Quantité d'information, et systèmes physiques

Autor(en): **Berger, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **31 (1958)**

Heft II

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112906

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Quantité d'information, et systèmes physiques

par **L. Berger,** Lausanne

(15 XII 1957)

The purpose of this publication is to show how the notion of 'quantity of information' can be introduced, to describe statistical correlations between physical systems.

This problem is treated in the classical case (systems which are caracterized by c-numbers). Then it is treated in the quantum case (systems which are caracterized by q-numbers). In both cases, the time evolution of information is investigated, for an isolated system. A conservation equation for information is derived.

Before that, the definition and mathematical properties of quantity of information are briefly given. A definition is chosen, which explicitly shows two elements on which information depends always; these elements are: the system which contains information ('document'), and the system described by the information ('subject').

1. Introduction

Le but de cette publication est de montrer comment il convient d'introduire la notion de «quantité d'information», pour décrire les corrélations statistiques entre des systèmes physiques.

Ce problème est traité dans le cas classique (systèmes caractérisés par des nombres c). Puis il est traité dans le cas quantique (systèmes caractérisés par des nombres q). Dans les deux cas, l'évolution temporelle de l'information est examinée, lorsque le système est isolé. On trouve que l'information se conserve.

Auparavant, la définition et les propriétés mathématiques de la quantité d'information sont rappelées rapidement. La définition qui est choisie explicite deux éléments dont dépend toujours l'information; ces deux éléments sont: le système qui contient l'information («document»), et le système décrit par l'information («sujet»).

2. Définition mathématique de la quantité d'information

Soit tout d'abord une variable continue et réelle x:

$$-\infty < x < +\infty$$

Soit une densité de probabilité $p(x)$ définie sur la variable x:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$$

Appelons *entropie de la variable* x le nombre Sx, s'il existe:

$$S x = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x)\, dx \tag{2.1}$$

Soient maintenant 2 variables continues et réelles x et y:

$$-\infty < x < +\infty \qquad -\infty < y < +\infty$$

Soit une densité de probabilité combinée $p(x, y)$ définie sur l'espace des paires (x, y):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Appelons *entropie du système de variables* x, y le nombre Sxy, s'il existe:

$$S x y = -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) \log p(x, y)\, dx\, dy \tag{2.2}$$

Les variables x et y ont chacune une densité de probabilité projetée:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dy \qquad p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx$$

Selon (2.1.), chacune de ces deux variables a donc aussi une entropie (si les intégrales existent):

$$S x = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x)\, dx \qquad S y = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) \log p(y)\, dy \tag{2.3}$$

Appelons alors *information de la variable* y *sur la variable* x la quantité $I_x y$:

$$I_x y = S x + S y - S x y \tag{2.4}$$

Nous appellerons y le *document*, et x le *sujet* de l'information. $I_x y$ mesure les corrélations statistiques entre x et y*).

Remarquons que l'expression (2.4) est analogue à celle qui figure dans le théorème fondamental de SHANNON[1]) sous le nom de «rate of transmission of information». Cependant, lorsque SHANNON et d'autres auteurs discutent les propriétés mathématiques générales de l'information, ils le font[2])[4])[6]) sur une expression de la forme de (2.1.); le signe en est d'ailleurs différent chez SHANNON d'une part, et chez WIENER et BRILLOUIN d'autre part.

Employée comme mesure de l'information, l'expression (2.1.) présente certains défauts, souvent signalés dans la littérature[3])[5]). Certains au moins de ces défauts semblent ne pas affecter l'expression (2.4.); cela est dû au fait que (2.4.) précise et met en évidence les deux éléments dont dépend toujours l'information, à savoir: le document et le sujet.

Il semble préférable à l'auteur de réserver le nom de quantité d'information à des expressions de la forme de (2.4.).

3. Propriétés mathématiques de la quantité d'information

Enonçons brièvement les propriétés générales de l'expression (2.4.). La plupart d'entre elles ont d'importantes conséquences dans les applications à la Physique.

Ces propriétés découlent le plus souvent de propriétés de l'entropie (2.1.), démontrées par SHANNON ou BRILLOUIN[2])[4]).

Propriété a: $I_x y = I_y x$.

Propriété b: $0 \leqslant I_x y \leqslant +\infty$.

Propriété c: Si $p(x, y) = p(x) p(y)$ (x et y statistiquement indépendantes), alors: $I_x y = 0$.

Propriété d: Si la variable z est une fonction univoque $z = z(y)$ de la variable y, alors: $I_x z \leqslant I_x y$.

Propriété e: Si la variable z est une fonction biunivoque $z = z(y)$ de la variable y, alors: $I_x z = I_x y$.

Par une généralisation évidente, il est possible de définir une information lorsque le document (ou le sujet, ou les deux) est constitué par une paire de variables. Par exemple:

$$I_x y z = S x + S y z - S x y z \tag{3.1}$$

Dans (3.1.), $Sxyz$ est supposé défini par généralisation naturelle des expressions (2.1.) et (2.2).

---

*) Bien que la définition (2.4) de l'information soit symétrique en x et y, l'auteur préfère, pour diverses raisons, utiliser la notation dissymétrique $I_x y$.

On a alors les propriétés suivantes:

Propriété f: $I_x y z = I_x z y$.

Propriété g: $I_x y z \geqslant I_x y$. $\quad I_x y z \geqslant I_x z$.

Propriété h: $I_x y y = I_x y$.

Propriété i: Si la variable z est une fonction univoque $z = z(y)$ de la variable y, alors: $I_x y z = I_x y$.

Définition j: On a en général: $I_x y z \lesseqgtr I_x y + I_x z$.

Introduisons donc *l'information d'interaction* $J_x y z$ des documents y et z sur le sujet x, définie par:

$$I_x y z = I_x y + I_x z + J_x y z \tag{3.2}$$

Propriété k: Si $p(x,u,y,z) = p(x,y)\,p(u,z)$ (paire (x,y) statistiquement indépendante de la paire (u,z)), alors: $I_{xu} y z = I_x y + I_u z$.

Donc, dans ce cas: $J_{xu} y z = 0$.

4. La quantité d'information dans les systèmes physiques classiques. Evolution temporelle

Soit un système physique classique a. Caractérisons son état à l'instant t à l'aide de variables canoniques $p_1, q_1, \ldots p_n, q_n$ (nombres c).

Introduisons aussi une variable (ou système de variables) quelconque x (nombre c). Cette variable est supposée ne pas dépendre du temps. Elle décrit, par exemple, un certain événement qui s'est passé à un temps t_0 fixé.

Supposons qu'une densité de probabilité $p(p_1, q_1, \ldots p_n, q_n; x)$ soit définie sur l'espace des paires $(a; x) = (p_1, q_1, \ldots p_n, q_n; x)$.

Il est alors possible de définir *l'information du système physique a (document) sur le sujet x;* il suffit d'utiliser le processus qui, dans la section 2 du présent article, mène de l'expression (2.2.) à l'expression (2.4.). Cette information est:

$$I_x a = I_x p_1 q_1 \cdots p_n q_n = S x + S p_1 q_1 \cdots p_n q_n - S x p_1 q_1 \cdots p_n q_n \tag{4.1}$$

Supposons le système a isolé. Examinons l'évolution temporelle de l'information $I_x a$.

A cause de la constance de la variable x, et à cause du théorème de Liouville de la conservation de la densité en phase, il est évident que chacune des entropies qui composent l'expression (4.1.) reste constante au cours du temps*). L'information (4.1.) est donc elle-même constante au cours du temps:

$$\frac{d}{dt} I_x a = 0 \tag{4.2}$$

*) Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que ces entropies, étant définies à partir de probabilités à «grain fin», ne sont pas celles de la thermodynamique.

Le résultat (4.2.) précise l'idée commune et vague selon laquelle un système physique ne peut acquérir de l'information sans communication, sans interaction physique, avec l'extérieur.

Il n'est d'ailleurs pas absolument nécessaire, pour que (4.2.) ait lieu, que l'état du système isolé a soit caractérisé par des variables canoniques. Considérons en effet la condition suivante:

«Principe du déterminisme réversible»: L'état du système à un temps quelconque t_1 détermine, d'une manière univoque, à la fois l'évolution passée et l'évolution future du système.

Si les variables décrivant l'état du système isolé a sont telles que cette condition soit réalisée, alors (4.2.) est valable. La raison en est la propriété e) de l'information (voir la section 3 du présent article). Mais les entropies qui composent l'information (4.1.) ne se conservent en général plus.

Remarquons finalement que le résultat (4.2.) n'exclut pas la possibilité d'une *dissipation* de l'information. Dans certains systèmes l'on peut classer les variables en variables «visibles» et en variables «cachées»; et il est concevable que l'information, comme l'énergie, ait une tendance à se porter des variables visibles sur les variables cachées du système. La formule (4.2.) ne peut rien nous apprendre au sujet d'une telle dissipation de l'information; en effet toutes les variables du système isolé a interviennent dans (4.2.), et y sont traitées sur le même pied.

5. La quantité d'information dans les systèmes physiques quantiques. Evolution temporelle

Soit un système physique quantique a.

A chaque ensemble maximum O de grandeurs physiques simultanément mesurables de a est associé à l'instant t un ensemble complet[7]) $\boldsymbol{O}$ d'opérateurs commutables d'un espace de HILBERT.

Introduisons également une variable quelconque $\boldsymbol{X}$ (nombre q, opérateur sur un espace de HILBERT). Cette variable est supposée ne pas dépendre du temps; elle décrit, par exemple, un certain événement physique x qui s'est passé une fois, à un temps t_0 fixé.

La paire $(\boldsymbol{O}; \boldsymbol{X})$ est un ensemble complet d'opérateurs commutables pour le système combiné $(a; x)$.

Supposons qu'un opérateur de densité[8])[10]) $\boldsymbol{\varrho}^{a\,x}$ soit défini sur l'espace de HILBERT combiné (espace produit) de a et de x. Il définit les propriétés statistiques du système combiné $(a; x)$, et est donc le correspondant quantique d'une densité de probabilité.

On a également des opérateurs de densité $\boldsymbol{\varrho}^{a}$ et $\boldsymbol{\varrho}^{x}$ projetés sur l'espace de HILBERT de a et sur celui de x. Ils sont naturellement obtenus par formation de «trace»[11])[12]) à partir de $\boldsymbol{\varrho}^{a\,x}$.

L'ensemble complet $(\boldsymbol{O}; \boldsymbol{X})$ d'opérateurs commutables de $(a; x)$ définit une représentation orthogonale de $(a; x)$.

L'opérateur de densité $\boldsymbol{\varrho}^{a\,x}$ y est représenté par une matrice $\varrho^{a\,x}_{ij\,kl}$, les opérateurs projetés $\boldsymbol{\varrho}^a$ et $\boldsymbol{\varrho}^x$ par des matrices ϱ^a_{ij} et ϱ^x_{kl}.

Il est alors possible de définir l'entropie[9])[13]) du système combiné $(a; x)$:

$$S\,a\,x = -\sum_{i\,k} \varrho^{a\,x}_{ii\,kk} \log \varrho^{a\,x}_{ii\,kk} \tag{5.1}$$

Et aussi les entropies Sa et Sx des systèmes partiels a et x:

$$S\,a = -\sum_i \varrho^a_{ii} \log \varrho^a_{ii} \qquad S\,x = -\sum_k \varrho^x_{kk} \log \varrho^x_{kk}$$

Les valeurs de toutes ces entropies dépendent de la représentation orthogonale choisie, donc de O.

Par analogie à (2.4) ou à (4.1), on définit l'information du système quantique a sur l'événement (quantique)x:

$$I_x\,a = S\,x + S\,a - S\,a\,x \tag{5.2}$$

Il est maintenant essentiel de se rappeler que la valeur de l'information (5.2) dépend de l'ensemble maximum O de grandeurs physiques simultanément mesurables, choisi pour définir la représentation du système a:

$$I_x a = I_x a(0) \tag{5.3}$$

Nous appelons la relation fonctionnelle (5.3) la *fonction d'information* du système quantique a sur l'événement (quantique) x.

On peut dire que (5.3) représente l'information sur la variable $\boldsymbol{X}$ (décrivant l'événement x), qui est fournie par la mesure de l'ensemble maximum O de grandeurs physiques simultanément mesurables du système a. Comme on ne peut mesurer simultanément plusieurs ensembles maximums O, la valeur de l'information doit être indiquée pour chaque O; il est donc normal que l'information soit représentée dans le cas quantique par une *relation fonctionnelle,* et non par un simple nombre.

Il est facile de vérifier que l'information (5.3) jouit, relativement aux arguments x et a, de toutes les propriétés mathématiques générales qui sont énoncées à la section 3*).

Il est également facile de voir que, dans la limite classique: lim h $= O$, la valeur de l'information (5.3) devient indépendante de O, et est donnée par (4.1).

---

*) Il convient cependant, là où des densités de probabilité figurent dans les énoncés, de les remplacer par des matrices de densité.

Supposons le système a isolé. Examinons l'évolution temporelle de l'information $I_x a$.

Dans la forme de HEISENBERG des équations du mouvement («HEISENBERG picture»), les opérateurs des grandeurs physiques du système isolé a évoluent selon des équations où figure un hamiltonien $\boldsymbol{H}(a)$ qui ne contient pas explicitement le temps. Par contre l'opérateur de densité $\boldsymbol{\varrho}^{a\,x}$ reste constant.

Il est facile de voir que, pour un O donné, l'information (5.3) varie en général au cours du temps. Le seul cas où l'information (5.3) se conserverait serait celui où les opérateurs qui constituent $\boldsymbol{O}$ seraient tous des constantes du mouvement.

Pour nous sortir de cette difficulté, introduisons alors à chaque instant t un nouvel ensemble maximum O' (t) de grandeurs physiques simultanément mesurables de a, auquel est associé un ensemble complet $\boldsymbol{O}'$ d'opérateurs commutables. Cet ensemble de grandeurs physiques O' (t) est défini à partir de O par la relation suivante entre les opérateurs correspondants:

$$\boldsymbol{O}' = e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{H}(a)\,t} \quad \boldsymbol{O}\, e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{H}(a)\,t} \tag{5.4}$$

On obtient alors facilement:

$$\frac{d}{d\,t} I_x\, a\big(O'(t)\big) = O \tag{5.5}$$

On peut exprimer le résultat (5.5) en disant que l'information, donnée au temps $t = O$ par la mesure de l'ensemble maximum O de grandeurs physiques de a, n'est plus donnée à un autre temps par la mesure de cet ensemble, mais bien par celle d'une autre ensemble maximum O' *).

Comme dans le cas classique (4.2), le résultat (5.5) précise l'idée commune et vague selon laquelle un système physique ne peut acquérir de l'information sans communication, sans interaction physique avec l'extérieur. Mais, pour s'apercevoir de cette conservation dans le cas quantique, il est nécessaire à des temps différents de mesurer des grandeurs physiques différentes du système. Si l'on mesure à des temps différents toujours le même ensemble maximum de grandeurs physiques (par exemple toujours les positions des constituants du système), on constate au contraire une variation apparente de l'information du système. Ce phénomène disparaît dans la limite classique.

*) Il est essentiel de bien voir que ce sont des ensembles de grandeurs physiques, et non les ensembles d'opérateurs correspondants, qui figurent comme arguments dans (5·3) et (5.5). Une grandeur physique est définie en indiquant les techniques expérimentales nécessaires à sa mesure. Il lui correspond au cours du temps différents opérateurs.

Pas plus que dans le cas classique (4.2), l'équation de conservation (5.5) n'exclut une dissipation possible de l'information.

Je tiens finalement à remercier le professeur D. RIVIER, ainsi que MM. C. PIRON et J. RUFENACHT, pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec eux sur le sujet de ce travail.

Lausanne, Laboratoire de Physique de l'Université.

Bibliographie

1) C. SHANNON: The Mathematical Theory of Communication (The University of Illinois Press, 1949), p. 64.
2) C. SHANNON: The Mathematical Theory of Communication (The University of Illinois Press, 1949), p. 18 à 22.
3) C. SHANNON: The Mathematical Theory of Communication (The University of Illinois Press, 1949), p. 99, et p. 114 à 117.
4) L. BRILLOUIN: Science and Information Theory (Academic Press, 1956), p. 11 à 20.
5) L. BRILLOUIN: Science and Information Theory (Academic Press, 1956), p. 9 et 10, et p. 294.
6) N. WIENER: Cybernetics, p. 76 à 79 (Wiley, Hermann & Cie., 1948).
7) P. A. M. DIRAC: The Principles of Quantum Mechanics (Oxford, 1947), p. 57.
8) R. C. TOLMAN: The Principles of Statistical Mechanics (Oxford, 1938), p. 327.
9) R. C. TOLMAN: The Principles of Statistical Mechnics (Oxford, 1938), p. 461, 468, 469.
10) J. VON NEUMANN: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton, 1955), p. 315.
11) J. VON NEUMANN: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton, 1955), p. 424 et 425.
12) W. M. ELSASSER, Phys. Rev. **52**, 997 (1937).
13) O. KLEIN, Z. Physik **72**, 767 et suivantes (1931).