Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 29 (1956)
Heft: [4]: Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory

Artikel: Rotverschiebung und Bewegungsgleichungen
Autor: Papapetrou, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112730

Rotverschiebung und Bewegungsgleichungen

von A. PAPAPETROU (Berlin)

Wie zuerst EINSTEIN und GROMMER bewiesen haben, folgen in der allgemeinen Relativitätstheorie die Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen. Dieses Ergebnis ist nicht nur rein theoretisch wichtig, sondern auch für die experimentellen Bestätigungen der Theorie von Bedeutung. Man überlege sich nämlich, daß von den drei durch die allgemeine Relativitätstheorie vorausgesagten neuen Effekten – Periheldrehung, Lichtablenkung und Rotverschiebung – die zwei ersten sich auf reine Bewegungsvorgänge beziehen. Während also diese beiden Effekte ursprünglich aus dem damals unabhängig von den Feldgleichungen postulierten geodätischen Bewegungsgesetz abgeleitet waren, wissen wir heute, daß sie eine unmittelbare Folge der Feldgleichungen der Theorie sind.

Die Rotverschiebung konnte man bisher, soweit mir bekannt, nicht in ähnlicher Weise auf die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie zurückführen. Wir besitzen lediglich die ursprüngliche EINSTEINsche Ableitung, welche aber von einer speziell dafür eingeführten Hypothese Gebrauch macht. Der Inhalt dieser Hypothese tritt besonders klar hervor, wenn man sie in folgende zwei Teile zerlegt: 1. Es gibt Uhren, welche durch die Eigenschaft charakterisiert sind, daß ihre Eigenperiode unverändert bleibt, wenn man sie an verschiedene Orte innerhalb eines Gravitationsfeldes bringt. Solche Uhren seien als Normaluhren bezeichnet. 2. Die Atome sind Normaluhren.

Ähnlich wie das geodätische Axiom zeichnet sich auch die Normaluhr-Hypothese durch hohe Eleganz und Leistungsfähigkeit aus. Während aber das geodätische Bewegungsgesetz aus dem geometrischen Inhalt der allgemeinen Relativitätstheorie zwangsläufig folgt, kann die Normaluhr-Hypothese offensichtlich nicht für alle Arten von Uhren gelten. Man denke z. B. an eine Pendeluhr, welche sich ganz anders als eine Normaluhr verhält: Die Periode der Normaluhr hängt vom Wert des Gravitationspotentials, die der Pendeluhr dagegen von den Werten der Ableitungen dieses Potentials ab.

In der Literatur findet man oft den Versuch einer Rechtfertigung der Normaluhr-Hypothese mit Hilfe des Äquivalenzprinzips. Man geht von der Bemerkung aus, daß durch die Verwendung eines „frei fallenden“ Koordinatensystems das Gravitationsfeld in der unmittelbaren Nähe eines Probeteilchens aufgehoben werden kann, und glaubt dann die Schlußfolgerung ziehen zu können, daß jede frei fallende Uhr sich wie eine Normaluhr verhalten muß. Diese Schlußweise ist nicht überzeugend. Zwar würde sie im Falle der Pendeluhr zu einem richtigen, obwohl praktisch uninteressanten Ergebnis führen: Bei einer frei fallenden Pendeluhr ist die Periode – und daher auch die Eigenperiode – unendlich groß und in dieser trivialen Weise vom Ort unabhängig. Die Atome verhalten sich aber ganz anders: Die von ihnen emittierten Spektrallinien sind von der Beschleunigung unabhängig, so daß man dieselbe Rotverschiebung sowohl bei frei fallenden wie auch bei nicht beschleunigten Atomen erwarten muß. Die Lage wäre erst dann befriedigend geklärt, wenn man die Rotverschiebung ohne Verwendung der Normaluhr-Hypothese berechnen könnte.

Man kann sich nun leicht überzeugen, daß auch die Rotverschiebung sich auf zwei Bewegungsprobleme zurückführen läßt. Zunächst hat man nämlich die stationären Zustände des Atoms zu bestimmen, wobei es sich um die *quantisierte* Bewegung eines Elektrons im elektromagnetischen Feld des Atomkerns, diesmal aber bei Anwesenheit eines makroskopischen Gravitationsfeldes (z. B. des Gravitationsfeldes der Sonne) handelt. Die Lösung dieses Problems wird die Energieterme des Atoms und daher auch die Energien der emittierten Photonen am Emissionsort ergeben. Danach hat man nur noch das schon bei der Lichtablenkung behandelte Problem der Bewegung eines Photons in einem Gravitationsfeld zu lösen. Diese Analyse zeigt, daß die Rotverschiebung mit den folgenden zwei neuen Problemen zusammenhängt: 1. Berechnung des elektromagnetischen Feldes des Atomkerns bei Anwesenheit eines (makroskopischen) Gravitationsfeldes. 2. Bestimmung der quantisierten Bewegung des Elektrons im kombinierten Gravitations- und elektromagnetischen Feld.

Diese beiden Probleme sind noch keineswegs endgültig gelöst worden. Es sind uns aber gewisse Lösungen bekannt, welche eine – sei es auch nur provisorische – Behandlung der Rotverschiebung ermöglichen. Das kombinierte Gravitations- und elektromagnetische Feld kann man nämlich mit Hilfe der Feldgleichungen berechnen, welche sich aus der additiven Zusammensetzung der LAGRANGE-Funktionen der einzelnen Felder ergeben. Und die quantisierte Bewegung des Elektrons im kombinierten Feld kann man nach der seit längerer Zeit bekannten Verallgemeinerung der DIRACschen Gleichung für den Fall eines RIEMANNschen Raumes behandeln. Merkwürdigerweise ist diese Rechnung bisher, soweit mir bekannt, für die allgemeine Relativitätstheorie nicht durchgeführt, obwohl das Problem für zwei andere Gravitationstheorien behandelt wurde:

Moshinsky hat es für den Fall der Birkhoffschen Gravitationstheorie, und Belinfante und Swihart haben es für die von ihnen vorgeschlagene lineare Gravitationstheorie durchgerechnet.

Die Rechnung läßt sich aber auch im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie ohne besondere Mühe durchführen, wenn man sich auf das Schwarzschildsche Gravitationsfeld beschränkt. In diesem statischen, kugelsymmetrischen Gravitationsfeld ist eine besondere Zeitskala physikalisch ausgezeichnet. Dadurch wird die Definition der stationären Atomzustände und der Energie eines Probeteilchens sowie der unmittelbare Vergleich der Energien von Probeteilchen an verschiedenen Raumpunkten ermöglicht. Die Behandlung der verallgemeinerten Dirac-Gleichung wird besonders einfach, wenn man die isotrope Form des Schwarzschildschen Linienelementes zugrunde legt:

$$ds^2 = -\alpha(r)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \gamma(r)\,dt^2.$$

Wie eine störungsrechnerische Betrachtung zeigt, darf man in der Dirac-Gleichung die Größen α und γ als konstant ansehen, da sie sich im Atomvolumen äußerst wenig ändern. Bei der Fortbewegung des vom Atom emittierten Photons wird man selbstverständlich die Funktionen $\alpha(r)$ und $\gamma(r)$ verwenden müssen.

Die stationären Atomzustände kann man übrigens auch ohne Verwendung der Diracschen Gleichung bestimmen. Da diese einfachere Rechnung die Beziehung der Rotverschiebung zum Bewegungsproblem besonders deutlich zeigt, wollen wir sie hier kurz andeuten. Es handelt sich um die unmittelbare Weiterführung der Sommerfeldschen relativistischen Behandlung des Bohrschen Atommodells. Den Ausgangspunkt liefert die Bemerkung, daß, wie in der speziellen Relativitätstheorie, auch bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes die drei ersten Komponenten des Vektors

$$P_\mu = m_0\, c\, u_\mu + \frac{e}{c}\,\varphi_\mu$$

mit den kanonischen Impulsen des Elektrons identisch sind, während $c\,P_4$ seine Hamiltonfunktion darstellt. Daher wird die Energie des Teilchens durch

$$E = c\,P_4 = m_0\, c^2 u_4 + e\,\varphi_4$$

gegeben. Diese Energie läßt sich z. B. bei kreisförmiger Bewegung des Elektrons unmittelbar berechnen, wenn man die Bewegungsgleichung und die Quantenbedingung – welche in diesem Fall die einfache Form $J_z = n\,\hbar$ hat – berücksichtigt. Als Ergebnis dieser elementaren Rechnung findet man die Sommerfeldschen Energiewerte multipliziert mit $\sqrt{\gamma}$.

Ähnlich ergibt sich aus der Diskussion der DIRAC-Gleichung, daß im SCHWARZSCHILDschen Gravitationsfeld alle Energiewerte des Atoms um den Faktor $\sqrt{\gamma}$ kleiner werden. Daher werden auch die Energien der emittierten Photonen um denselben Faktor kleiner. Man wird nun unmittelbar zur Formel für die Rotverschiebung geführt, wenn man bemerkt, daß die HAMILTONfunktion eines sich im statischen Gravitationsfeld bewegenden (ungeladenen) Probeteilchens von der Zeit unabhängig ist und daher die Energie des Teilchens konstant bleibt. Die Energien der Photonen werden also nicht mehr geändert. Danach werden Atome, die sich an verschiedenen Orten befinden, Photonen emittieren, deren Energien den an den entsprechenden Emissionsorten herrschenden Werten von $\sqrt{\gamma}$ proportional sind. Dies entspricht aber gerade dem EINSTEINschen Wert der Rotverschiebung.

Zum Schluß sei bemerkt, daß das Ergebnis dieser Rechnung nicht dasselbe Gewicht wie die Ergebnisse für die Periheldrehung und die Lichtablenkung haben kann. Letztere folgen ja unmittelbar aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, während beim ersten die nach EINSTEIN ziemlich unsichere additive Theorie von Gravitation und Elektromagnetismus gebraucht wurde.

Diskussion – Discussion

P. G. BERGMANN: (1) Die semiklassische Rechnung bzw. Gravitationspotential ist zweifellos berechtigt. (2) Warum nicht den Emissionsprozeß quantentheoretisch behandeln, so daß die Frage der stationären Zustände entfällt?

A. PAPAPETROU: Die Quantisierung von kovarianten Feldtheorien ist noch nicht in völlig überzeugender Weise durchgeführt.

H. BONDI: I am afraid I am in complete disagreement with the basis of this work. Relativity does not merely make the mathematical assertion that the orbits of the particles can be derived from a variational principle, but makes the physical assertion that the stationary quantity is the proper time. Not only would this be an empty statement if clocks measuring proper time did not exist, but we know from terrestrial experiments that Newtonian dynamics results if the time is measured with atomic clocks. Accordingly we know that on the Earth atomic clocks measure proper time ds. Neglecting the Earth's gravitational field (as we may in this context), it follows rigorously from the principle of equivalence that freely falling atomic clocks measure proper time wherever they may be. In the conditions applying on the sun's surface, collisions are relatively rare and most of the radiation is emitted while the atoms are freely falling. Accordingly, Dr. PAPAPETROU's problem does not arise. There might conceivably be a problem concerning the radiation from ions supported against gravity by an electrostatic field. However, I tend to think that experiments on rays of ionized atoms cover this problem too. I admit I am a little puzzled by Dr. PAPAPETROU's reference to pendulum clocks, but I presume these must somehow be excluded.

A. PAPAPETROU: The collisions might be relatively rare. Nevertheless, they will, on the average, just cancel the gravitational acceleration and therefore the argument that most of the radiation is emitted while the atoms are falling freely is not convincing.

A. D. FOKKER: The gas atom will be falling freely between collisions. One might fit a geodesical frame of reference to this motion. Except for second order terms depending on curvature of space-time and representing some tidal effects, the equations are the same as in flat space-time, and the theory of spectral emission can be made as usual. I do not see there is a special problem here.

A. PAPAPETROU: The average acceleration of the atom will be zero. Besides, even if we would assume the atom to radiat only in the intervalls it is falling freely, it does not seem obvious that „second order terms" would not matter.

M. v. LAUE: Da der Herr Vortragende die Pendeluhr als Beispiel einer Uhr zitiert hat, die sich nicht als „Normaluhr" eignet, möchte ich mir die triviale Bemerkung gestatten, daß eine Pendeluhr, wie man sie im Laden kaufen kann, *an sich* gar keine Uhr ist, sondern dies erst in Verbindung mit der Erde wird. Meines Erachtens ist die Frage so zu stellen: Ist eine Pendeluhr in Zusammenhang mit einem geeigneten Gravitationszentrum als „Normaluhr" brauchbar? Und dies würde ich für meinen Teil bejahen.

A. PAPAPETROU: Die Pendeluhr wurde von mir nur deshalb erwähnt, um zu betonen, daß eine Uhr erst dann sich als Normaluhr verhalten muß, wenn sie im Gravitationsfeld frei fällt.