K_2 = E_2$, S_2 ou H_2 (cf. n^0 2) et de fibre $L = R$ ou R_a, et si U désigne un voisinage de coordonnées dans K_2, la métrique de N dans $U \cdot L$ est donnée par $ds^2 = -ds_K^2 + (dt + b\,\varphi_K)^2$, où b est une constante donnée et φ_K est une forme de PFAFF dans U dont l'intégrale le long de la frontière d'un domaine quelconque mesure l'aire de ce domaine. Lorsque $K_2 = S_2$, on doit avoir $L = R_a$, et a/b doit être un sous-multiple de l'aire totale de K_2.