Quantisierung allgemein-kovarianter Feldtheorien

Autor(en): **Bergmann, P.G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **29 (1956)**

Heft [4]: **Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112724

Quantisierung allgemein-kovarianter Feldtheorien[1])

by P. G. BERGMANN (Syracuse)

This review paper reports on the present status of attempts to quantize theories which, like EINSTEIN'S General Theory of Relativity, are invariant under general curvilinear coordinate transformations. The introduction deals with the motivation and justification of such a program and argues that general relativity may very likely contribute significantly to the theory of elemtary processes, even though gravitational effects as such are quantitatively many orders of magnitude smaller than electromagnetic and nuclear interactions. The second section describes the characteristic properties of covariant theories, that the canonical momentum densities never describe the velocities uniquely, that the Hamiltonian density contains arbitrary functions, and that aside from the canonical equations there are also algebraic conditions (constraints) between the canonical field variables. The third section is concerned with approaches to quantization and describes particularly the method of selecting 'true observables' from among the dynamical variables, which alone will appear as HILBERT operators in the quantized theory. Quantization with the help of coordinate conditions and with the help of Lagrangian methods are briefly discussed. The fourth section deals with spin and angular momentum in general relativity, and the last with the rôle of the strong conservation laws.

1. *Einleitende Betrachtungen.* Seit der Formulierung der konsequenten Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie einerseits, der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie anderseits, ist die Entwicklung der grundlegenden Ideen in der theoretischen Physik zu einem vorläufigen Abschluß gekommen. Auf der einen Seite haben wir eine konsequente Formulierung der Begriffe, die wir im Bereich der Elementarprozesse brauchen, eine Formulierung, die genügend weitärmelig zu sein scheint, um auch einen großen Teil der Kernphysik erfassen zu können. Auf der anderen Seite liefert uns die Relativitätstheorie in nahezu vollkommener Fassung eine klassische Feldtheorie, die uns nicht nur ein befriedigendes Verständnis für die Rolle des Bewegungszustands eines Beobachters liefert,

---

[1]) Diese zusammenfassende Darstellung kürzlicher Arbeiten wurde für die in Bern stattfindende Konferenz „Fünfzig Jahre Relativitätstheorie" vorbereitet. Die Unterstützung des Office of Naval Research, und neuerdings auch der National Science Foundation, wird vom Verfasser dankend anerkannt.

sondern darüber hinaus eine vollständige Theorie der Gravitation, insbesondere eine Begründung für die Gleichheit von träger und schwerer Masse, und schließlich auch noch die Theorie der ponderomotorischen Gesetze jeder Feldtheorie.

Praktisch sind die Beziehungen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie zum Mikrokosmos völlig verschieden. Sobald wir in das Gebiet hoher Energien kommen, brauchen wir die spezielle Relativitätstheorie; ja, beim heutigen Stand der Meßtechnik können wir eine nichtrelativistische Theorie des Elektrons und der elektromagnetischen Strahlung kaum mehr ernst nehmen. Infolgedessen hat die Quantisierung speziell-relativistischer Feldtheorien seit den frühen Dreißigerjahren stets im Mittelpunkt des theoretischen Interesses gestanden. Anderseits hat die allgemeine Relativitätstheorie ihren Hauptbeitrag im Gebiet des astronomisch-Großen gemacht. Hierfür liefert das Programm unserer Tagung beredtes Zeugnis. Das Verhältnis zwischen den gravitationellen und elektrostatischen Kräften, die zwei Elektronen aufeinander ausüben, ist eben von der Größenordnung 10^{-40}; solange man daher den Effekt der allgemeinen Relativitätstheorie nicht qualitativ, sondern nur quantitativ zu bewerten sucht, wird er noch auf lange Zeit zu vernachlässigen sein gegenüber den höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik, die noch gar nicht berechnet sind. Damit ist es wohl zu erklären, daß die große Mehrzahl der zeitgenössischen Theoretiker an den Beziehungen zwischen allgemeiner Relativitätstheorie und Quantentheorie nur wenig interessiert ist.

Mir scheint aber, daß man neben solchen quantitativen Betrachtungen qualitativ neue Möglichkeiten nicht völlig außer Acht lassen sollte. Die allgemeine Relativitätstheorie ist ja nicht lediglich eine Theorie der Gravitation, die wir getrost ignorieren dürfen, wenn die spezifisch gravitationellen Effekte klein sind. Genau wie die spezielle Relativitätstheorie behauptet die allgemeine, daß gewisse, früher als absolut erachtete Eigenschaften des Raumes und der Zeit nicht fixiert sind, sondern physikalisch veränderlich. Nun, wenn die Geometrie im Großen nicht streng flach ist (MINKOWSKI-Metrik), so wird sie es auch nicht im Kleinen sein. Und was wesentlicher ist, wenn die Metrik ein System von veränderlichen Größen darstellt, dann darf man sie nicht physikalisch völlig anders behandeln als andere Felder. In einer konsequenten Theorie müssen die Gravitationspotentiale, genau so wie alle anderen Kräftefelder, quantisiert werden, sofern man an die grundsätzliche Richtigkeit der Feldquantisierung glaubt.

Fernerhin ist die allgemeine Relativitätstheorie bisher die einzige Feldtheorie, in der die ponderomotorischen Gesetze mit den eigentlichen Feldgesetzen eine logische Einheit bilden. Die Theorie der Bewegung von Partikeln ist von EINSTEIN, INFELD, und HOFFMANN seit 1937 in immer vollkommenerer Weise entwickelt worden und von INFELD und WALLACE auf die Bewegung im elektrischen Feld ausgedehnt worden [1–4]. PAPAPETROU hat gezeigt, daß diese Theorie mathematisch äquivalent ist einer, in der die Teilchen zunächst ausgedehnt eingeführt werden, wenn man den „Formfaktor" nur genügend klein werden läßt [5]. Einige meiner Studenten haben auch im Detail ausgeführt, daß die Verknüpfung der Feld- mit den Bewegungsgesetzen eine generelle Eigenschaft aller allgemein-kovarianten Theorien ist, ähnlich wie etwa jede eichinvariante Theorie zu einem Erhaltungsgesetz der elektrischen Ladung führt [6, 7]. Da nun die Beziehung zwischen Feldgesetzen und Teilchenbewegung offensichtlich im Kleinen genauso interessant ist wie im Großen, ist zu vermuten, daß uns die allgemeine Relativitätstheorie, und insbesondere das Prinzip der allgemeinen Kovarianz auch im Kleinen angeht.

Ich möchte diesen letzteren Punkt noch etwas konkretisieren. Bekanntlich sind die dynamischen Gesetze, die die Bewegung von Punktladungen bestimmen, logisch von den partiellen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes unabhängig. Es ist durchaus möglich, die MAXWELLschen Gleichungen mit beliebig vorgegebenen Teilchenbahnen zu lösen. Es ist aber mißlich, daß man, um die LORENTZgleichungen überhaupt sinnvoll anschreiben zu können, das Gesamtfeld in der Umgebung einer Punktladung in unendliches „Selbstfeld" und endliches „einfallendes Feld" trennen muß. Diese Trennung geht noch an, solange die Feldgleichungen selbst in den eigentlichen Feldgrößen linear sind. Andernfalls verliert die Trennung jeden vernünftigen mathematischen Sinn. Insbesondere im Gebiet der Kernkräfte ist es aber garnicht ausgemacht, daß die „Feldgleichungen" (d. h. wohl die Wellengleichungen der Mesonenfelder) linear sind. Es wäre also garnicht uninteressant, die Teilchenbewegung so bestimmen zu können, wie es in der allgemeinen Relativitätstheorie gemacht wird: Als eine Folge der Feldgleichungen, deren Ausrechnung die Abtrennung des „Selbstfeldes" prinzipiell nicht erfordert.

Aus allen diesen Gründen glaube ich, daß der Quantentheoretiker der allgemeinen Relativitätstheorie gegenüber nicht indifferent sein sollte. Anderseits haben viele andere Theoretiker, und vor allen EINSTEIN selbst, den Standpunkt vertreten, daß die gegenwärtige Quantentheorie so grundsätzlich unbefriedigend ist, daß man von jedem Vereinigungsversuch absehen sollte [8]. Man müsse vielmehr auf dem Wege über die klassischen Feldbegriffe zu einer „einheitlichen Feldtheorie" kommen, die nicht nur irgendwie auch die Resultate der Quantentheorie liefert, etwa durch ihre extreme Nichtlinearität, sondern darüber hinaus alle Eigenschaften der Elementarteilchen voraussagt bzw. erklärt. Parallel mit der Arbeit in „einheitlicher Feldtheorie" haben andere, vornehmlich

DE BROGLIE, BOHM, WIENER und SIEGEL gezeigt, daß der wesentlich probabilistische Charakter der heutigen Quantentheorie auf verschiedenartige Weise hinweginterpretiert werden kann, so daß die sicherlich richtigen Resultate der Theorie auch durch eine streng deterministische Theorie, plus die Konstruktion bestimmter GIBBSscher Gesamtheiten, reproduziert werden können [9–12].

Ohne das Interesse aller dieser Bestrebungen in Abrede stellen zu wollen, so glaube ich doch, daß es nicht unberechtigt ist, gleichzeitig an einem konservativeren Programm zu arbeiten. Dieses besteht darin, sowohl von der Quantentheorie als auch von der allgemeinen Relativitätstheorie gewisse Grundzüge zumindest als „relativ wahr" zu akzeptieren und zu sehen, ob diese Charakterzüge sich nicht vereinen lassen. Ein solches Programm involviert keinerlei physikalisches Glaubensbekenntnis zur einen oder zur anderen gegenwärtigen Theorie in aeternitatem, sondern eher ein vorsichtiges Tasten, welche Züge sich als relativ stabil erweisen werden. Hat doch die Geschichte der Physik immer wieder gezeigt, daß gewisse Züge jeder überholten Theorie in der Nachfolgerin wieder auferstehen. Wenn ich Sie also bitten möchte, das Programm des Vereinigungsversuchs als physikalisch vernünftig zu akzeptieren, so tue ich das nicht in einem polemischen Sinne, daß ich mein Rezept etwa als alleinseligmachend verkaufen möchte. Im Gegenteil, ich finde, daß wir im gegenwärtigen Zustand der noch immer schwankenden Grundlagen viele verschiedene Bestrebungen in allen möglichen Richtungen brauchen, die sich vielleicht gegenseitig befruchten und dadurch schließlich zu etwas brauchbarem führen können.

Schließlich möchte ich Sie gleich schonend darauf vorbereiten, daß ich leider keinerlei endgültige Resultate dieses Programms mitteilen kann, weil wir noch keineswegs am Ende sind. Ich hoffe, daß das, was ich berichten kann, zeigen wird, daß das Programm nicht uninteressant ist, daß man auf jeden Fall bereits gewisse Neukenntnisse erzielt hat. Und ich werde mich bemühen, Möglichkeiten für die Zukunft anzudeuten.

2. *Der singuläre Charakter allgemein-kovarianter Theorien.* Traditionell geht man zur Quantisierung von der kanonischen Form einer Theorie aus. Wenn das Variationsprinzip gegeben ist, so führt man zunächst die kanonisch konjugierten Impulsgrößen ein, um sodann die HAMILTONsche Funktion zu konstruieren. Bei der Quantisierung werden dann sowohl die Konfigurations- wie die Impulskoordinaten durch entsprechende HILBERToperatoren ersetzt, deren Vertauschungsrelationen den POISSONschen Klammerausdrücken der klassischen Theorie nachgebildet sind.

Formal läuft diese Prozedur darauf hinaus, in der klassischen Theorie der Gruppe der kanonischen Transformationen besondere Bedeutung zuzuschreiben. Jede dynamische Veränderliche ist nicht nur eine physikalisch bedeutungsvolle Größe an sich, sie dient auch als Erzeugende einer infinitesimalen kanonischen Transformation. Beim Übergang zur quantisierten Theorie werden dann die kanonischen durch unitäre Transformationen ersetzt. Die Observabeln sind nun die Erzeugenden der infinitesimalen unitären Transformationen. Die Struktur der neuen Transformationsgruppe wird möglichst weitgehend der der kanonischen Gruppe nachgebildet, nur daß die Verwirklichung jetzt durch die Gruppe der unitären Transformationen im HILBERTraum geliefert wird. Die eigentliche Quantisierung besteht dann in der Untersuchung der neuen Gruppe, wobei insbesondere die Eigenwerte der verschiedenen physikalisch interessanten Operatoren die möglichen Meßergebnisse der entsprechenden Observabeln sein sollen.

Für den ersten Schritt in dieser Prozedur ist es nun wesentlich, daß die Beziehung zwischen den zeitlichen Ableitungen der Konfigurationskoordinaten (die ich weiterhin als „Geschwindigkeiten" bezeichnen werde) und den Impulskoordinaten ein-eindeutig sei. Denn im Ausdruck für die HAMILTONsche Funktion,

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k(q, p) - L\,[q_k, \dot{q}_k(q, p)]\,, \tag{2.1}$$

ist es wesentlich, daß die Geschwindigkeiten auch wirklich durch die Impulskoordinaten ausgedrückt werden können. Schon an dieser Stelle bereiten allgemein-kovariante Theorien grundsätzliche Schwierigkeiten, die wohl zuerst von ROSENFELD erkannt worden sind [13, 14]. Damit die Beziehung nämlich ein-eindeutig sei, muß die Matrix der Ableitungen der Impulskoordinaten nach den Geschwindigkeiten,

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k\, \partial \dot{q}_l}\,, \tag{2.2}$$

regulär sein, darf also keine Nullvektoren besitzen. Dies ist aber gerade bei allgemein-kovarianten Theorien der Fall. Angenommen, wir haben es mit einer Feldtheorie zu tun, in der also die Konfigurationskoordinaten irgendwelche Feldkomponenten y_A sind (der Index A ist ein Sammelindex, der in beliebiger Weise zur Identifizierung der individuellen Komponenten dient, und nicht etwa ein Koordinatenindex). Bei einer infinitesimalen Koordinatentransformation, die etwa durch die Änderungen $\xi^\varrho(x)$ der Koordinatenwerte an jedem Weltpunkt beschrieben sei, mögen sich die y_A *als Funktionen ihrer Argumente* x nach dem Schema

$$\bar{\delta} y_A = c_{A\varrho}\, \xi^\varrho + c^{\sigma}_{A\varrho}\, \xi^\varrho{}_{,\sigma} \tag{2.3}$$

transformieren. Dann wird die LAGRANGEsche Dichte, wegen der Invarianz der Theorie einer beliebigen Koordinatentransformation gegenüber, sich nur um eine vollständige Divergenz ändern dürfen. Wir haben also

$$\begin{aligned}\bar{\delta} L &= \frac{\partial L}{\partial y_A}\,\bar{\delta} y_A + \frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\,\bar{\delta} y_{A,\varrho} \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial y_A} - \left(\frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\right)_{,\varrho}\right]\bar{\delta} y_A + \left(\frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\,\bar{\delta} y_A\right)_{,\varrho} = Q^{\varrho}{}_{,\varrho}\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Hier bezeichnet weiterhin das Symbol $\bar{\delta}$ die infinitesimale Änderung einer Größe als Funktion der Koordinaten, nicht an einem festgehaltenen Weltpunkt. Unter Berücksichtigung von (2.3) finden wir nach einer kurzen Umrechnung:

$$\begin{gathered}[L^A c_{A\varrho} - (L^A c^{\sigma}_{A\varrho})_{,\sigma}]\,\xi^{\varrho} = \left[Q^{\varrho} - \frac{\partial L}{\partial y_{A,\varrho}}\,\bar{\delta} y_A - L^A\,\sigma^{\varrho}_{A\sigma}\,\xi^{\sigma}\right]_{,\varrho}, \\ L^A \equiv \frac{\partial L}{\partial y_A} - \left(\frac{\partial L}{\partial y_{A,\sigma}}\right)_{,\sigma} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Da nun ξ^{ϱ} beliebig ist, folgt der Satz von vier Identitäten, die wir die BIANCHIschen Identitäten nennen wollen,

$$L^A c_{A\varrho} - (L^A c^{\sigma}_{A\varrho})_{,\sigma} \equiv 0\,. \tag{2.6}$$

Diese Identitäten, die also eine Folge der allgemeinen Kovarianz sind, führen nun zu einem direkten Widerspruch zur Regularitätsbedingung (2.2). Wenn wir nämlich in diesen Identitäten die Glieder mit verschiedenen Differentiationstermen trennen, so müssen diese separat verschwinden [15]. Die höchsten Terme enthalten die Feldgrößen dreimal differenziert. Wenn wir nun speziell die Koeffizienten der dritten Ableitungen nach der Koordinate x^4 (der „Zeit") aufschreiben, so erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_A\,\partial \dot{y}_B}\,c^4_{A\varrho} \equiv 0\,, \tag{2.7}$$

die also explizit Nullvektoren der Matrix (2.2) liefern. Hiermit ist gezeigt, daß allgemein eine kovariante Theorie, deren Feldgleichungen sich von einem Variationsprinzip herleiten lassen, in dem soeben besprochenen Sinn „singulär" ist.

Da sich nun ergeben hat, daß die Geschwindigkeiten nicht eindeutige Funktionen der Impulse sein können, da aber anderseits die Zahl der einen Größen der der andern gleich ist, so folgt, daß nicht alle Impuls-komponenten frei wählbar sind. Wir haben vielmehr algebraische (d.h. keine zeitlichen Ableitungen enthaltende) Beziehungen zwischen ihnen; wir können diese sofort aus (2.7) ablesen, indem wir sie in die Form schreiben

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}_B}(\pi^A c^4_{A\varrho}) = 0\,, \qquad \pi^A \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A}\,. \tag{2.8}$$

(Hier ist die Annahme gemacht worden, die im allgemeinen zutrifft, daß die Größen $c^4_{A\varrho}$ nur von undifferenzierten y_A abhängen.) Infolgedessen haben wir die „Primärbedingungen"

$$c^4_{A\varrho}\,\pi^A - K_\varrho(y) \equiv 0\,. \tag{2.9}$$

Die Größen K_ϱ hängen nur von y_A ab und lassen sich stets leicht bestimmen. Angenommen, wir hätten eine HAMILTONsche Funktion konstruiert. Dann wären wir in der Lage, die Zeitabhängigkeit jedes Funktionals der kanonischen Feldgrößen explizit hinzuschreiben. Indem wir nun verlangen, daß sämtliche zeitliche Ableitungen der Primärbedingungen verschwinden, erhalten wir weitere, „Sekundärbedingungen" usw. Glücklicherweise läßt sich zeigen, daß es nur eine endliche Zahl derartiger weiterer Bedingungen gibt. In den meisten Theorien, und insbesondere in der kanonischen Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie, gibt es insgesamt nur acht Bedingungen, von denen die Hälfte Primärbedingungen sind.

Es erweist sich nun als möglich, eine HAMILTONsche Funktion zu konstruieren, die frei von Geschwindigkeiten ist [16, 17]. Man kann zu diesem Zweck zeitweilig neue Variablen einführen, so daß jede der Primärbedingungen nur eine Impulsdichte enthält. Im endgültigen Ausdruck für H kehrt man dann wieder zu den ursprünglichen Variablen zurück. Der Ausdruck für H ist aber nicht eindeutig. Er enthält die vier Primärbedingungen, jede mit einer völlig willkürlichen Funktion multipliziert. Die Wahl dieser vier Funktionen ist der Einführung von „Koordinatenbedingungen" in der üblichen Theorie äquivalent. In der kanonischen Fassung bleibt die volle Kovarianz also nur erhalten, wenn man diese willkürlichen Funktionen nicht festlegt. Die vollständige Formulierung der Theorie erfordert also die Ausrechnung der HAMILTONschen Funktion und sämtlicher Primär- und Sekundärbedingungen [18, 19].

Eine ganz ähnliche Formulierung stammt von DIRAC [20]. Anstatt willkürliche Funktionen in die HAMILTONsche Funktion einzuführen, läßt er in ihr eine Reihe von Geschwindigkeiten, derart, daß sich leere Beziehungen ergeben, wenn immer man versucht, diese Geschwindigkeiten durch kanonische Größen auszudrücken. Die DIRACsche Formulierung ist der unserigen völlig äquivalent.

Nur der Vollständigkeit wegen möchte ich noch erwähnen, daß sowohl DIRAC wie wir unabhängig voneinander besondere Hilfskoordinaten („Parameter“) eingeführt haben, wodurch die gewöhnlichen Koordinaten formal dynamische Veränderliche werden und die ganze Theorie an formaler Eleganz gewinnt [20, 21]. Z.B. wird die LAGRANGEsche Funktion homogen in den Geschwindigkeiten (vom ersten Grad), die Impulskoordinaten homogen vom nullten Grad; wie man erwarten würde, werden lineare Impuls- und Energiedichte den Koordinaten kanonisch konjugiert. Es hat sich aber erwiesen, daß diese formalen Vorteile durch ganz erhebliche Komplikationen in der expliziten Form der Theorie kompensiert werden. Es erscheint, daß Parameter nur für ganz spezielle Untersuchungen formaler Art vorteilhaft sind.

In der HAMILTONschen Version einer kovarianten Feldtheorie entspricht einer Koordinatentransformation natürlich eine ganz bestimmte kanonische Transformation. Von besonderem Interesse ist die Erzeugende infinitesimaler kanonischer Transformationen. Diese ist nämlich eine ganz bestimmte Linearkombination der Primär- und Sekundärbedingungen der Theorie. Die Koeffizienten dieser Bedingungen sind die „beschreibenden“ Größen ξ^ϱ und ihre zeitlichen Ableitungen, die wir oben in (2.3) eingeführt hatten. Die infinitesimalen Transformationen bilden einen Gruppenkeim mit einer bestimmten LIEschen Algebra. Diese spiegelt sich ganz genau wider in den POISSONschen Klammerausdrücken der Zwangsbedingungen untereinander. Der Beweis, daß es nur eine endliche Anzahl von Bedingungen gibt, wird zweckmäßigerweise mit Hilfe dieser Gruppeneigenschaft geführt [18].

3. *Die Möglichkeit der Quantisierung.* Es fragt sich nun, wie man bei der Quantisierung einer Theorie vorzugehen hat, die zwar in kanonischer Fassung vorliegt, in der aber eine Reihe von algebraischen Bedingungen zwischen den kanonischen Veränderlichen erfüllt sein muß. Ist es denkbar, alle diese Veränderlichen als HILBERToperatoren zu behandeln?

DIRAC hat dieser Frage Beachtung geschenkt und hat sie verneint [20]. Da er nicht in erster Linie vom kovarianztheoretischen Gesichtspunkt ausging, betrachtete er gleich zwei verschiedene Arten von Bedingungen, die er solche der „ersten Klasse“ und der „zweiten Klasse“ nannte. Wenn der POISSONsche Klammerausdruck zwischen einer Bedingung und allen anderen verschwindet (evtl. modulo der Bedingungen selbst), so haben wir es mit einer Bedingung erster Klasse zu tun, andernfalls mit einer zweiter Klasse. Unsere Primär- und Sekundärbedingungen, die die Folge von Kovarianzeigenschaften sind, gehören alle zur ersten Klasse; aber bei der Hyperquantisierung von Materiewellen trifft man auch auf Bedingungen zweiter Klasse. Offensichtlich können nun Bedingungen der zweiten Klasse nicht HILBERToperatoren sein. Denn angenommen, wir betrachten einen Zustand, der physikalisch zulässig ist, der also für jede der Bedingungen C^a die Gleichung

$$C^a \Psi = 0 \tag{3.1}$$

erfüllt, dann führt offenbar die Vertauschungsrelation

$$[C^a, C^b] = C^{ab} \neq 0, \tag{3.2}$$

die dem entsprechenden POISSONschen Klammerausdruck nachgebildet ist, auf einen Widerspruch, insbesondere, wenn C^{ab} eine C-Zahl ist. Aber auch Bedingungen der ersten Klasse führen zu Schwierigkeiten. Zu einer Bedingung erster Klasse läßt sich nämlich stets eine dynamische Veränderliche finden, die zur Bedingung kanonisch konjugiert ist. Nun ist es wohlbekannt, daß von zwei kanonisch konjugierten HILBERToperatoren keiner auf Hauptachsen gebracht werden kann. Die Forderung (3.1), angewandt auf eine Bedingung erster Klasse, liefert also das widersprüchliche Resultat, daß ein physikalisch zulässiger Zustand Eigenvektor eines bzw. mehrerer Operatoren sein muß (mit dem Eigenwert Null), die keine Eigenvektoren haben dürfen. Und so hätten wir die Forderung, daß alle physikalisch zulässigen Zustände nur uneigentliche Vektoren, d. h. außerhalb des HILBERTraums liegende Häufungspunkte sein müßten. Unter anderem wären sie alle nichtnormalisierbar.

Man kann sich allen diesen Schwierigkeiten entziehen, wenn man darauf verzichtet, die Vertauschungsrelationen der Quantenoperatoren direkt aus den POISSONschen Klammerausdrücken der klassischen Theorie herzuleiten. In der Gegenwart von Zwangsbedingungen aller Art ist die Gruppe der kanonischen Transformationen auch nicht die einzige oder die natürlichste Transformationsgruppe im klassischen Phasenraum [22]. Die Zwangsbedingungen definieren im Phasenraum einen Unterraum, der aus den physikalisch zulässigen (klassischen) Zuständen besteht. Es liegt also nahe, nach einer Transformationsgruppe zu suchen, die diesen Unterraum auf sich selbst abbildet. Eine solche Transformationsgruppe gibt es nun tatsächlich. Sie besteht aus allen den Koordinatentransformationen im klassischen Phasenraum, die die kanonische Form der Bewegungsgleichungen reproduzieren und die Form der Zwangsbedingungen unverändert lassen. Auch für diese Transformationsgruppe gibt es Erzeugende, und ferner Klammerausdrücke, die den Kommutatoren der infinitesimalen Transformationen entsprechen. Ich möchte diese Klammerausdrücke im Gegensatz zu den POISSONschen nach DIRAC benennen. Die DIRACklammer zwischen einer Zwangsbedingung und irgendeiner Veränderlichen ist stets Null. Falls es aber Bedingungen erster Klasse gibt, so ist die DIRACklammer nicht für alle dynamischen Veränderlichen definiert.

Bevor ich auf die Details eingehe, möchte ich noch zur weiteren Rechtfertigung dieser Transformationsgruppe anführen, daß sie ermöglicht, die Zwangsbedingungen direkt Null zu setzen. Wir können die Gleichungen (3.1) durch die schärferen Operatorengleichungen

$$C^a = 0 \tag{3.3}$$

ersetzen.

Im Einzelnen kommt man zu den DIRACschen Klammern folgendermaßen. Wenn wir zunächst die kanonischen Koordinaten im klassischen Phasenraum mit y^ϱ bezeichnen und den antisymmetrischen konstanten Tensor, mit dem man POISSONklammern bildet, mit $\varepsilon^{\varrho\sigma}$, dann sind die Bewegungsgleichungen und die Zwangsbedingungen folgende:

$$\dot{y}^\varrho = \varepsilon^{\varrho\sigma} H_{,\sigma}, \qquad \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \varepsilon^{\varrho\sigma} A_{,\varrho} H_{,\sigma}, \qquad C^a = 0. \tag{3.4}$$

Wir führen nun zunächst Koordinaten auf der durch die Zwangsbedingungen definierten Hyperfläche ein, x^m, wodurch man dann die Hyperfläche selbst durch die Funktionen $y^\varrho(x^m)$ charakterisieren kann. Damit die Theorie innerlich widerspruchsfrei sein kann, dürfen die Bewegungsgleichungen natürlich nicht aus der Hyperfläche herausführen. Wir haben infolgedessen:

$$\begin{aligned} &\dot{y}^\varrho = \frac{\partial y^\varrho}{\partial x^m}\dot{x}^m, \qquad \varepsilon_{mn}\dot{x}^n = \frac{\partial H}{\partial x^m} = H_{,\varrho}\frac{\partial y^\varrho}{\partial x^m}, \\ &\varepsilon_{mn} = \frac{\partial y^\varrho}{\partial x^m}\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^n}\varepsilon_{\varrho\sigma}, \qquad \varepsilon_{\varrho\sigma}\varepsilon^{\sigma\tau} = \delta^\tau_\varrho. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Hierbei ist nichts darüber gesagt, ob der neue Tensor ε_{mn} auf der Hyperfläche regulär ist oder ob seine Determinante verschwindet. Das letztere ist nämlich immer der Fall, wenn es Zwangsbedingungen erster Klasse gibt. Wir verlangen jetzt, daß unsere infinitesimalen Transformationen der Parameter x^m untereinander die Form der Gleichungen (3.5) ungeändert lassen, außer daß sich natürlich die Form der HAMILTONschen Funktion ändern darf. Insbesondere sind die Komponenten des Tensors ε_{mn} als invariante Funktionen der Parameter x^m zu behandeln. Es stellt sich nun heraus, daß, fast genau wie bei infinitesimalen kanonischen Transformationen, eine Funktion $\Gamma(x^m)$ eine infinitesimale Transformation erzeugt, die allen Erfordernissen genügt:

$$\varepsilon_{mn}\,\delta x^n = \frac{\partial \Gamma}{\partial x^m}, \quad \delta H = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Die Erzeugende ist hier eine Funktion der x^m. Abseits der „erlaubten" Hyperfläche braucht sie gar nicht definiert zu sein. Wenn alle Zwangsbedingungen solche zweiter Klasse sind, so ist der Tensor ε_{mn} regulär, besitzt also einen reziproken Tensor. Man kann dann die Transformationsbedingungen (3.6) nach den Transformationsgrößen δx^n auflösen, und diese sind eindeutig durch die Erzeugende bestimmt. Besitzt die antisymmetrische Form ε_{mn} aber Nullvektoren, dann ist die Transformation nicht durch die Erzeugende völlig bestimmt, ja es gibt Transformationen, die zur Erzeugenden Null gehören. Dies sind die Transformationen

$$\delta x^n = U^n_{(s)}\,, \tag{3.7}$$

wo die neuen Größen $U^n_{(s)}$ die Nullvektoren von ε_{mn} sind. In diesem Falle legen aber die Gleichungen (3.6) auch der Erzeugenden Beschränkungen auf. Wenn wir sie mit einem Nullvektor multiplizieren, so finden wir

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x^m}\, U^m_{(s)} = 0\,. \tag{3.8}$$

Es zeigt sich also, daß die Anzahl der algebraisch voneinander unabhängigen Erzeugenden nicht gleich der der Parameter x^m ist, sondern daß diese Zahl noch weiter um die der Nullvektoren $\vec{U}_{(s)}$ vermindert werden muß. Man kann auch weiterhin zeigen, daß diese Einschränkungen innerlich widerspruchsfrei dann und nur dann sind, wenn die Bedingungen erster Klasse untereinander eine Funktionengruppe bilden, ihre POISSONklammern miteinander also modulo der Bedingungen erster Klasse verschwinden [23].

Im Falle von Nullvektoren bilden die Transformationen, die zur Erzeugenden Null gehören, eine invariante (normale) Untergruppe. Bilden wir die Faktorgruppe, so erhalten wir einen Gruppenkeim, der durch die erlaubten Erzeugenden (d.h. durch die Funktionen der x^m, die den Bedingungen (3.8) gehorchen), ein-eindeutig verwirklicht ist. Wir haben also eine neue Gruppe gefunden, die sich im Prinzip zur Darstellung durch HILBERToperatoren eignet.

Die DIRACschen Klammern erhält man selbstverständlich, indem man die Kommutatoren der Mitglieder der (Faktor-)Gruppe bildet und ihre Erzeugende bestimmt. Diese Klammern sind dadurch eindeutig bestimmt. Falls alle Zwangsbedingungen zur ersten Klasse gehören, unterscheiden sich die DIRACklammern von POISSONklammern nur dadurch, daß sie für gewisse Größen nicht definiert sind. Andernfalls bestehen zwischen den zwei Klammertypen Unterschiede auch für solche Veränderliche, für die beide wohldefiniert sind.

Die durch die DIRACmethode ausgeschlossenen Veränderlichen sind solche, deren POISSONklammern mit den Bedingungen erster Klasse nicht verschwinden. Da aber die Bedingungen erster Klasse die (HAMILTONschen) Erzeugenden der invarianten Transformationen sind, so folgt, daß die noch zulässigen Erzeugenden Invarianten sein müssen. Um Ihnen ein Gefühl dafür zu geben, was dies involviert, möchte ich schnell die Veränderlichen bezeichnen, die in der Theorie des elektromagnetischen Felds durch die Eichkovarianz ausgeschlossen sind [24]. Da die Zwangsbedingungen auf das Verschwinden der zum skalaren Potential konjugierten Impulsdichte und auf die Bestimmung des longitudinalen elektrischen Feldes durch die Ladungsdichte hinauslaufen, so folgt, daß die einzigen Erzeugenden die transversalen Anteile des Vektorpotentials (also das magnetische Feld) und des elektrischen Feldes (und nur von diesen abhängige Funktionale) sind. Ferner dürfen nur ganz bestimmte Kombinationen der Elektronenwellenfunktionen mit dem Vektorpotential als Erzeugende eingeführt werden, nämlich solche, die eichinvariant sind.

Um nun wieder auf die Theorien zurückzukommen, die krummlinigen Koordinatentransformationen gegenüber invariant sind, so müssen wir hier die Erzeugenden auf solche Größen beschränken, die derartigen Transformationen gegenüber invariant sind. Dies ist indes leichter gesagt als getan. Bisher ist nämlich in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht eine einzige nicht-triviale Invariante bekannt. Es genügt ja nicht, skalare Felder zu finden; als Funktionen ihrer Argumente (der Koordinaten) transformieren sich Skalare auch. Wahre Invarianten, glaube ich, werden sich als äußerst komplizierte Funktionale der gegenwärtig bekannten Feldgrößen entpuppen.

Man könnte nun eine Theorie ablehnen, die in Bezug auf zulässige Veränderliche derartig „exklusiv" ist. Eine solche Ablehnung erscheint mir aber voreilig. Am Beispiel der elektromagnetischen Theorie sehen wir, daß die verbotenen Größen, also das skalare Potential, der longitudinale Teil des Vektorpotentials und derjenige der elektrischen Feldstärke, entweder durch Eichtransformationen beliebiger Werte fähig sind oder aber durch andere Zustandsgrößen (die Ladungsdichte) bereits festgelegt sind. Diese Größen können also entweder überhaupt nicht auf Grund von Anfangsbedingungen zu einer Zeit für eine andere Zeit vorausgesagt werden, oder sie sind nicht unabhängig. Zwei formal vorgegebene physikalische Situationen lassen sich entweder als wesentlich verschieden oder aber als zwei verschiedene Beschreibungen desselben objektiven Zustands nur auf Grund ihrer Invarianten identifizieren. Ich glaube also, daß nur die im DIRACschen Formalismus zugelassenen Erzeugenden physikalisch als „wahre Observabeln" anzusprechen sind. Deshalb muß man dieses Programm der Quantisierung sowohl formal als auch physikalisch als vernünftig ansehen.

Wie soll man nun Invarianten finden? Bisher sind mir nur zwei Möglichkeiten bekannt. Beide sind noch nicht gründlich untersucht. KOMAR, ein Schüler WHEELERS, hat vorgeschlagen, auf systematische Weise zunächst skalare Felder zu bilden, im allgemeinen höhere Potenzen des Krümmungstensors, in vielfacher Weise kontrahiert [25]. Indem man nun vier algebraisch unabhängige Skalare als neue „invariante Koordinaten" einführt, läßt sich eine gegebene RIEMANNsche Mannigfaltigkeit koordinatenunabhängig beschreiben, wenn wir mindestens zehn weitere Skalarfelder als Funktionen der vier ersten angeben. Die große Schwierigkeit dieses Programms liegt darin, daß die so gefundenen Invarianten einen enorm hohen Differentationsgrad haben. Dies ist aber vielleicht nicht zu vermeiden, auch nicht auf andere Weise.

Nach einem etwas anrüchigen Abzählverfahren kann man vermuten, daß die Zahl der wahren Observabeln des Gravitationsfeldes vier pro dreidimensionalem Raumpunkt beträgt, also dieselbe, wie im elektromagnetischen Feld. Man kann das so begründen, daß „Gravitonen" Spin 2 und verschwindende Ruhmasse haben, daß also in einer linearisierten Theorie im Impulsraum zu jedem Werte des Fortpflanzungsvektors k genau zwei unabhängige Normalschwingungen gehören, von denen jede sich durch Angabe der Amplitude und der Phase vollständig festlegen läßt [26].

NEWMAN hat nun vorgeschlagen, diesen Invarianten durch ein Näherungsverfahren auf die Spur zu kommen, welches von der linearisierten Theorie ausgeht [27]. Wenn man die Gravitationspotentiale nach einem *ad hoc* Parameter entwickelt, wobei die nullte Näherung der flache MINKOWSKIsche Raum ist, so kann man auch die Koordinatentransformationen in ähnlicher Weise in Potenzreihen entwickeln, derart, daß die auf beliebiger Stufe abgebrochene Theorie gegenüber einer Transformationsgruppe invariant ist, die aus der Gruppe krummliniger Koordinatentransformationen dadurch hervorgeht, daß man auch deren Entwicklungen an derselben Stelle abbricht. Von der ersten Näherung an darf man in der Transformationsgruppe willkürliche Funktionen einführen. Die nullte Näherung besteht aber nicht aus der Identität, sondern ist die LORENTZgruppe. Die erste Näherung für sich allein ist kommutativ und der Eichgruppe sehr ähnlich, aber nicht kommutativ zusammen mit der nullten Näherung. Die erste Näherung liefert dann genau die PAULI-FIERZschen Gleichungen für Gravitonen. Darüber hinaus ist noch nichts bekannt. Bis zur ersten Näherung läßt sich das Programm, Invarianten zu finden und die Theorie nur mit ihrer Hilfe zu formulieren, mühelos durchführen. Aber erst danach wird es wirklich interessant. Immerhin ist es vielleicht bemerkenswert, daß, wenn man auf FOURIERzerlegung verzichtet, die wahren

Observabeln der ersten Näherung die doppelt transversalen Potentiale und ihre kanonisch konjugierten, also nichtlokale Größen sind, die man durch Integrale ausdrücken muß.

Es liegt nahe zu fragen, ob man nicht die Theorie durch Einführung von Koordinatenbedingungen künstlich „regulär" machen könnte, ähnlich wie FERMI dies mit dem elektromagnetischen Feld getan hat, wonach die Quantisierung dann ziemlich ohne Schwierigkeiten durchführbar sein dürfte. In der klassischen Theorie läßt sich tatsächlich leicht zeigen, daß man auf diese Weise sofort zu einer HAMILTONschen Formulierung kommt, in der dann die Koordinatenbedingungen und ihre ersten zeitlichen Ableitungen in gewohnter Weise als (acht) sich selbst erhaltende Nebenbedingungen eingeführt werden müssen. Versucht man aber dann die Quantisierung, so bereitet der wesentlich nichtlineare Charakter aller allgemein-kovarianten Theorien fast unüberbrückbare Schwierigkeiten. Man muß dann nämlich sowohl in der HAMILTONschen Funktion als auch in den Nebenbedingungen die Faktoren so ordnen, daß man in keine Widersprüche gerät. Dies ist bisher niemandem gelungen [28]. Überdies, wenn man wirklich mit diesem Problem fertig würde, so wüßte man dann immer noch nicht, ob das Endprodukt Resultate liefert, die von der zufällig gewählten Form der Koordinatenbedingungen unabhängig sind, ob, mit anderen Worten, die resultierende Quantentheorie allgemein kovariant ist.

Eine andere verlockende Möglichkeit ist die Lagrangesche Quantisierung, die wohl im gegenwärtigen Stadium mehr ein Programm als eine abgeklärte Prozedur ist [29–31]. Zunächst funktioniert das von PEIERLS vorgeschlagene Programm nur für „reguläre" Theorien, und ist außerdem nicht darstellungsinvariant. FEYNMANS Integrale divergieren wahrscheinlich für „singuläre" Theorien, und SCHWINGERS verschiedene Vorschläge unterliegen denselben Beschränkungen wie PEIERLS'. Wir haben nun zunächst einmal den Begriff der kanonischen Transformation im LAGRANGEschen Formalismus eingeführt und versucht, Transformationsgruppen auch für „singuläre" Theorien zu konstruieren [32]. Soweit uns dies gelungen ist, scheinen sie der DIRACschen Faktorgruppe im Phasenraum äquivalent zu sein [33]. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß man in einer folgerichtigen LAGRANGEschen Quantisierung nichts gegenüber der kanonischen Methode gewinnt. Augenblicklich halte ich diese Frage aber noch für offen.

Diesen Möglichkeiten gegenüber scheint die Methode nach DIRAC jetzt zumindest logisch einwandfrei zu sein. Falls es gelingen wird, alle algebraisch unabhängigen Invarianten der Theorie zu finden, so wird die Faktorenordnung in der HAMILTONschen Funktion insofern willkürlich sein, als sie weder die Kovarianz der Theorie noch ihre formale Widerspruchsfreiheit affiziert. Selbstverständlich bedeutet dies nicht, daß zwei

HAMILTONsche Funktionen mit verschiedenen Faktorfolgen äquivalent seien. Im Gegenteil, hier haben wir in der Quantentheorie eine extra Freiheit, der in der klassischen Theorie nichts entspricht. Was ich behaupte, ist nur, daß die Faktorfolgen nicht durch formale Forderungen eingeengt sind, die praktisch unübersehbar sind.

4. *Spin in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Offensichtlich ist es unwahrscheinlich, daß man je zu einer zufriedenstellenden Vereinigung der allgemeinen Relativitätstheorie und der Mikrophysik kommen wird, wenn es nicht gelingt, den Spin ins Schema der allgemeinen Relativitätstheorie einzubauen. Dies ist auf zwei verschiedene Weisen möglich, die beide zum selben Resultat liefern [34–38]. Ich möchte diese mathematischen Dinge nur ganz kurz skizzieren, weil sie wohl kaum zum Hauptthema meines Berichts gehören.

Erstens ist es möglich, anstelle der Metrik im vierdimensionalen Zeitraum-kontinuum zwei Systeme von hyperkomplexen Feldern einzuführen, γ_ϱ und γ^ϱ, die folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\mu) = \delta_\mu^\nu, \quad \gamma_\mu \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma_\mu = 4. \tag{4.1}$$

Dann läßt sich sofort zeigen, daß alle kovarianten γ_ϱ mit den Antikommutatoren $1/2\,(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)$ kommutieren, und ebenso die kontravarianten γ^ϱ mit den kovarianten Antikommutatoren $1/2\,(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu)$. Ferner sind die zwei Antikommutatoren zueinander reziprok, und sie dienen dazu, die kontravarianten und die kovarianten γ's durch Hinauf- und Hinabziehen der Indices ineinander überzuführen [39]. Mit anderen Worten, die Gleichungen (4.1) führen unmittelbar zur Konstruktion eines metrischen Tensors zurück, sofern wir nur annehmen, daß das eine oder das andere System der γ's eine vollständige Basis für die Algebra des hyperkomplexen Zahlsystems (der Sedenionen) ist.

Zusätzlich zu den Koordinatentransformationen müssen wir nun auch die Ähnlichkeitstransformationen betrachten, die in jedem Weltpunkt ganz beliebig angesetzt werden können und denen gegenüber die Theorie invariant sein muß. Konstruiert man nun, um zu einer Analysis zu kommen, einen spin-affinen Zusammenhang und bildet den entsprechenden Spin-Krümmungstensor (wobei selbstverständlich verlangt wird, daß die kovariante Ableitung von γ^ϱ verschwindet), so stellt sich heraus, daß die Geometrie keinerlei invariante Variationsprinzipien zuläßt, die es nicht schon in der RIEMANNschen Geometrie gibt. Dagegen besteht die Möglichkeit, zusätzlich zu den γ^ϱ, die also eine Art geometrische Grundstruktur darstellen, Wellenfunktionen einzuführen, die dann die Bildung zusätzlicher Glieder in der LAGRANGEschen Funktion gestatten. So ist es dann möglich, eine Theorie zu konstruieren, die neben dem eigentlichen Gravitationsfeld sowohl Photonen als auch Elektronen enthält.

Die zweite Möglichkeit ist folgende: In jedem Weltpunkt führe man vier aufeinander senkrechte Einheitsvektoren ein. Mit deren Hilfe kann man dann jeden Vektor oder Tensor der RIEMANNschen Geometrie in Komponenten nach den „Vierbeinen" (anstelle der Koordinaten) zerlegen. Man führt nun konstante DIRACsche γ's ein, und außerdem wiederum Wellenfunktionen mit Spin usw. Man konstruiert darauf geometrische Gebilde, die sowohl Koordinatentransformationen wie Beintransformationen gegenüber invariant sind. Die Spintransformationen sind mit den Beintransformationen zusammengekoppelt, wenn man den γ^n feste, unveränderliche Werte zuschreibt.

Mit und ohne Vierbeine erhält man genau dieselben Kovarianten. Die Einführung der Beine ist aber deshalb interessant, weil die Beintransformationen in jedem Weltpunkt beliebig wählbare LORENTZtransformationen darstellen. Es ist uns dadurch z. B. gelungen, in die allgemeine Relativitätstheorie (mit Spinorenfeld) ein System von sechs Größen einzuführen, die im Falle einer flachen Metrik genau ins Drehmoment übergehen und die auch im gekrümmten Raum strengen Erhaltungssätzen genügen [40]. Sofern man eine solche Theorie quantisieren bzw. hyperquantisieren kann, sollte sie alle normalen Ergebnisse der Quantenelektrodynamik mit Elektronen enthalten und außerdem allgemeininvariant sein.

5. *Erhaltungssätze.* Bevor ich schließe, möchte ich noch kurz auf die Rolle der durch die allgemeine Kovarianz bedingten Erhaltungssätze eingehen. In kovarianten Theorien gibt es nämlich Ausdrücke, deren Divergenz verschwindet, auch wenn die Feldgleichungen nicht erfüllt sind, und die den üblichen kanonischen Energie-Impulsdichten modulo der Feldgleichungen gleich sind. Diese Erhaltungssätze haben wir „stark" genannt, im Gegensatz zu den üblichen, „schwachen".

Die starken Erhaltungssätze hängen aufs engste mit der EINSTEIN-INFELD-HOFFMANNschen Theorie der ponderomotorischen Gesetze zusammen. Mit ihrer Hilfe kann man zeigen, daß Oberflächen, die Singularitäten des Feldes umgeben, Integrale zulassen, deren zeitliche Ableitung durch ein anderes Oberflächenintegral streng bestimmt ist. Zur Formulierung dieser Oberflächenintegralsätze ist übrigens kein Näherungsverfahren notwendig [7]. Die Oberflächenintegrale, deren zeitliche Ableitung bestimmt ist, stellen die im Innern enthaltene Energie und Impuls dar, die bestimmenden Integrale infolgedessen die äußere Kraft und Leistung am Innern.

In der klassischen Feldtheorie sind Teilchen Singularitäten des Feldes. In einer hyperquantisierten Theorie wird aber der Unterschied zwischen

Feldern und Teilchen stark verwischt, und es ist deshalb durchaus nicht trivial zu erfragen, ob die Existenz starker Erhaltungssätze noch von Interesse ist. Dies scheint insofern der Fall zu sein, als starke Erhaltungssätze einige Zuversicht geben, daß auch unvollständige Theorien zu teilweise richtigen Ergebnissen führen können. Da niemand ernsthaft glaubt, daß irgendeine gegenwärtig bekannte Theorie alle Naturkräfte vollständig enthält, ist dies ein wichtiger Gesichtspunkt.

Genauer möchte ich die Sache so ausdrücken. Normalerweise wird der in einem Raumgebiet enthaltene Impuls durch ein Volumenintegral der Impulsdichte beschrieben. Angenommen, ich kenne die äußeren Kräfte, aber nicht die innere Struktur des Gebiets, so hilft es mir wenig, daß ich die Gesamtänderung des im Gebiet enthaltenen Impulses zu bestimmen weiß. Ich muß doch immer damit rechnen, daß das Innere mir unbekannte Beiträge zum Impuls liefert, so daß ich nichts über die Änderung an der mir zugänglichen Oberfläche sagen kann. Habe ich dagegen einen starken Erhaltungssatz, so kann ich den Gesamtimpuls durch ein Oberflächenintegral darstellen. Schließt die Oberfläche also in ihrem Innern mir unbekannte und unzugängliche Kraftfelder ein, hat mit anderen Worten ein physikalisches System eine mir unbekannte Innenstruktur (virtuelle Mesonen aller Art), so kann ich dennoch mit einer unvollständigen Erfassung dieser inneren Zusammenhänge Aussagen über das Verhalten des Gesamtgebildes machen, wenn ich nur die an der Oberfläche erscheinenden Kraftfelder richtig beherrsche. Meines Erachtens besteht durchaus die Möglichkeit, daß die starken Erhaltungssätze etwas mit Renormalisierbarkeit zu tun haben.

In diesem Zusammenhang möchte ich auch noch erwähnen, daß etwaige andere Transformationsgruppen, die von willkürlichen Funktionen abhängen, im allgemeinen ihre eigenen starken Erhaltungssätze liefern werden. Vielleicht wird es später möglich sein, diese mathematischen Methoden auf die isotope Spingruppe und ähnliche Invarianzeigenschaften anzuwenden.

Hiermit habe ich, glaube ich, alles Wesentliche berichtet. Auf die Frage, ob ich das Gravitationsfeld quantisieren kann, muß ich leider noch immer mit einem „Noch nicht" antworten. Aber auf die Frage, ob es überhaupt möglich ist, denke ich, kann man ehrlich sagen: „Höchstwahrscheinlich ja".

Diskussion – Discussion

F. A. E. Pirani: I should like to point out a way of defining invariants, essentially due to Kretschmann (1917), which is simpler than that attributed to Komar: Define

$$g_{\mu\nu\varrho\sigma} = g_{\mu\varrho}\, g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\varrho}$$

$$\eta_{\mu\nu\varrho\sigma} = (-g)^{-1/2}\, \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$$

where $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$ is the alternating tensor. Then the solutions λ of the equations

$$(R_{\mu\nu\varrho\sigma} - \lambda\, g_{\mu\nu\varrho\sigma})\, p^{\varrho\sigma} = 0$$

$$(R_{\mu\nu\varrho\sigma} - \lambda\, \eta_{\mu\nu\varrho\sigma})\, q^{\varrho\sigma} = 0$$

(where $p^{\varrho\sigma}$ and $q^{\varrho\sigma}$ are skew eigentensors) are a system of invariants. The theory of these equations has been studied extensively by RUSE.

A. LICHNEROWICZ: Il conviendrait de compléter cette théorie par une étude du problème de CAUCHY destinée à montrer que, si les conditions de contraintes sont satisfaites sur l'hypersurface initiale, elles le sont au voisinage de cette hypersurface. L'analyticité ne peut être admise ici. Même si elle l'était, la solution pourrait être *instable* par rapport aux conditions initiales, comme le montre le cas de problèmes de CAUCHY correspondant à des hypersurfaces orientées dans le temps.

M. FIERZ: Die Fragen, die Herr BERGMANN diskutiert hat, nämlich die Quantisierung der Gravitationstheorie, haben einen engen Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz von Gravitationswellen, über die Donnerstag Herr ROSEN sprechen wird.

Wenn man in der „üblichen“ Art quantisiert, so nimmt man an, daß beliebige Anfangsbedingungen – natürlich mit den Nebenbedingungen verträgliche – zugelassen werden dürfen. Solche Anfangsbedingungen führen aber unter Umständen zu einem singulären Verhalten des Gravitationsfeldes (Beispiel: Ebene Wellen). Wenn man auch das ausschließen will, werden vermutlich neue, zusätzliche Schwierigkeiten entstehen.

Literatur

[1] EINSTEIN, A., INFELD, L., und HOFFMANN, B., Ann. Math. *39*, 65 (1938).
[2] EINSTEIN, A., and INFELD, L., Ann. Math. *41*, 455 (1940).
[3] EINSTEIN, A., und INFELD, L., Can. J. Math. *1*, 209 (1949).
[4] INFELD, L., und WALLACE, P. R., Phys. Rev. *57*, 797 (1940).
[5] PAPAPETROU, A., Phys. Soc. Proc. *64*, 57 (1951).
[6] BERGMANN, P. G., Phys. Rev. *75*, 680 (1949).
[7] GOLDBERG, J. N., Phy. Rev. *89*, 263 (1953).
[8] EINSTEIN, A., *The Meaning of Relativity* [Fourth Edition], Princeton University Press.
[9] DE BROGLIE, L., Comptes Rendus *183*, 447 (1926), *184*, 273 (1927), *185*, 380 (1927).
[10] BOHM, D., Phys. Rev. *85*, 166, 180 (1952), *89*, 458 (1953).
[11] BOHM, D., SCHILLER, R., TIOMNO, J., Nuovo Cimento *1*, 48, 67 (1955).

[12] Wiener, N., und Siegel, A., Phys. Rev. *91*, 1951 (1553).
[13] Rosenfeld, L., Ann. d. Physik *5*, 113 (1930).
[14] Rosenfeld, L., Ann. Inst. Henri Poincaré *2*, 25 (1932).
[15] Heller, J., Phys. Rev. *81*, 946 (1951).
[16] Schild, A., und Pirani, F., Phys. Rev. *79*, 986 (1950).
[17] Bergmann, P. G., Penfield, R., Schiller, R., und Zatzkis, H., Phys. Rev. *80*, 81 (1950).
[18] Anderson, J. L., und Bergmann, P. G., Phys. Rev. *83*, 1018 (1951).
[19] Penfield, R., Phys. Rev. *84*, 737 (1951).
[20] Dirac, P. A. M., Can. J. Math. *2*, 129 (1950), *3*, 1 (1951).
[21] Bergmann, P. G., und Brunings, J. H. M., Revs. Mod. Phys. *21*, 480 (1949).
[22] Bergmann, P. G., and Goldberg, I., Phys. Rev. *98*, 531 (1955).
[23] Bergmann, P. G., Phys. Rev. *98*, 544 (1955).
[24] Bergmann, P. G., Interntl. Conf. Element. Part. Pisa (1955).
[25] Komar, A., Phys. Rev. *99*, 662 (A) (1955)
[26] Pauli, W., and Fierz, M., Helv. Phys. Acta. *12*, 297 (1939).
[27] Newman, E., private Mitteilung.
[28] De Witt, B. S., private Mitteilung.
[29] Feynman, R. P., Revs. Mod. Phys. *20*, 367 (1948).
[30] Schwinger, J., Phys. Rev. *82*, 914 (1951).
[31] Peierls, R. E., Roy. Soc. London Proc. [A] *214*, 143 (1952).
[32] Bergmann, P. G., and Schiller, R., Phys. Rev. *89*, 4 (1953).
[33] Janis, A., private Mitteilung.
[34] Schrödinger, E., Berl. Ber. *1932*, 105.
[35] Bargmann, V., Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber. *25*, 346 (1932).
[36] Infeld, L., und van der Waerden, B. L., Preuss. Akad. Wiss. Berlin Ber. *9*, 380 (1933).
[37] Schouten, J. A., J. Phys. Math. *1933*, 331.
[38] Pauli, W., Ann. d. Physik *18*, 337 (1933).
[39] Heller, J., und Bergmann, P. G., Phys. Rev. *84*, 665 (1951).
[40] Bergmann, P. G., and Thomson, R., Phys. Rev. *89*, 400 (1953).