Über die Hypothese einer Veränderlichkeit der sogenannten Gravitationskonstante

Autor(en): **Jordan, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **29 (1956)**

Heft [4]: **Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112738

Über die Hypothese einer Veränderlichkeit der sogenannten Gravitationskonstante

von P. JORDAN (Hamburg)

Die Theorie der *veränderlichen* Gravitations-„Konstanten" $\varkappa = 8\,\pi\, f/c^2$ hängt eng zusammen mit der fünfdimensionalen Relativitätstheorie. Deshalb sei dieser zunächst eine kurze Betrachtung gewidmet. Es handelt sich hier im Grunde nicht etwa um eine spekulative Abänderung der EINSTEIN-MAXWELLschen Theorie, sondern um die Aufdeckung mathematischer Eigenschaften dieser Theorie. (Der nachfolgende Bericht stützt sich auf die soeben erschienene, stark veränderte zweite Auflage meines Buches „Schwerkraft und Weltall" (Braunschweig 1955), bringt jedoch auch einige neue Ergebnisse.)

Es sei eine n-dimensionale RIEMANNsche Mannigfaltigkeit mit $n > 3$ gegeben: $x^{(\nu)}$ mit $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$; und es sei die Aufgabe gestellt, speziell solche $g_{\mu\nu}$-Felder zu untersuchen, welche konstant in bezug auf die Koordinate $x^{(o)} = x_0$ sind:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_0} = g_{\mu\nu|0} = 0\,. \tag{1}$$

Für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ schreiben wir:

$$\gamma_{kl} = g_{kl} - \frac{g_{k0}\, g_{l0}}{g_{00}}\,; \tag{2}$$

und ferner definieren wir

$$F_{kl} = \left(\frac{g_{l0}}{g_{00}}\right)_{|k} - \left(\frac{g_{k0}}{g_{00}}\right)_{|l}\,. \tag{3}$$

Dann sind die n-dimensionalen Vakuum-Feldgleichungen

$$\text{RICCI-Tensor} \quad R_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

gleichwertig mit

$$\left.\begin{aligned} G_{jm} + \frac{\sqrt{g_{00}}_{|j||m}}{\sqrt{g_{00}}} + \frac{1}{2} g_{00} F_{jk} F_{m}^{\cdot k} &= 0\,; && \text{(a)} \\ \sqrt{g_{00}}^{|j}{}_{||j} - \frac{1}{4} \sqrt{g_{00}{}^3}\, F_{jm} F^{jm} &= 0\,; && \text{(b)} \\ \left(\sqrt{g_{00}{}^3}\, F^{jm}\right)_{||m} &= 0\,. && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Hier ist G_{jm} der RICCI-Tensor der $(n-1)$ dimensionalen Metrik (2); und die kovarianten Ableitungen und die Indexverschiebungen (Herauf- und Herunterziehen) in (5) beziehen sich ebenfalls auf (2).

Diese bekannte Umformung kann, abgesehen von der Methode forcierten Formelrechnens, auf zwei Wegen erhalten werden. Einer dieser Wege führt über den Formalismus der *projektiven* Relativitätstheorie[1]), die wir mathematisch als eine elegante Art der Herleitung dieser Formeln betrachten dürfen – es spielt dabei keine Rolle, welchen Wert n der Dimensionszahl wir voraussetzen. Ein anderer Weg führt über den CARTANschen Formalismus; daß auch hiermit die Herleitung sehr elegant vollzogen werden kann, hat mir J. EHLERS gezeigt.

Für den Spezialfall $F_{kl} = 0$ ist also

$$\left.\begin{aligned} G_{jm} + \frac{\sqrt{g_{00}}_{|j||m}}{\sqrt{g_{00}}} &= 0\,; && \text{(a)} \\ \sqrt{g_{00}}^{|j}{}_{||j} &= 0\,. && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese Gleichungen (6) erlauben eine bemerkenswerte Vereinfachung. Nach SCHÜCKING betrachten wir die konform abgeänderte $(n-1)$-dimensionale Metrik

$$\bar{\gamma}_{kl} = g_{00}^{\varepsilon} \cdot \gamma_{kl}\,. \tag{7}$$

Der zugehörige neue RICCI-Tensor $\bar{G}$ ist mit $\omega = g_{00}^{\varepsilon}$ gegeben durch

$$\bar{G}_{kl} = G_{kl} + \frac{n-3}{2}\left(\frac{\omega_{|k||l}}{\omega} - \frac{3}{2}\frac{\omega_{|k}\,\omega_{|l}}{\omega^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{\omega^{|j}{}_{||j}}{\omega} + \frac{n-5}{4}\frac{\omega^{|j}\,\omega_{|j}}{\omega^2}\right)\gamma_{kl}\,; \tag{8}$$

die in (8) gebrauchten kovarianten Ableitungen und Indexverschiebungen beziehen sich wiederum auf (2).

---

[1]) Vgl. dazu a. a. O. Kap. III.

Für

$$\varepsilon = \frac{1}{n-3} \tag{9}$$

vereinfacht sich (8) wegen (6b) zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{G}_{kl} &= G_{kl} + \frac{n-3}{2}\left(\frac{\omega_{|k||l}}{\omega} - \frac{3}{2}\frac{\omega_{|k}\,\omega_{|l}}{\omega^2}\right) \\ &= G_{kl} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_{00|k||l}}{g_{00}} - \frac{2n-5}{2n-6}\frac{g_{00|k}\,g_{00|l}}{g_{00}^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

also (6a) zu

$$\overline{G}_{kl} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2n-5}{2n-6}\right)\frac{g_{00|k}\,g_{00|l}}{g_{00}^2}\,. \tag{11}$$

Mit

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{1}{4}\,\frac{n-2}{n-3}\,; \\ \ln g_{00} &= u \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ergeben sich also folgende Gleichungen (SCHÜCKING $n = 5$, EHLERS $n = 4$):

$$\boxed{\overline{G}_{jm} = a\, u_{|j}\, u_{|m}}\,. \tag{13}$$

Hieraus folgert man nach SCHÜCKING[1])

$$u^{|j}{}_{||j} = 0\,, \tag{14}$$

wobei *jetzt* die kovariante Differentiation und die Indexverschiebung *in der Metrik* (7) gemeint ist:

$$\left(\sqrt{\pm\overline{\gamma}}\cdot\overline{\gamma}^{jl}\,\frac{g_{00|l}}{g_{00}}\right)_{|j} = 0\,; \tag{15}$$

$$\overline{\gamma} = Det\,|\,\overline{\gamma}_{kl}\,| = g_{00}^{(n-1)\varepsilon}\, Det\,|\,\gamma_{kl}\,| = g_{00}^{(n-1)\varepsilon}\,\gamma\,. \tag{16}$$

Das bedeutet:

$$\left(\sqrt{\pm\gamma}\cdot\gamma^{jl}\,\frac{g_{00|l}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{|j} = 0\,; \tag{17}$$

d. h. (6b) ist Folgerung aus (13), und somit sind die $1/2\, n\,(n-1)$ Gleichungen (13) *äquivalent* mit den $1/2\, n\,(n-1) + 1$ Gleichungen (6).

---

[1]) Vgl. a. a. O. S. 208

Innerhalb der Theorie reiner Gravitationsfelder (im Vakuum), ohne MAXWELL-Feld, können wir (5) benutzen z. B. zur Untersuchung zeitlich konstanter Felder oder andererseits axialsymmetrischer Felder. Man bekommt auf diese Weise einen sehr erleichterten Zugang zu den in der Literatur bekannten speziellen exakten Lösungen der Feldgleichungen. Hier handelt es sich also um eine Anwendung von (5) oder spezieller (6) bzw. (13) auf den Fall $n = 4$. Drei Beispiele I, II, III der Anwendung auf statische Felder seien erwähnt.

I) Aus (13) folgt dann wie J. EHLERS bemerkte, mit Hilfe der GREENschen Formel

$$\int u\, u^{|j}{}_{||j}\, dV + \int u_{|j}\, u^{|j}\, dV = \int u\, u_{|j}\, d\Omega^j$$

(mit $dV = \sqrt{-g}\, dx\, dy\, dz$) in einfacher Überlegung, ohne irgendeine Rechnung, der von LICHNEROWICZ [1] aufgestellte, von THIRY vereinfacht bewiesene Satz, wonach ein reguläres statisches EINSTEINsches Vakuumfeld, welches asymptotisch in die MINKOWSKI-Welt übergeht, mit der MINKOWSKI-Welt äquivalent ist.

II) Die merkwürdige Äquivalenz zweier Gleichungssysteme mit verschiedenen Anzahlen von Gleichungen ist der Grund dafür, daß man z. B. bei Ermittlung der SCHWARZSCHILDschen Lösung aus dem Ansatz

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, (d\Theta^2 + \sin^2\Theta \cdot d\varphi^2) \tag{18}$$

ein *überbestimmtes* System von *drei* Differentialgleichungen für die *zwei* Funktionen $\nu(r)$, $\lambda(r)$ bekommt, wenn man die vierdimensionalen Feldgleichungen $R_{\varrho\sigma} = 0$ unmittelbar zu befriedigen sucht. Eine auf dreidimensionale Gleichungen (13) gestützte Lösung ergibt von vornherein nur noch *zwei* durch $\nu(r)$, $\lambda(r)$ zu erfüllende Differentialgleichungen[1]). Sie ermöglicht übrigens auch eine Herleitung der SCHWARZSCHILDschen Lösung, in welcher man kein einziges Γ^k_{jm}-Symbol explizit zu berechnen braucht (EHLERS).

III) Eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Gleichungen (13) ergibt sich, wenn man sie für den Fall der Anwesenheit von Materie verallgemeinert. Man kann dann nach EHLERS auch folgenden Satz von DON AUFENKAMP [2] in ähnlicher Weise, wie den erwähnten Satz von LICHNEROWICZ sehr leicht erhalten: Die EINSTEINschen Feldgleichungen ohne kosmologisches Glied haben keine reguläre stationäre Lösung mit geschlossenem Raum.

---

[1]) Vgl. a. a. O. § 32.

Die Theorie von KALUZA und KLEIN betrachtet den Fall $n = 5$. Sie weist in bekannter Weise darauf hin, daß wir dann aus (5) durch folgende Abänderung die EINSTEIN-MAXWELLsche Theorie bekommen:

Von (5a), (5b) soll nur die Linearkombination $\sqrt{g_{00}}(a) + 1/2\, g_{jm}(b) = 0$ beibehalten werden, unter Hinzufügung der Forderung

$$g_{00} = \frac{2\varkappa}{c^2} = \text{const.} \tag{19}$$

(Im Folgenden setzen wir aber $c = 1$).

Diese Abänderung bleibt im Einklang mit den Forderungen der vierdimensionalen Koordinateninvarianz und der Eichinvarianz; die fünfdimensionale Koordinateninvarianz (4), aus der die Gleichungen (5) abgeleitet sind, ist ja ohnehin schon durch die Spezialisierung (1) verletzt.

Die durch diese Spezialisierung eingeführte Unsymmetrie kann beseitigt werden dadurch, daß man den schon erwähnten projektiven Formalismus benutzt. Er beruht darauf, daß die aus $(n - 1)$dimensionalen Koordinatentransformationen und zugehörigen Eichtransformationen erzeugte Gesamtgruppe gerade isomorph ist[1]) mit der Gruppe $\mathfrak{H}_n$ der *homogenen* Transformationen von n Koordinaten X^μ $(\mu = 0, 1, \ldots, n - 1)$; bei diesen homogenen Transformationen sollen also die neu eingeführten X'^μ homogene Funktionen ersten Grades der X^μ sein. Definieren wir nun nach BERGMANN die X^μ durch die eingangs benutzten $x^{(\mu)}$ in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} X^\mu &= x^{(\mu)}\, e^{x_0} \quad \text{für} \quad \mu > 0\,; \\ X^0 &= e^{x_0}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

so geht die Bedingung (1) oder allgemein $A^{l_1 l_2 \cdots}_{k_1 k_2 \ldots |0}$ für zulässige Feldgrößen $A^{l_1 l_2 \cdots}_{k_1 k_2 \cdots}$ über in die Aussage, daß alle Tensorkomponenten homogene Funktionen der X^μ sind, deren Grade sich nach einer einfachen Regel bestimmen. In diesem Rahmen geht das g_{00} von (18) über in die *projektive Invariante* $J = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$.

Es erhebt sich jedoch die Frage, was entstehen würde, wenn wir in (5) – den Fall $n = 5$ voraussetzend – auf (b) *nicht* verzichten, also die Nebenbedingung (19) *nicht* einführen würden. Dann bekommen wir das, was ich kurz die „erweiterte Gravitationstheorie" nennen will – zunächst natürlich nur für den Vakuumfall, auf den wir uns bislang überall beschränkt haben. Die Vermutung, daß $\varkappa$ eine *Veränderliche* sein könnte, ist von THIRY, EINSTEIN-BERGMANN, JONSSON[2]) aus der fünfdimensionalen Relativitäts-

[1]) Vgl. a. a. O. § 22.
[2]) Vgl. die Angaben a. a. O. §§ 26, 27.

theorie abgeleitet worden; zuvor war sie von DIRAC aus ganz anderen Gründen[1]) entwickelt.

Diese Theorie ergibt eine Reihe neuer *mathematischer Probleme*, über die ich sprechen will, ohne dabei die komplizierteren Fragen der physikalischen Deutung zu erörtern.

Wie die *Verallgemeinerung der* SCHWARZSCHILD*schen Lösung* in der erweiterten Theorie aussieht, wurde von HECKMANN und FRICKE geklärt[2]). Da hierüber schon in der ersten Auflage meines Buches berichtet ist, bespreche ich sogleich das von SCHÜCKING gelöste bzw. weitgehend reduzierte Problem der allgemeinen, *zeitabhängigen* kugelsymmetrischen Vakuumfelder. Es wird angreifbar auf Grund der Umformulierung der Feldgleichungen gemäß (13). Verstehen wir den Ansatz (18) jetzt so, daß das dortige ds^2 die Metrik (7) meint, und daß ν, λ jetzt Funktionen von r, t sind, so haben wir folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{G}_{00} &= -e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{r} - K e^{\nu} = a\,u^2\,; \\ \bar{G}_{01} &= -\frac{\dot{\lambda}}{r} = a\,\dot{u}\,u'\,; \\ \bar{G}_{11} &= -\frac{\lambda'}{r} + K\,e^{\lambda} = a\,u'^2\,; \\ \bar{G}_{22} &= \sin^{-2}\Theta;\ \bar{G}_{33} = e^{-\lambda}\left[1+\frac{r}{2}(\nu'-\lambda')\right] - 1 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

mit

$$x^{(0)} = t, \quad x^{(1)} = r, \quad x^{(2)} = \Theta, \quad x^{(3)} = \varphi\,.$$

Dabei ist K das GAUSZsche Krümmungsmaß[3]) der zweidimensionalen Metrik $e^{\nu}\,dt^2 - e^{\lambda}\,dr^2$; also

$$K = \frac{1}{2}\,e^{-(\nu+\lambda)/2}\left\{\left(e^{(\nu-\lambda)/2}\,\nu'\right)' - \left(e^{(\lambda-\nu)/2}\,\dot{\lambda}\right)^{\cdot}\right\}. \tag{22}$$

Nach SCHÜCKING ist nun festzustellen[4]): Es genügt, die Gleichung $\bar{G}_{22} = 0$ und ferner noch

$$\bar{G}_{01}^2 = \bar{G}_{00}\cdot\bar{G}_{11} \tag{23}$$

[1]) Vgl. die Erläuterung a. a. O. § 35.

[2]) Vgl. a. a. O. β 29.

[3]) Eine sehr elegante Herleitung dieser Formeln (21), (22) verdanke ich J. EHLERS.

[4]) Vgl. a. a. O. S. 220.

zu lösen; dann bekommt man u als das Linienintegral

$$u = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \left\{ \sqrt{\bar{G}_{00}}\, dt + \sqrt{\bar{G}_{11}}\, dr \right\}. \tag{24}$$

(Vorauszusetzen ist dabei, daß die gefundene Lösung zu $\bar{G}_j^j \neq 0$ führt. Der Fall $\bar{G}_j^j = 0$ kommt nur im Sonderfall der SCHWARZSCHILDschen Lösung vor.)

Die noch zu lösenden zwei Gleichungen lassen sich reduzieren auf eine einzige partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, für die Funktion $w = 2 \ln r + \lambda - \nu$; diese ist freilich recht kompliziert. Jedoch hat das Problem umfangreiche Klassen spezieller Lösungen, die sich explizit beschreiben lassen.

Die zur EINSTEINschen Theorie $\varkappa =$ const. zurückführende Spezialisierung $u =$ const. läßt aus (21), (22) den BIRKHOFFschen *Satz* ablesen, daß bei $\varkappa =$ const. *jede* kugelsymmetrische Lösung auch *statisch*, also eine SCHWARZSCHILDsche Lösung ist. Für $\varkappa \neq$ const. ist dieser Satz jedoch nicht mehr gültig.

Aus der Fülle der vierdimensionalen Metriken, die als Lösungen des betrachteten Problems auftreten, sei nur ein Beispiel erwähnt. Die DE SITTERsche Metrik, gegeben durch (18) mit

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \beta_0^2 r^2 \tag{25}$$

ist uns bekannt als Lösung EINSTEINscher Vakuum-Feldgleichungen *mit hinzugefügtem kosmologischen Glied.* Sie tritt in der jetzt besprochenen Theorie wieder auf, diesmal als Lösung von Feldgleichungen *ohne* kosmologisches Glied, aber mit $\varkappa \neq$ const.

Vor Angabe der diesbezüglichen Formeln sei erwähnt: Wenn wir die Aufgabe stellen, das Variationsproblem

$$\delta \int G \sqrt{-g}\, dx = 0\,, \tag{26}$$

aus welchem die EINSTEINschen Vakuum-Feldgleichungen entspringen, zu verallgemeinern durch Mitberücksichtigung eines dimensionsbehafteten Skalars ω, wobei aber das neue Variationsproblem seinerseits *keine* dimensionsbehaftete *Naturkonstante* enthalten soll, so ergibt sich zwangsläufig

$$\delta \int \omega^{\eta} \left(G - \zeta \frac{\omega^{|j} \omega_{|j}}{\omega^2} \right) \sqrt{-g}\, dx = 0 \tag{27}$$

mit zwei Parametern η, ζ, von denen wir $\eta \neq 0$ und $2\,\zeta - 3\,\eta^2 \neq 0$ voraussetzen wollen. Indem wir statt ω eine *Potenz* $\varkappa$ von ω einführen, können wir den Wert von η beliebig ändern. Wir müssen $\eta = 1/2$ herstellen, wenn wir auf die Gestalt (6) der Feldgleichungen kommen wollen. Wir können aber auch $\eta = 1$ als Normalform des Variationsprinzips zugrunde legen; das ist in den Formeln meines Buches getan. Andererseits können wir die Metrik abändern durch eine PAULIsche Konformtransformation

$$g_{kl}^* = \varkappa^\tau g_{kl}\,; \quad \tau = \text{const.} \neq \eta\,, \tag{28}$$

und dadurch den Wert von ζ ändern; nur das *Vorzeichen* von $\zeta - 3/2$ bleibt dabei unveränderlich. Bis auf das Vorzeichen ist also ganz allgemein die Zurückführung auf die Gestalt (13) der Feldgleichungen möglich; diese entsprechen ihrerseits nach JUST [3] gerade dem Sonderfall $\eta = 0$ des Variationsprinzips (27). Die folgenden Angaben beziehen sich aber auf eine Schreibweise der Formeln, in welcher $\eta = 1$ vorausgesetzt und keine Normierung von ζ vorgenommen ist.

Dann ist zu (25) zu ergänzen:

$$\varkappa = \text{const.}\ e^{-3\beta_0 t}\,(1 - \beta_0^2\, r^2)^{3/2}. \tag{29}$$

Als wesentlich einfacheres Problem besprechen wir noch kurz dasjenige der statischen zylindersymmetrischen Gravitationsfelder mit $\varkappa \neq$ const. Nach EHLERS ergibt sich[1]) mit Konstanten m, n, A:

$$-ds^2 = -\varrho^{n-a}\,dt^2 + \varrho^{m-a}\,(dz^2 + A^2\,\varrho^n\,d\varrho^2) + \varrho^{2-a}\,A^2\,d\varphi^2\,; \quad \varkappa = \varkappa_0\,\varrho^a; \tag{30}$$

dabei muß

$$m + n + \frac{m\,n}{2} + \left(\zeta - \frac{3}{2}\right) a^2 = 0 \tag{31}$$

sein.

Im reinen Gravitationsvakuum bleibt es unbestimmt, ob $\varkappa$ selber oder eine Potenz davon die physikalische Bedeutung der Gravitationskonstanten hat, und ob die g_{kl} oder die konformen g_{kl}^* die Metrik bedeuten. Erst bei Übergang zu Problemen mit elektromagnetischem Feld gewinnt $\varkappa$ eine bestimmte Bedeutung, so daß der Parameter η nicht mehr beliebig normierbar ist; und erst die Mitbetrachtung von Materie legt die Metrik endgültig fest. Im Folgenden wird weiterhin $\eta = 1$ angenommen, bei unbestimmt gelassenem ζ.

Als Beispiel der dann eintretenden Verhältnisse sei erwähnt, daß die GÖDELsche kosmologische Lösung zur erweiterten Theorie in einem ähnlichen Verhältnis steht, wie die DE SITTERsche Metrik: Während die GÖDELsche Lösung in der ursprünglich gemeinten Form nur im Falle eines

[1]) Vgl. a. a. O. S. 209–211.

nicht verschwindenden kosmologischen Gliedes möglich ist, kann nach W. KUNDT gezeigt werden, daß sie in etwas veränderter Form bei Hinzufügung eines passenden Feldes $\varkappa$ die Feldgleichungen *ohne* kosmologisches Glied befriedigt.

Die GÖDELsche Metrik kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 + 2\,h(x_1)\,dx_0\,dx_2 + f(x_1)\,dx_2^2 - dx_3^2 \tag{32}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{x_1/b} + e^{-x_1/b}\right) - \sqrt{2}\,; \\ f &= \frac{1}{16}\left(e^{2x_1/b} + e^{-2x_1/b}\right) - \left(e^{x_1/b} + e^{-x_1/b}\right) + \frac{19}{8}\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Dabei hängt b mit dem *kosmologischen Gliede* zusammen:

$$b^2 = -\frac{1}{2\lambda}\,; \tag{34}$$

wegen $-2\,\lambda = \varkappa\,\varrho$ mußte GÖDEL $\lambda < 0$ voraussetzen. Nach KUNDT erfordert die erweiterte Theorie (ohne kosmologisches Glied) eine gewisse Abänderung der numerischen Konstanten, und vor allem eine imaginäre Größe anstelle des reellen b:

$$\left.\begin{aligned} h &= \sqrt{2}\,(\zeta - 2)\sin\frac{x_1}{C}\,; \\ f &= (2\,\zeta - 3)\sin^2\frac{x_1}{C} - 1\,; \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

dazu kommt

$$\varkappa = \varkappa_0\,e^{x_3/c}\,; \qquad C^2 = \frac{2\,\zeta - 3}{\varkappa\,\varrho}\,; \qquad \varkappa\,\varrho = \text{const.} \tag{36}$$

Zum Schluß betrachten wir ein kosmologisches Modell

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2\,d\sigma^2\,, \tag{37}$$

in welchem $d\sigma^2$ ein Raum konstanter Krümmung $+1$ ist; er sei gleichmäßig gefüllt mit druckfreier ruhender Materie. Dann liefert die erweiterte Theorie für $\eta = 1$ und $\zeta > 2$ eine recht komplizierte Differentialgleichung zweiter Ordnung für $R(t)$. Diese kann jedoch auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden, deren Lösung nach KÖNIG und SCHÜCKING ein sehr übersichtliches Bild ergibt, wenn wir eine zweckmäßige Koordinatenwahl zugrunde legen. Das verkleinert aus meinem

Buche wiedergegebene Bild, das ich H. König, Clausthal, verdanke, als Ergebnis numerischer Rechnungen seines Institutes, scheint mir auffällig schön. Auch kann wohl von der erweiterten Gravitationstheorie im Ganzen gesagt werden, daß sie trotz der noch bestehenden Ungewißheit über die empirische Rechtfertigung der These $\varkappa \neq$ const. jedenfalls auf schöne, d. h. nicht triviale, aber doch lösbare mathematische Probleme geführt hat.

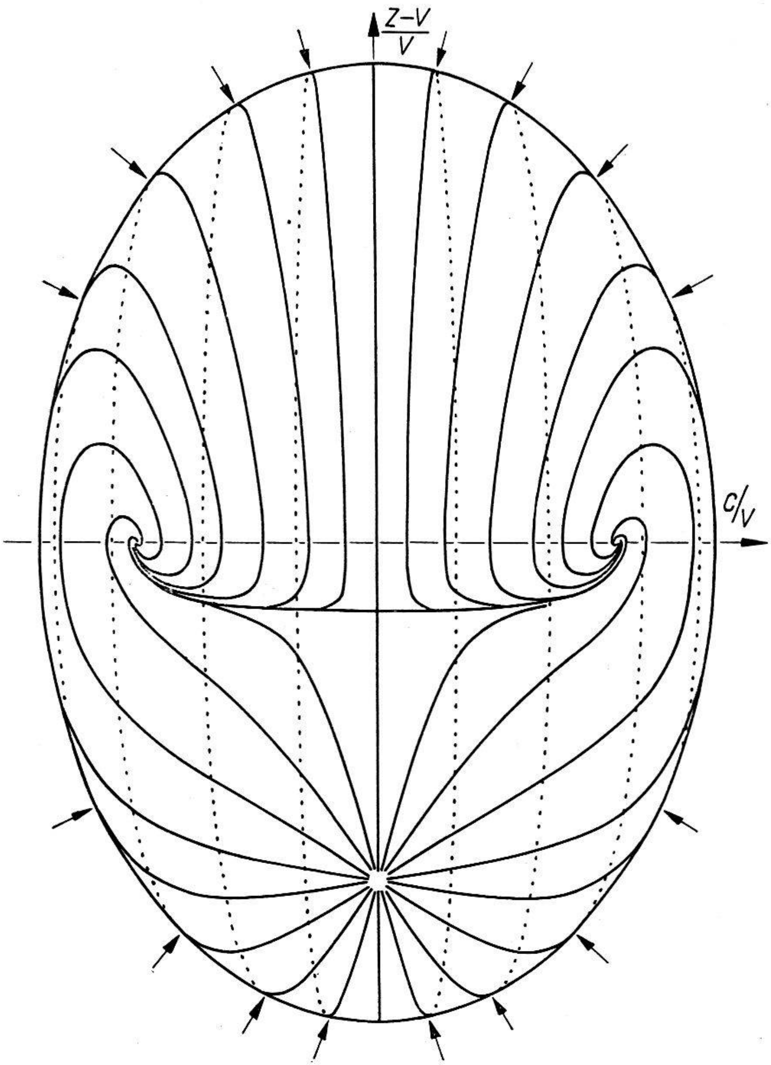

Fig. 1

Hingewiesen sei auf eine bemerkenswerte Arbeit von T. Takasu [4], welche diese Theorie zusammen mit anderen Formen einer einheitlichen Feldtheorie einem umfassenderen Schema einordnet.

Diskussion – Discussion

P. G. Bergmann: I am afraid $\varkappa$ is not the 'gravitational constant', and e and m are conserved in Jordan's theory if properly defined. By proper definition I mean that they be defined in terms of their ponderomotive effects. If we carry out an Einstein-Infeld-Hoffmann type of calculation, I believe it will turn out that precisely those quantities that are conserved, because of general covariance and because of gauge invariance, will be those that have the usual ponderomotive significance of mass and of charge, respectively. Hence the ratio e/m will remain permanently constant.

P. JORDAN: Indeed it is the meaning that the atomic constants give the invariable standards of measurement. But if e/m remains constant the quotient of gravitational and electrical attractions of the two particles in the H-atom may change. The tendency of M. LICHNEROWICZ to speak about a variation of the dielectric constant of the vacuum rather than of a variation of $\varkappa$ seems to me to be another formulation of the same relations.

Literatur

[1] C. R. *222*, 432 (1946).
[2] C. R. *232*, 213 (1951).
[3] K. JUST, Z. Physik *139*, 498 (1954).
[4] T. TAKASU, Compositio mathematica *10*, 95 (1952).