

# Eine Bemerkung zum CTP Theorem

Autor(en): **Jost, Res**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **30 (1957)**

Heft V

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-112824>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Eine Bemerkung zum CTP-Theorem

von Res Jost, ETH., Zürich.

(22. VI. 1957.)

### § 1. Einleitung.

Das CTP-Theorem wurde zuerst von G. LÜDERS<sup>1)</sup> klar erkannt und publiziert und weiterhin von W. PAULI<sup>2)</sup> sehr eingehend diskutiert. Es hat in der neulichen Diskussion über die Nichterhaltung der Parität eine Rolle gespielt.

Das Theorem sagt aus, dass in den lokalen Feldtheorien, falls sie nur den richtigen Zusammenhang zwischen Spin und Statistik wahren, aus der Invarianz gegenüber der inhomogenen, orthochronen Lorentzgruppe ohne Spiegelungen die Invarianz gegenüber dem Produkt der Ladungskonjugation  $C$  und der simultanen Umkehrung der sämtlichen 4 Koordinaten (TP) folgt.

Die vorliegende Arbeit versucht, den Zusammenhang dieses merkwürdigen Theorems mit den Grundlagen der quantisierten Feldtheorie abzuklären.

Wir gehen dabei von den folgenden 2 Postulaten aus:

1. Invarianz bezüglich der schon erwähnten inhomogenen orthochronen Lorentzgruppe  $\{(A, a)\}$ ,  $A \in L_+^\uparrow$ . Dabei besteht  $L_+^\uparrow$  aus den orthochronen homogenen Lorentztransformationen der Determinanten  $+1$ . Es ist wohlbekannt, dass die beiden erwähnten Gruppen zusammenhängend sind.

2. Aus 1. folgt die Existenz eines Energie-Impuls-Vektors  $P_\nu$  mit der Eigenschaft  $i[P_\nu, \psi] = \partial\psi/\partial x^\nu$  für jedes Feld  $\psi$  in der Theorie. Wir fordern, dass  $P_0$  keine negativen Eigenwerte besitze. Weiter gehöre zu  $P = 0$  als einziger Eigenzustand das Vakuum\*).

Unser Resultat ist das folgende: Unter der Annahme von 1. und 2. ist das CTP-Theorem zu den folgenden lokalen Vertauschungsrelationen äquivalent:

$$\begin{aligned} & \langle \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \dots \psi_{n+1}(x_{n+1}) \rangle_0 \\ &= (-1)^\sigma \langle \psi_{n+1}(x_{n+1}) \dots \psi_2(x_2) \psi_1(x_1) \rangle_0 \end{aligned} \quad (1)$$

\*) Der Bequemlichkeit halber wollen wir im Raum der Zustände eine positiv definite Metrik annehmen. Es ist leicht zu sehen, dass diese Annahme für unsere Untersuchung, bei passender Neuformulierung des 2. Postulates, überflüssig ist.

für jedes  $(n + 1)$ -tupel von Punkten  $(x_1, \dots, x_{n+1})$ , für welches der durch  $\varrho_i = x_i - x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  definierte konvexe Körper

$$\xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varrho_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

aus lauter raumartigen Vektoren besteht. Dabei sind  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}$  irgendwelche Felder aus der Theorie und  $\sigma$  ist die Zahl der Transpositionen, welche die Felder mit halbzahligem Spin bei der in (1) angedeuteten Permutation erfahren.  $\langle \rangle_0$  bedeutet den Vakuumerwartungswert\*).

Im folgenden werden wir der Einfachheit halber nur skalare Felder betrachten. Felder mit beliebigem Spin können in Anlehnung an W. PAULI l. c. § 3 behandelt werden.

Unsere Analyse beruht auf Resultaten von V. BARGMANN, D. HALL und A. WIGHTMAN. Diese gestatten es uns im übrigen, mit elementaren Hilfsmitteln auszukommen.

## § 2. Folgerungen aus einem Satz von Bargmann, Hall und Wightman.

Nach einem Ergebnis von A. WIGHTMAN<sup>3)</sup> genügt es, die Vakuumerwartungswerte von Produkten von Feldoperatoren zu betrachten. Diese definieren die Feldtheorie schon vollständig.

Wir werden also Funktionen\*\*) betrachten

$$\langle A(x_1) \dots A(x_{n+1}) \rangle_0 = F(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1)$$

wobei  $\xi_k = x_k - x_{k+1}$  gesetzt ist. Dabei ist mit  $A(x_k)$  ein Skalarfeld bezeichnet. Es ist aber nicht vorausgesetzt, dass alle in (1) vorkommenden Felder untereinander gleich sind.

Nach Voraussetzung (Postulat 1) gilt für jede Lorentztransformation  $A \in L^\uparrow$

$$F(A\xi_1, \dots, A\xi_n) = F(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (2)$$

Weiter folgt aus Postulat 2, dass  $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$  Randwert einer analytischen Funktion  $F(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  ist. Diese ist regulär in dem Gebiet  $\mathfrak{R}_n$ , das aus den Punkten mit  $Im[\zeta_k] \in V_+$  besteht.  $V_+$  bedeutet dabei den (offenen) Vorkegel.

Der Satz von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN<sup>4)</sup> sagt nun aus, dass dann  $F(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  in einem grösseren Gebiet regulär und be-

\*) Insbesondere folgt aus dieser Äquivalenz, dass die Annahmen 1 und 2 zusammen mit den üblichen lokalen Vertauschungsrelationen (Verschwinden des Kommutators resp. Antikommutators der Felder in raumartig gelegenen Punkten bei richtiger Zuordnung von Spin und Statistik) die CTP-Invarianz zur Folge hat.

\*\*) Es handelt sich dabei eigentlich um temperierte Distributionen.

züglich einer grösseren Gruppe invariant ist.  $F(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  besitzt nämlich eine eindeutige analytische Fortsetzung in das erweiterte Gebiet  $\mathfrak{R}'_n$ , das aus allen Punkten  $(\zeta'_1, \dots, \zeta'_n)$  besteht, die sich durch *komplexe* Lorentztransformationen  $A$  der Determinanten  $+1$  aus Punkten des ursprünglichen Gebietes  $\mathfrak{R}_n$  erhalten lassen:

$$\zeta'_i = A\zeta_i, (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathfrak{R}_n.$$

Die so definierte Funktion ist weiterhin invariant bezüglich der komplexen Lorentzgruppe  $L_+(C)$  der Determinanten  $+1$ :

$$F(A\zeta_1, \dots, A\zeta_n) = F(\zeta_1, \dots, \zeta_n), A \in L_+(C). \quad (3)$$

Nun enthält aber  $L_+(C)$  offenbar die Transformation  $\zeta'_i = -\zeta_i$ . Es ist demnach in (3) der folgende Spezialfall enthalten:

$$F(-\zeta_1, \dots, -\zeta_n) = F(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \quad (4)$$

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathfrak{R}'_n.$$

Währenddem  $\mathfrak{R}_n$  keine reellen Punkte enthält\*), enthält  $\mathfrak{R}'_n$  solche, wie man leicht auf Grund der folgenden Gleichung erkennt

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Der transformierte Vektor hat offenbar einen Imaginärteil aus  $V_+$ , die Transformation gehört  $L_+(C)$  an und das Resultat ist ein reeller (raumartiger Vektor). Wir wollen die reellen Punkte in  $\mathfrak{R}'_n$  mit  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  bezeichnen. Für diese gilt gemäss (4)

$$F(-\varrho_1, \dots, -\varrho_n) = F(\varrho_1, \dots, \varrho_n). \quad (6)$$

Andererseits behauptet das CTP-Theorem

$$\langle A(-x_1) \dots A(-x_{n+1}) \rangle_0 = \langle A(x_{n+1}) \dots A(x_1) \rangle_0 \quad (7)$$

oder

$$F(-\xi_1, \dots, -\xi_n) = \langle A(x_{n+1}) \dots A(x_1) \rangle_0 \quad (8)$$

und dies für beliebige reelle  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  also insbesondere für die reellen Punkte  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  in  $\mathfrak{R}'$ . Durch Vergleich von (6) und (8) folgt der

**Satz 1:** Eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des CTP-Theorems lautet

$$\langle A(x_1) \dots A(x_{n+1}) \rangle_0 = \langle A(x_{n+1}) \dots A(x_1) \rangle_0 \quad (9)$$

\*) Die Randpunkte gehören nicht zu  $\mathfrak{R}_n$ , denn dort steht die Regularität von  $F(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  nicht fest.

für alle reellen Punkte  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n) = (x_1 - x_2, \dots, x_n - x_{n+1})$  in  $\mathfrak{R}'_n$ .

Von diesem Satz gilt aber auch eine verschärfte Umkehrung:

**Satz 2:** Falls (9) in einer reellen Umgebung<sup>5)</sup> eines Punktes  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n) \in \mathfrak{R}'_n$  gilt, dann folgt daraus das CTP-Theorem, d. h. es folgt (7) für beliebiges reelles  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

*Beweis:* Da  $\mathfrak{R}'_n$  offen ist, gehört mit jedem Punkt auch eine komplexe (und eine reelle) Umgebung zu  $\mathfrak{R}'_n$ .

Bis auf weiteres betrachten wir nur Punkte in  $\mathfrak{R}'_n$ , die der im Satz erwähnten Umgebung angehören. Das bezieht sich auch auf die Punkte  $(x_1 \dots x_{n+1})$  die mit den betrachteten  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  und den Gleichungen  $\varrho_k = x_k - x_{k+1}$  verträglich sind. Die zu (9) konjugiert-komplexe Gleichung lautet

$$\langle A(x_1) \dots A(x_{n+1}) \rangle_0^* = \langle A^+(x_1) \dots A^+(x_{n+1}) \rangle_0 \quad (10)$$

wobei  $A^+$  das zu  $A$  adjungierte Feld ist.

$$G(\xi_1, \dots, \xi_n) = \langle A^+(x_1) \dots A^+(x_{n+1}) \rangle_0 \quad (11)$$

(hier sind die  $(x_1 \dots x_{n+1})$  ausnahmsweise beliebige reelle Vektoren) hat natürlich Eigenschaften, die denen von  $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$  analog sind. Die zu (6) konjugiert komplexe Gleichung und die Gleichungen (10) und (11) implizieren also

$$F^*(-\zeta_1^*, \dots, -\zeta_n^*) = G(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \quad (12)$$

für  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  in unserer Umgebung. Die Gleichung (12) lässt sich aber analytisch in ganz  $\mathfrak{R}'_n$  fortsetzen, und zwar gilt: falls  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathfrak{R}_n$ , dann auch  $(-\zeta_1^*, \dots, -\zeta_n^*) \in \mathfrak{R}_n$ . (12) stellt also eine Relation zwischen Funktionswerten in  $\mathfrak{R}_n$  selbst dar. Das erlaubt uns nun in  $\mathfrak{R}_n$  wieder zu den reellen Randpunkten, d. h. zu unseren ursprünglichen Variablen  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  überzugehen (vgl. (1)). Damit hat man

$$F^*(-\xi_1, \dots, -\xi_n) = G(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (13)$$

oder

$$\langle A(-x_1) \dots A(-x_{n+1}) \rangle_0^* = \langle A^+(x_1) \dots A^+(x_{n+1}) \rangle_0 \quad (14)$$

woraus durch Übergang zum Konjugiertkomplexen die Gleichung (7) folgt.

Was uns jetzt noch verbleibt, ist

1. das Aufsuchen aller reellen Punkte in  $\mathfrak{R}'_n$ ,
2. der Nachweis, dass ohne Zusatzannahmen nicht geschlossen werden kann, dass (9) auch noch für andere als die erwähnten Punkte gilt.

Das soll im nächsten Paragraphen geschehen.

### § 3. Die reellen Punkte des $\mathfrak{R}'_n$ .

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{R}$  das Gebiet  $\mathfrak{R}_1$ . Ein Vektor  $\zeta$  ist also in  $\mathfrak{R}$  falls  $Im[\zeta] \in V_+$ . Die Frage, die sich dann stellt, lautet: welches sind die reellen Vektoren in  $A\mathfrak{R}$  wobei  $A \in L_+(C)$ . In der Tat müssen unsere reellen Vektoren  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$  bei passender Wahl von  $A$  alle in  $A\mathfrak{R}$  liegen.

Es scheint nun zweckmässiger, zu der wohlbekannteren Darstellung der  $L_+(C)$  überzugehen, indem man jedem Vektor  $\zeta$  eine Matrix  $X$  zuordnet:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_0 + \zeta_3 & \zeta_1 - i\zeta_2 \\ \zeta_1 + i\zeta_2 & \zeta_0 - \zeta_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Im folgenden wird zwischen  $X$  und  $\zeta$  nicht unterschieden, wir werden also z. B. sagen  $X \in \mathfrak{R}$  falls das zugeordnete  $\zeta \in \mathfrak{R}$ . Jedes  $A \in L_+(C)$  stellt sich dann dar durch

$$Y = A X B \quad (2)$$

wobei  $A$  und  $B$   $2 \times 2$  Matrizen der Determinanten  $+1$  sind und umgekehrt. Reelle Lorentztransformationen aus  $L_+^\uparrow$  erhält man, falls  $B = A^*$  gewählt wird. Für reelle Vektoren gilt  $Y^* = Y$ .  $\mathfrak{R}$  ist invariant gegenüber den Transformationen  $L_+^\uparrow$ . Wir fragen nun: welches sind bei gegebenen  $A$  und  $B$  und für  $X \in \mathfrak{R}$  die hermiteschen  $Y$ . Dabei interessiert uns die Orientierung von  $Y$  nicht, wir können also von  $Y$  zu  $C^* Y C$  übergehen. Wählt man  $C = B^{-1}$ , dann nimmt (2) die Form

$$Y = A' X \quad (3)$$

an. Schliesslich kann man noch die Invarianz von  $\mathfrak{R}$  ausnützen, und statt  $X$  in (3)  $D X D^*$  setzen, dann entsteht:

$$D^{-1} Y D^{*-1} = Y' = D^{-1} A D X. \quad (4)$$

Durch passende Wahl von  $D$  bringt man  $A$  auf Normalform, und es bleiben nur noch die folgenden Fälle\*):

$$Y = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} X \text{ und } Y = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} X. \quad (5)$$

Der erste Fall liefert für unsere Zwecke nichts von Interesse und wir beschränken uns daher auf den zweiten. Setzt man (1) ein, dann bedeutet die Hermitizität von  $Y$ , dass  $\lambda x_{11}$  und  $\lambda^{-1} x_{22}$  reell sein

\*) Die eben durchgeführte Transformation wurde von BARGMANN et al. zu anderem Zwecke eingeführt.

müssen und dass weiter  $\lambda x_{12} = (\lambda^{-1} x_{12})^*$  ist. Mit  $\lambda = \exp(i\varphi + v)$  ist dann der allgemeinste Ansatz für  $X$  der folgende:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \pm T e^u e^{-i\varphi} & x_{12} &= Q e^{-v} e^{i\psi} \\ x_{21} &= Q e^v e^{-i\psi} & x_{22} &= T e^{-u} e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (6)$$

wobei

$$\begin{aligned} y_{11} &= \pm T e^{(u+v)} & y_{12} &= Q e^{i(\varphi+\psi)} \\ y_{21} &= Q e^{-i(\varphi+\psi)} & y_{22} &= T e^{-(u+v)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Mit (1):

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= T \left[ \begin{pmatrix} \text{Ch } u \\ -\text{Sh } u \end{pmatrix} \cos \varphi + i \begin{pmatrix} -\text{Sh } u \\ \text{Ch } u \end{pmatrix} \sin \varphi \right] \\ \zeta_3 &= T \left[ \begin{pmatrix} \text{Sh } u \\ -\text{Ch } u \end{pmatrix} \cos \varphi - i \begin{pmatrix} \text{Ch } u \\ -\text{Sh } u \end{pmatrix} \sin \varphi \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Es soll aber  $\zeta \varepsilon \mathfrak{R}$  und das impliziert  $(\text{Im} \zeta_0)^2 - (\text{Im} \zeta_3)^2 > 0$ , was nur bei der unteren Alternative erfüllbar ist. Es ist also für  $x_{11}$  und  $y_{11}$  in (6) und (7) das untere Vorzeichen zu wählen.

Nun setze man  $Y = \begin{pmatrix} \eta_0 + \eta_3 & \eta_1 - i \eta_2 \\ \eta_1 + i \eta_2 & \eta_0 - \eta_3 \end{pmatrix}$ , woraus mit (6) und (7) folgt:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= T(-\text{Sh } u \cos \varphi + i \text{Ch } u \sin \varphi) \\ \zeta_1 &= Q(\text{Ch } v \cos \psi - i \text{Sh } v \sin \psi) \\ \zeta_2 &= Q(-\text{Ch } v \sin \psi - i \text{Sh } v \cos \psi) \\ \zeta_3 &= T(-\text{Ch } u \cos \varphi + i \text{Sh } u \sin \varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

und

$$\begin{aligned} \eta_0 &= -T \text{Sh } (u + v) & \eta_1 &= Q \cos (\varphi + \psi) \\ \eta_3 &= -T \text{Ch } (u + v) & \eta_2 &= -Q \sin (\varphi + \psi). \end{aligned} \quad (10)$$

$\zeta \varepsilon \mathfrak{R}$  besagt jetzt

$$T \text{Ch } u \sin \varphi > 0 \quad \text{oder} \quad T \sin \varphi > 0 \quad (11)$$

und

$$T^2 \sin^2 \varphi - Q^2 \text{Sh}^2 v > 0. \quad (12)$$

$u$  und  $\psi$  sind also beliebig variabel, dasselbe gilt für  $\alpha = -(\varphi + \psi)$  und  $w = u + v$ . Da es in (11) keine Einschränkung ist  $\pi < \varphi < 2\pi$  anzunehmen, haben wir damit die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= |T| \text{Sh } w & \eta_1 &= Q \cos \alpha \\ \eta_3 &= |T| \text{Ch } w & \eta_2 &= Q \sin \alpha \end{aligned} \quad T^2 > \frac{\text{Sh}^2 v}{\sin^2 \varphi} Q^2. \quad (13)$$

Nach unseren Vorbetrachtungen erhalten wir den folgenden

**Hilfssatz:** Notwendig und hinreichend dafür, dass ein Punkt  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  in  $\mathfrak{R}'_n$  liegt, ist die Bedingung, dass für die Kompo-

nenten  $(\varrho_k)_0$  und  $(\varrho_k)_3$  nach passender reeller Lorentztransformation aus  $L_+$  gilt

$$(\varrho_k)_3 > |(\varrho_k)_0|. \quad (14)$$

*Beweis:* Falls (14) gilt, gibt es  $T_k, W_k, Q_k$  und  $\alpha_k$  so, dass

$$\left. \begin{aligned} (\varrho_k)_0 &= |T_k| \operatorname{Sh} w_k & (\varrho_k)_1 &= Q_k \cos \alpha_k \\ (\varrho_k)_3 &= |T_k| \operatorname{Ch} w_k & (\varrho_k)_2 &= Q_k \sin \alpha_k \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wobei  $|T_k| \geq |T| > 0$ . Es lässt sich dann ein  $v$  und ein  $\varphi$  so bestimmen, dass die letzte Gleichung (13) für alle  $T_k$  und  $Q_k$  erfüllt ist. Zu  $\lambda = \exp(i\varphi + v)$  gehört eine Lorentztransformation  $A$  der Form (5). Die Vektoren  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$  liegen also alle in  $A\mathfrak{R}$  und das bedeutet  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n) \in \mathfrak{R}'_n$  gemäss der Definition von  $\mathfrak{R}'_n$  im Satz von BARGMANN et al.

Willkommener ist uns die invariante Bedingung, die der folgende Satz gibt

*Satz 3:* Der Punkt  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  liegt genau dann in  $\mathfrak{R}'_n$  falls der konvexe Körper

$$\xi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varrho_k, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

aus lauter raumartigen Vektoren besteht.

*Beweis:* Die Notwendigkeit folgt aus (14). Es bleibt zu zeigen, dass die Bedingung auch hinreicht. Dazu betrachten wir den Kegel

$$\mathfrak{K}: \xi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varrho_k, \lambda_k \geq 0$$

durch den konvexen Körper. Dieser Kegel ist selbst konvex und enthält nur raumartige Vektoren. Er hat also mit dem Vorkegel  $V_+$  und mit dem Nachkegel  $V_-$  nur deren Spitze gemein. Dann gibt es aber eine Stützebene an  $V_+$ , die mit  $V_+$  eine Erzeugende gemein hat und die  $\mathfrak{K}$  und  $V_+$  separiert. Diese laute  $\alpha, \xi^v = 0$ . Dasselbe gilt für  $V_-$  und die entsprechende Stützebene heisse  $\beta, \xi^v = 0$ . Da  $\alpha, \xi^v = 0$   $V_+$  und  $V_-$  separiert, also  $V_-$  und  $\mathfrak{K}$  nicht separiert, müssen  $\alpha$  und  $\beta$  linear unabhängig sein.  $\alpha$  und  $\beta$  sind Nullvektoren und die durch sie erzeugte Ebene enthält zeitartige Vektoren. Da weiter

$$(\alpha \beta) = \alpha_0 \beta_0 - \sum_{s=1}^3 \alpha_s \beta_s < 0$$

gibt es ein Koordinatensystem in welchem  $\alpha = (1, 1, 0, 0)$  und  $\beta = (-1, 1, 0, 0)$  ist. In diesem Koordinatensystem gilt offenbar

$$(\varrho_k)_0 + (\varrho_k)_3 > 0 \quad \text{und} \quad -(\varrho_k)_0 + (\varrho_k)_3 > 0 \quad \text{also (14).}$$



Schliesslich bleibt noch zu zeigen, dass ohne Zusatzannahmen eine analytische Fortsetzung von  $F(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  zu reellen Punkten ausserhalb des Gebietes  $\mathfrak{R}'_n$  unmöglich ist. Ausserhalb dieses Gebietes braucht also, vom Standpunkt unserer Untersuchung aus, (2.6) nicht mehr zu gelten und (2.9) lässt sich nicht verschärfen. Um das zu zeigen, genügt es, eine bezüglich  $L^\uparrow$  invariante und in  $\mathfrak{R}_n$  reguläre Funktion anzugeben, die an einem beliebig vorgegebenen, reellen Punkt  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  ausserhalb  $\mathfrak{R}'_n$  eine Singularität besitzt. Nach Satz 3 hat ein solcher Punkt die Eigenschaft, dass sich nicht negative  $\lambda_i$  bestimmen lassen, für die  $\xi = \sum \lambda_i \xi_i$  zeitartig wird. Wir bestimmen die  $\lambda_i$  etwa so, dass  $\xi^2 = \xi_0^2 - \vec{\xi}^2 = 1$  wird. Nun behaupten wir, dass  $[(\sum \lambda_i \zeta_i)^2 - 1]^{-1}$  die gewünschte Eigenschaft hat. Die Funktion wird sicher an der vorgegebenen Stelle singular (dass die Singularität ein Pol ist, ist natürlich irrelevant). Die Funktion ist lorentzinvariant. Sie ist aber in  $\mathfrak{R}_n$  regulär. Um das zu sehen beachte man, dass  $\mathfrak{R}$  selbst ein konvexer Kegel ist. Falls  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathfrak{R}_n$ , dann  $\zeta_k \in \mathfrak{R}$  und  $\zeta = \sum \lambda_i \zeta_i \in \mathfrak{R}$ . Falls aber  $\zeta \in \mathfrak{R}$ , dann ist  $\zeta^2$  nie reell positiv. Daraus folgt, dass  $(\sum \lambda_i \zeta_i)^2 \neq 1$  für  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathfrak{R}_n$ .

#### Literatur.

- 1) G. LÜDERS, Kong. Danske Videnskabernes Selskab, Mat.-fys. Medd. **28**, No. 5 (1954). Vergleiche auch J. SCHWINGER, Phys. Rev. **82**, 914 (1951).
- 2) W. PAULI, „Niels Bohr and the Development of Physics“, London 1955, p. 30.
- 3) Phys. Rev. **101**, 860 (1956).
- 4) D. HALL und A. WIGHTMAN, Kong. Danske Vid. Selsk. Mat.-fys. Medd., im Druck. Ich danke Herrn A. WIGHTMAN für die Zustellung dieser Arbeit vor der Publikation.
- 5) Für die Begriffe aus der Funktionentheorie von mehreren komplexen Variablen vgl. S. BOCHNER und W. T. MARTIN, Several Complex Variables, Princeton Press (1948).