Ein Weltmodell der Newtonschen Kosmologie mit Expansion und Rotation

Ein Weltmodell der Newtonschen Kosmologie mit Expansion und Rotation

von O. HECKMANN und E. SCHÜCKING (Hamburg-Bergedorf)

Es ist bekannt, daß man im Rahmen der NEWTONschen Mechanik eine Kosmologie aufbauen kann. Für den Fall inkohärenter, homogen verteilter Materie erhält man – solange es sich nicht in mathematischer Hinsicht etwa um topologische und in physikalischer nicht etwa um optische Erscheinungen handelt – in der NEWTONschen Kosmologie sogar weitgehend mit der relativistischen Kosmologie übereinstimmende Resultate.

Das im folgenden mitgeteilte Weltmodell ist ganz mit klassischen Mitteln aufgebaut. Sein relativistisches Analogon ist bisher in der Literatur nicht bekannt geworden; es müßte eine Überlagerung der von GÖDEL behandelten starren Rotation mit einer allgemeinen Expansion enthalten. Unsere Grundlage bilden die Gleichungen der Newtonschen Mechanik kontinuierlicher Medien in kartesischen Koordinaten:

$$\varrho_{|0} + (\varrho\, v_k)_{|k} = 0\,, \tag{1}$$

$$v_{i|0} + v_k\, v_{i|k} = -\Phi_{|i} - \frac{1}{\varrho}\, P_{|i}\,, \tag{2}$$

$$\Phi_{|i|i} + \Lambda = 4\,\pi\, G\, \varrho\,. \tag{3}$$

Hier ist ϱ die Dichte, v_i der Strömungsvektor, P der Druck der Materie. Φ ist das Potential der Gravitationskräfte, G die Gravitationskonstante. Das Λ-Glied in der Poissonschen Gleichung (3) kann man nach Belieben fortlassen. Die Indizes laufen von 1 bis 3. $|_0$ bedeutet Ableitung nach der Zeit t; $|_i$ Ableitung nach x_i.

Macht man den Ansatz

$$\varrho = \varrho(t)\ ;\ P = P(t)\ ;\ v_i = a_{ik}(t)\, x_k\,, \tag{4}$$

so fordert man Homogenität und Isotropie von Dichte und Druck. Das von den Koordinaten linear abhängige Strömungsfeld hat die allgemeinste

Form, für die irgend zwei voneinander verschiedene mitschwimmende Beobachter vom Strömungsfeld ihrer Umgebung der gleichen Anblick haben.

Die Spezialisierung

$$a_{ik} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\,\delta_{ik}\,,$$

also isotrope Expansion mit dem zeitabhängigen Skalenfaktor $R(t)$ ($\dot{R}(t) = dR/dt$) führt auf die auch in der relativistischen Kosmologie behandelten Modelle, während $a_{ik} + a_{ki} = 0$ auf das klassische Analogon des GÖDELschen Modells führt.

Setzt man aber

$$a_{ik} = \frac{\dot{R}}{R}\,\delta_{ik} + \underset{\smile}{a_{ik}}\,; \quad \underset{\smile}{a_{ik}} + \underset{\smile}{a_{ki}} = 0\,,$$

so folgt zunächst wie im isotropen Falle die Erhaltung der Masse

$$\frac{4\pi}{3}\,\varrho\,R^3 = \mathfrak{M} = \text{const.} \tag{5}$$

Sodann folgt die Erhaltung der Drehimpulsdichte in der Form

$$\underset{\smile}{a_{ik}} = \frac{\alpha_{ik}}{R^2}\,; \quad \alpha_{ik} = -\alpha_{ki} = \text{const.} \tag{6}$$

Und endlich ergibt sich für R die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\,\dot{R}^2 = \frac{G\,\mathfrak{M}}{R} + \frac{\Lambda}{6}\,R^2 - \frac{\alpha_{ik}\,\alpha_{ik}}{6\,R^2} + h\,. \tag{7}$$

Links steht die Dichte der kinetischen Energie der Expansion, rechts 1. die Dichte der negativen potentiellen Energie der Gravitationskräfte, 2. die Dichte der potentiellen Energie der im (bekanntlich sehr problematischen) Λ-Glied zum Ausdruck kommenden universellen Kräfte, 3. die negative Dichte der kinetischen Energie der Rotation und 4. die positive, verschwindende oder negative Dichte der Gesamtenergie. In isotropen relativistischen Modellen würde dieser letzte Term eine die Raumkrümmung charakterisierende Konstante bedeuten. Während nun in den bisher bekanntgewordenen Modellen ($\alpha_{ik} = 0$) immer die Möglichkeit besteht, daß zu einer endlichen Zeit t_0 $R(t_0) = 0$; $\dot{R}(t_0) = \infty$; $\varrho = \infty$ wird, die Materie also aus unendlicher Konzentration mit unendlicher Geschwindigkeit ihre Expansion beginnt, sieht man aus (7) leicht, daß R bei noch so kleinen $\alpha_{ik} \neq 0$ überhaupt nicht mehr gleich Null werden kann, daß man also die Dichte des Urbreis im Moment des Urknalls durch die Überlagerung einer Rotation regulieren kann. Die nicht verschwindende Drehimpulsdichte verhindert also eine beliebige Konzentration der Materie.