Über den Zusammenhang zwischen den Wightmanfunktionen und den retardierten Kommutatoren

von **O. Steinmann**
Physikalisches Institut der ETH, Zürich

(4. XII. 1959)

Abstract. The connection between Wightman's vacuum expectation values and the retarded functions of LEHMANN *et al.* is investigated in the case of the four point function. Necessary and sufficient conditions for the existence of a Wightman function corresponding to a given $r(x_0, \ldots, x_3)$ are derived. The Fourier transform $\tilde{r}(p_1, p_2, p_3)$ of $r(x_0-x_1, \ldots, x_0-x_3)$ is a boundary value of an analytic function $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$, regular in a domain $\mathfrak{H}$ which is defined in the text. Certain boundary values of this function other than $\tilde{r}(p_j)$ satisfy a linear identity. This identity enlarges the domain of reglarity of $\tilde{r}$ still further.

The Fourier transform $\tilde{\tau}(p_1, p_2, p_3)$ of the time-ordered product $\tau(x_0-x_1, \ldots) = \langle TA(x_0) \ldots A(x_3) \rangle_0$ is shown to be everywhere a boundary value of the same analytic function $\tilde{r}(k_j)$.

For the n-point case it is shown that $W(x_0, \ldots, x_{n-1})$, if it exists at all, is uniquely determined by $r(x_0, \ldots., x_{n-1})$ up to terms of a very special kind.

1. Einleitung

In den letzten Jahren wurden in der Quantenfeldtheorie verschiedene Formalismen entwickelt, die zum Ziele haben, die Theorie einer exakten mathematischen Behandlung zugänglich zu machen. Sie versuchen durch Verzicht auf die Einführung der kanonischen Vertauschungsrelationen und eines explizit gegebenen Hamiltonoperators die bekannten Divergenzschwierigkeiten des herkömmlichen Formalismus zu vermeiden.

In diesen Versuchen spielen geeignet definierte Produkte von Feldoperatoren eine grosse Rolle. So hat A. WIGHTMAN die Vakuumerwartungswerte der Produkte von Feldoperatoren in beliebigen Raum-Zeit-Punkten $W_n(x_0, \ldots, x_n) = \langle A(x_0) \ldots A(x_n) \rangle_0$ zu den grundlegenden Grössen der Theorie gemacht[1]). Er studierte die Konsequenzen der Grundpostulate der Theorie (Lorentzinvarianz, Lokalität, Existenz des Vakuums, Definitheit der Metrik im Hilbertraum der Zustände) für diese Funktionen und zeigte, dass das System aller W_n die Theorie eindeutig festlegt. Leider kann der Teilchenbegriff (und damit im Zusammenhang die S-Matrix) nicht in einfacher Weise in den Formalismus eingeführt werden. Ausser einer neuen, sehr durchsichtigen Ableitung des CTP-Theorems[2]) und des Zusammenhangs zwischen Spin und Statistik[3]) hat deshalb die Wightmansche Theorie keine praktischen Erfolge aufzuweisen.

Anderseits wird versucht, die Theorie aufzubauen als Theorie der S-Matrix. Dabei bietet besonders die Formulierung der Kausalitätsforderung Schwierigkeiten. Kausalität wird üblicherweise gleichgesetzt mit der Lokalität der betrachteten Felder, und es sind gegenwärtig zahlreiche Bemühungen im Gange, aus der Lokalitätsforderung Eigenschaften der S-Matrix herzuleiten (Dispersionsrelationen). Bei diesen Bemühungen haben sich die von LEHMANN *et al.*[4]) diskutierten r-Funktionen als geeignete Hilfsmittel erwiesen. Es handelt sich dabei um die Vakuumerwartungswerte der sog. retardierten Kommutatoren (Definition siehe § 2) von n Feldoperatoren, also um mit den Wightmanfunktionen eng verwandte Grössen. Aus den oben angeführten Grundpostulaten der Theorie ergeben sich für die Fouriertransformierten der r-Funktionen Eigenschaften, die denjenigen der W-Funktionen bemerkenswert ähnlich sind. Der Zusammenhang mit der S-Matrix wird hergestellt mit Hilfe der sog. Asymptotenbedingung[5]), welche Aussagen über das Verhalten des Feldes im limes $t \to \pm \infty$ macht. Die positive Definitheit der Metrik ist eine Folge der Asymptotenbedingung und muss deshalb nicht besonders gefordert werden. Zusätzlich zu den erwähnten Eigenschaften, welche die individuellen Funktionen r_n betreffen, lässt sich aus dieser neuen Bedingung ein kompliziertes Gleichungssystem (GLZ Gl. 15) ableiten, das die verschiedenen r_n miteinander verknüpft. Wir wollen dieses System mit G bezeichnen. Die Funktionen r_n legen in ihrer Gesamtheit die Theorie wiederum eindeutig fest.

Es erhebt sich damit die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den beiden Funktionensystemen $\{W_n\}$ und $\{r_n\}$. Die Funktion r_n ist gemäss Definition auf algebraischem Wege aus W_n bestimmbar. Hat W_n die richtigen Eigenschaften, so erfüllt das daraus berechnete r_n alle Bedingungen, natürlich mit Ausnahme des Gleichungssystems G. Dieses wurde abgeleitet unter wesentlicher Benützung der Asymptotenbedingung und kann deshalb nicht aus den Eigenschaften der Wightmanfunktionen folgen. Ist umgekehrt ein System $\{r_n\}$ von r-Funktionen mit den richtigen Eigenschaften – inklusive G! – gegeben, so lässt sich der zugehörige Feldoperator und damit auch jede Wightmanfunktion berechnen. D. h. in diesem Falle sind die Definitionsgleichungen der r_n nach W_n auflösbar. Nun ist durch diese Gleichungen jedes r_n durch das zugehörige W_n bestimmt ohne Rücksicht auf die Funktionen anderer Variablenzahl. Stellt man also an die W_n nur diejenigen Forderungen, die sich auf die individuellen Funktionen beziehen (das sind alle mit Ausnahme eines aus der Definitheit der Metrik folgenden Systems von Ungleichungen), so müssen Lösbarkeitsbedingungen existieren, die sich auch nur auf die einzelnen r_n beziehen. Diese Bedingungen sollen in der vorliegenden Arbeit untersucht werden. Unser Problem ist somit das folgende: Unter welchen Voraussetzungen ist die Definitionsgleichung von r_n nach W_n auflösbar? Genügen dazu die bereits bekannten Eigenschaften von r_n (ohne G) und wenn nicht, welche zusätzlichen Forderungen muss man stellen?

Das Problem ist trivial im Falle $n = 1$. Im Falle $n = 2$ (d. h. für die Dreipunktfunktionen) wurde es gelöst durch R. JOST[6]). In beiden Fällen existiert eine algebraische Auflösungsformel, aus der man leicht alles Gewünschte ablesen kann. Neue Bedingungen für r_1 und r_2 ergeben sich nicht. Für höhere n ist eine algebraische Auflösung nicht mehr möglich; man muss zu analytischen Hilfsmitteln greifen. Wir werden hier nur den Fall $n = 3$ vollständig diskutieren. Es wird sich zeigen, dass die bereits bekannten Bedingungen für r_3 die Existenz von W_3 nicht garantieren, sondern zu ergänzen sind durch weitere Forderungen. Diese zusätzlichen Forderungen müssten sich natürlich auch aus dem Gleichungssystem G ableiten lassen, doch ist dies auf direktem Wege noch nicht versucht worden. Für allgemeines n werden wir zeigen, dass die Funktion W_n durch r_n im wesentlichen eindeutig bestimmt ist, falls sie überhaupt existiert.

2. Formulierung des Problems

Das in der Einleitung gestellte Problem soll hier genauer formuliert werden. Dazu sollen zuerst die Eigenschaften der Funktionen W_n und r_n zusammengestellt werden, soweit wir sie in der vorliegenden Arbeit benötigen.

Einfachheitshalber betrachten wir nur den Fall eines einzigen Skalarfeldes $A(x)$. Die Verallgemeinerung auf kompliziertere Fälle bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Die Theorie soll den üblichen Forderungen genügen:

1. Die Zustandsvektoren bilden einen Hilbertraum mit positiv-definiter Metrik.

2. Die Theorie ist invariant gegen die inhomogene eigentliche Lorentzgruppe.

3. Die Theorie ist lokal, d. h. $[A(x), A(y)] = 0$, falls $(x - y)$ raumartig ist.

4. Es existieren keine Zustände negativer Energie. Es existiert genau ein Zustand Ω (das Vakuum) mit der Energie 0. (Die Existenz des Energieoperators folgt aus der in 2. postulierten Translationsinvarianz.)

Die Lehmannsche Asymptotenbedingung[5]) oder ähnliche Forderungen werden wir hingegen nicht voraussetzen. Auch werden wir die Definitheit der Metrik nicht voll ausnützen.

Die *Wightmanfunktion* $W_n(x_0, \ldots, x_n)$ ist definiert durch

$$W_n(x_0, \ldots, x_n) \equiv \langle A(x_0) \ldots A(x_n) \rangle_0 \equiv (\Omega, A(x_0) \ldots A(x_n)\, \Omega). \quad (1)$$

W_n sowie auch alle im folgenden eingeführten Funktionen reeller Variablen sind aufzufassen als temperierte Distributionen im Sinne von L. SCHWARTZ[7]). Wir werden der Einfachheit halber die Funktionenschreibweise benützen, werden uns jedoch bei Bedarf auf die Theorie der Distributionen berufen, so dass die mathematische Exaktheit keinen Schaden leidet.

Aus den Postulaten 1. bis 4. ergeben sich folgende Eigenschaften der Wightmanfunktionen[1]):

a) $W_n(x_0, \ldots, x_n)$ ist nur abhängig von den n Variablen

$$\eta_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad (2)$$

also

$$W_n(x_0, \ldots, x_n) = W_n'(\eta_1, \ldots, \eta_n). \quad (3)$$

Ferner ist W_n invariant gegen die eigentliche homogene Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$:

$$W_n'(\eta_1, \ldots, \eta_n) = W_n'(\Lambda\eta_1, \ldots, \Lambda\eta_n) \text{ für alle } \Lambda \in L_+^\uparrow. \quad (4)$$

b) Die Fouriertransformierte

$$\tilde{W}_n'(q_1, \ldots, q_n) = \int \cdots \int d^4\eta_1 \ldots d^4\eta_n \; e^{-i\sum_k (q_k \eta_k)} \; W_n'(\eta_1, \ldots, \eta_n) \quad (5)$$

von W_n' ist retardiert in allen Variablen, d. h.

$$\tilde{W}_n'(q_1, \ldots, q_n) = 0, \quad \text{falls ein } q_k \notin \overline{V}_+, \quad (6)$$

wobei $\overline{V}_+$ den abgeschlossenen Vorkegel bedeutet.

c) Es gilt

$$W_n(\ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) = W_n(\ldots, x_{k+1}, x_k, \ldots), \quad (7)$$

falls $(x_k - x_{k+1})$ raumartig ist. Für W_n' wird diese Gleichung zu

$$W_n'(\ldots, \eta_{k-1}, \eta_k, \eta_{k+1}, \ldots) = W_n'(\ldots, \eta_{k-1} + \eta_k, -\eta_k, \eta_k + \eta_{k+1}, \ldots), \quad (8)$$

für raumartige η_k.

Daneben besteht noch ein kompliziertes System von Ungleichungen zwischen den verschiedenen W_n, das abgeleitet wird aus Postulat 1. Wir werden diese Ungleichungen jedoch nicht berücksichtigen.

Das *retardierte Produkt* von $n + 1$ Feldoperatoren wird definiert durch

$$R(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \sum_{\gamma_n} \theta(x_0, x_1, \ldots, x_n) \, [[\ldots[A(x_0), A(x_1)], \ldots], A(x_n)] \tag{9}$$

mit

$$\theta(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x_0^0 > x_1^0 > \ldots > x_n^0, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{10}$$

Die Summe in (9) ist über alle Permutationen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ zu erstrecken. Unsere Definition von R unterscheidet sich von der in LSZ gegebenen um einen Faktor $(-i)^n$. Da wir uns hier nicht mit Realitätseigenschaften befassen wollen, ist dieser Faktor unwesentlich.

Der Vakuumerwartungswert von $R(x_0, \ldots, x_n)$ heisst *retardierte Funktion* und wird mit r_n bezeichnet:

$$r_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = < R(x_0, x_1, \ldots, x_n) >_0. \tag{11}$$

Nach LSZ hat diese Funktion folgende Eigenschaften:

A. r_n ist translationsinvariant, also nur abhängig von den Variablen

$$\xi_k = x_0 - x_k, \quad k = 1, \ldots, n: \tag{12}$$

$$r_n(x_0, \ldots, x_n) = r_n'(\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{13}$$

(Wir werden im folgenden häufig r_n für r_n' und W_n für W_n' schreiben, wenn keine Gefahr von Verwechslungen besteht.)

r_n' ist invariant gegen $L_+^\uparrow$:

$$r_n'(\xi_1, \ldots, \xi_n) = r_n'(\Lambda\,\xi_1, \ldots, \Lambda\,\xi_n) \quad \text{für} \quad \Lambda \in L_+^\uparrow. \tag{14}$$

B. r_n' ist retardiert in allen Variablen, d. h.

$$r_n'(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \text{ falls ein } \xi_i \notin V_+. \tag{15}$$

C. r_n' ist symmetrisch in allen Variablen, d. h.

$$r_n'(\xi_1, \ldots, \xi_n) = r_n'(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}), \tag{16}$$

wenn $(i_1, \ldots, i_n)$ eine Permutation der Indizes $(1, \ldots, n)$ ist.

Man erkennt sofort die Analogie der Bedingungen A und B zu den Eigenschaften a) und b) der Wightmanfunktion. Auch die Eigenschaften c) und C) entsprechen sich in einem gewissen Sinne.

Das in der Einleitung erwähnte Gleichungssystem G werden wir hier nicht berücksichtigen. Hingegen werden wir eine darin enthaltene schwächere Bedingung verwenden, welche auch ohne Benützung der

Asymptotenbedingung hergeleitet werden kann. Diese Bedingung soll hier nur für den Fall $n = 3$ angegeben werden, da sie für uns nur in diesem Falle wichtig ist.

Wir gehen aus von der Operatoridentität (GLZ Gl. 11):

$$\left.\begin{aligned} &R(x_0, x_1, x_2, x_3) - R(x_1, x_0, x_2, x_3) = \\ &= - [R(x_1, x_2, x_3), A(x_0)] + [R(x_0, x_2, x_3), A(x_1)] - \\ &- [R(x_1, x_2), R(x_0, x_3)] - [R(x_1, x_3), R(x_0, x_2)]. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Für die Fouriertransformierten der Vakuumerwartungswerte der rechts stehenden Terme lassen sich auf Grund unserer Voraussetzungen gewisse Trägeraussagen machen. Ihre Herleitung entspricht der Herleitung von Gleichung (6) (aus welcher sie übrigens auch auf direktem Wege gefolgert werden könnten) und soll hier für den ersten Term kurz skizziert werden:

$$< [R(x_1, x_2, x_3), A(x_0)] >_0 = < R(\ldots)\, A(x_0) >_0 - < A(x_0)\, R(\ldots) >_0 \quad (18)$$

Sei $U(a)$ der zur Translation $x' = x + a$ gehörige unitäre Operator des Hilbertraumes. Dann gilt

$$A(x) = U(x)\, A(0)\, U(- x). \quad (19)$$

$U(a)$ besitzt die Spektralzerlegung

$$U(a) = \int e^{ipa}\, dE(p).$$

Wegen der Nichtexistenz negativer Energien verschwindet die vierdimensionale Zerlegung der Einheit $E(p)$, falls $p \notin \overline{V}_+$.
Also:

$$\begin{aligned} &\int d^4 x_0\, e^{-ip_0 x_0} (\Omega, R(\ldots)\, A(x_0)\, \Omega) \\ &= \int d^4 x_0\, e^{-ip_0 x_0} (\Omega, R(\ldots)\, U(x_0)\, A(0)\, \Omega) \\ &= \left(\Omega, R(\ldots) \int d^4 x_0\, e^{-ip_0 x_0} \int e^{ipx_0}\, dE(p)\, A(0)\, \Omega\right) \\ &= (2\pi)^4 \left(\Omega, R(\ldots) \int \delta(p - p_0)\, dE(p)\, A(0)\, \Omega\right) \\ &= 0, \text{ falls } p_0 \notin \overline{V}_+. \end{aligned}$$

Genau gleich zeigt man, dass die Fouriertransformierte des zweiten Terms in (18) verschwindet, falls $p_0 \notin \overline{V}_-$. Analoge Überlegungen lassen sich für die andern Glieder der rechten Seite von (17) anstellen.

Definiert man

$$\tilde{r}_3(p_0, \ldots p_3) = (2\pi)^{-4} \int \cdots \int d^4 x_0 \ldots d^4 x_3 \, e^{-i\sum_0^3 p_k x_k} \, r_3(x_0, \ldots, x_3) \tag{20}$$

$$\tilde{r}'_3(p_1, p_2, p_3) = \iiint d^4\xi_1 \, d^4\xi_2 \, d^4\xi_3 \, e^{i\Sigma p_k \xi_k} \, r'_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{21}$$

$$\tilde{r}_3(p_0, \ldots, p_3) = \delta(p_0 + \ldots + p_3) \, \tilde{r}'_3(p_1, p_2, p_3), \tag{22}$$

so erhält man schliesslich aus diesen Überlegungen:

D.
$$\left.\begin{aligned} \tilde{r}_3(p_0, p_1, p_2, p_3) - \tilde{r}_3(p_1, p_0, p_2, p_3) &= 0 \\ \tilde{r}'_3(p_1, p_2, p_3) - \tilde{r}'_3(p_0, p_2, p_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

falls die vier Vektoren p_0, p_1, $(p_1 + p_2)$, $(p_1 + p_3)$ alle raumartig sind.

Dabei bedeutet

$$p_0 = -p_1 - p_2 - p_3. \tag{24}$$

Analoge Bedingungen kann man leicht auch für allgemeines n herleiten.

Jetzt können wir unser Problem exakt formulieren:

Gegeben sei eine Funktion r_n mit den Eigenschaften A bis D. Existiert dann eine Funktion W_n mit den Eigenschaften a), b), c) so, dass das daraus gemäss (9) und (11) berechnete r_n das vorgegebene ist? Wenn nicht, welche zusätzlichen Bedingungen muss r_n erfüllen, damit ein solches W_n existiert?

Es ist noch zu bemerken, dass r_n durch (9) und (11) nicht eindeutig festgelegt ist, da das Produkt einer Distribution mit einer Sprungfunktion im allgemeinen nicht eindeutig definierbar ist (z. B. ist $\Theta(x)\,\delta(x)$ unbestimmt). Mehrdeutigkeiten können allerdings nur auftreten in den Punkten, in denen zwei der x_i^0 zusammenfallen. Wir werden uns mit dieser Schwierigkeit nicht weiter befassen.

3. Eindeutigkeit der Lösung

Wir werden beweisen, dass die Wightmanfunktion W_n durch die retardierte Funktion r_n im wesentlichen eindeutig bestimmt ist, falls sie überhaupt existiert. Die Eindeutigkeit besteht bis auf Terme einer speziellen Art, deren Fouriertransformierte nämlich ausser dem Faktor $\delta\,(p_0 + \ldots + p_n)$ noch andere δ-artige Faktoren enthalten. Wir werden diese Unbestimmtheit am Ende dieses Paragraphen noch genauer studieren.

Da wir es mit einem linearen Problem zu tun haben, genügt es, zu zeigen, dass aus $r_n \equiv 0$ das Verschwinden von W_n folgt (bis auf Terme der angegebenen Art). Wir führen den Beweis in zwei Schritten, indem wir erst von r_n zum mehrfachen Kommutator

$$K_n(x_0, \ldots, x_n) = < [\ldots [A(x_0), A(x_1)] \ldots, A(x_n)] >_0 \tag{1}$$

übergehen und dann von K_n zu W_n.

K_n ist nach Definition eine Summe von 2^n W_n-Funktionen und soll die Eigenschaften besitzen, die sich aus dieser Tatsache gemäss den Bedingungen a) bis c) aus § 2) ergeben. Es handelt sich dabei um Trägereigenschaften im x- und im p-Raum sowie um gewisse aus der Jacobi-Identität folgende Beziehungen.

1. Schritt: Es ist zu zeigen, dass aus dem Verschwinden von r_n das Verschwinden von K_n folgt*).

Wir betrachten die Funktionen

$$s_k(x_0, \ldots, x_n) \equiv < [\ldots [R(x_0, \ldots, x_k), A(x_{k+1})] \ldots, A(x_n)] >_0. \tag{2}$$

Speziell:

$$\left.\begin{aligned} s_n(x_0, \ldots, x_n) &= r_n(x_0, \ldots, x_n) \\ s_0(x_0, \ldots, x_n) &= K_n(x_0, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Können wir zeigen, dass mit s_k auch s_{k-1} identisch verschwindet, so ist der gewünschte Beweis erbracht.

Aus der Definition (2.9) von R entnehmen wir:

$$\left.\begin{aligned} &\theta(x_0 - x_k)\, \theta(x_1 - x_k) \ldots \theta(x_{k-1} - x_k)\, s_k(x_0, \ldots, x_n) \equiv \\ &\equiv \theta\,(x_0 - x_k)\, \theta(x_1 - x_k) \ldots \theta(x_{k-1} - x_k)\, s_{k-1}(x_0, \ldots, x_n) \\ &\qquad \theta(x) \equiv \begin{cases} 1 \text{ falls } x^0 > 0 \\ 0 \text{ falls } x^0 < 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ist also $s_k \equiv 0$, so ist

$$s_{k-1}(x_0, \ldots, x_n) = 0, \text{ falls } x_k^0 < x_j^0 \text{ für alle } j < k. \tag{5}$$

Ferner folgt aus der Lokalitätsbedingung

$$K_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ für raumartige } (x_0 - x_1) \tag{6}$$

durch mehrfache Anwendung von Jacobi-Identitäten:

$$s_{k-1}(x_0, \ldots, x_n) = 0, \text{ falls } (x_k - x_i)^2 < 0 \text{ für alle } j < k. \tag{7}$$

Wir gehen wieder zu den Variablen $\xi_i = x_0 - x_i$ über:

$$s_{k-1}\,(x_0, \ldots, x_n) = s'_{k-1}\,(\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{8}$$

Sei

$$t = \operatorname*{Min}_{j<k}\,(\xi_j^0),\ T \text{ der Vektor } (-\,2\,t, 0, 0, 0).$$

---

*) Der hier gegebene Beweis folgt im wesentlichen einer unveröffentlichten Arbeit von R. Jost. Für die Erlaubnis zur Benützung dieser Arbeit bin ich Herrn Prof. Jost zu Dank verpflichtet.

Unter Berücksichtigung der Retardierung von R erhält man aus (5) und (7):

$$s'_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \quad \text{falls } (T - \xi_k) \notin \overline{V}_+. \tag{9}$$

Wir betrachten nun die Fouriertransformierte $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, p_k, \ldots, p_n)$ von s'_{k-1} bezüglich der Variablen $\xi_k, \ldots, \xi_n$. Die übrigen Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ betrachten wir als feste Parameter. Nach L. SCHWARTZ[8]) ist σ wegen (9) in p_k Randwert einer im Gebiet $(\mathrm{Im}\, p_k) \in V_-$ analytischen Funktion $F(p_k)$, die natürlich noch von den reellen Parametern $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n$ abhängt.

Andererseits ist s_{k-1} eine Summe von Termen der Form

$$< A(x_{i_1}) \ldots A(x_{i_e})\, R(x_0, \ldots, x_{k-1})\, A(x_k)\, A(x_{j_1}) \ldots A(x_{j_m}) >_0$$

oder der daraus durch Vertauschung von R und $A(x_k)$ hervorgehenden Form. Auf gleiche Weise wie beim Beweis von (2.23) zeigt man, dass die Fouriertransformierte bezüglich der Variablen $x_k, \ldots, x_n$ eines solchen Terms verschwindet, falls nicht $(p_k + p_{j_1} + \ldots + p_{j_m}) \in \overline{V}_+$, resp. $(p_k + p_{i_1} + \ldots + p_{i_e}) \in \overline{V}_-$. Die hier auftretenden p_{i_ν} resp. p_{j_ν} stammen aus der Reihe $p_{k+1}, \ldots, p_n$. Ist diese Reihe fest vorgegeben, so existiert immer ein p_k so, dass alle Bedingungen der angegebenen Art in einer ganzen Umgebung dieses p_k verletzt sind, z. B. $p_k = (0, P, 0, 0)$ mit genügend grossem P. Das heisst zu beliebig vorgegebenen $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n$ existiert immer eine reelle p_k-Umgebung, in der die Fouriertransformierte von s_{k-1} bezüglich $x_k, \ldots, x_n$ verschwindet, und damit auch die Funktion σ, die daraus durch Multiplikation mit dem Faktor $e^{i x_0 (p_k + \cdots + p_n)}$ entsteht. Daraus folgt jedoch, dass die analytische Funktion $F(p_k)$ identisch verschwindet, also

$$s'_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = s_{k-1}(x_0, \ldots, x_n) \equiv 0, \tag{10}$$

womit der gewünschte Beweis erbracht ist.

2. Schritt: Es bleibt uns noch zu zeigen, dass mit K_n auch W_n verschwindet.

Die Fouriertransformierte $\tilde{W}_n$ der Wightmanfunktion W_n ist von der Form

$$\left.\begin{aligned} \tilde{W}_n(p_0, \ldots, p_n) &= (2\pi)^{-4} \int d^{4(n+1)} x\, e^{-i \Sigma p_k x_k}\, W_n(x_0, \ldots, x_n) \\ &= \delta(p_0 + \ldots + p_n)\, \tilde{W}'_n\,(p_1 + \ldots + p_n, p_2 + \ldots + p_n, \ldots, p_n), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

wobei $\tilde{W}'_n$ definiert ist durch (2.5). Nach (2.6) gilt somit:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{W}_n(p_0, \ldots, p_n) = 0, \text{ falls } & p_0 + \ldots + p_n \neq 0 \\ \text{oder } & (p_k + p_{k+1} + \ldots + p_n) \notin \overline{V}_+ \text{ für ein } k \geqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Natürlich enthält auch $\tilde{K}_n(p_0, \ldots, p_n)$ den Faktor $\delta\,(p_0 + \ldots + p_n)$. Sei nun $\tilde{K}_n(p_0, \ldots, p_n) \equiv 0$. Wir führen die Funktionen

$$< A(x_0) \ldots A(x_m)\,[\ldots[A(x_{m+1}), A(x_{m+2})], \ldots, A(x_{m+k})], A(x_{m+k+1}) \ldots A(x_n) >_0$$

ein und bezeichnen ihre Fouriertransformierten durch das Symbol

$$(p_0, \ldots, p_m[p_{m+1}, \ldots, p_{m+k}]\,p_{m+k+1}, \ldots, p_n).$$

Diese Ausdrücke sollen die Träger haben, die ihnen als Summe von Wightmanfunktionen nach (12) zukommen.

Speziell ist

$$\left.\begin{aligned} [p_0, \ldots, p_n] &\equiv \tilde{K}_n(p_0, \ldots, p_n) \equiv 0, \\ (p_0, \ldots, p_n) &\equiv \tilde{W}_n(p_0, \ldots, p_n). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Sei für ein festes k und alle m

$$(p_0, \ldots, p_{m-1}\,[p_m, \ldots, p_{m+k}]\,p_{m+k+1}, \ldots, p_n) \equiv 0. \tag{14}$$

Nach Definition gilt dann

$$\begin{aligned} &(\ldots, p_{m-1}\,[p_m, \ldots, p_{m+k-1}]\,p_{m+k}, \ldots) \\ &- (\ldots, p_{m-1}, p_{m+k}\,[p_m, \ldots, p_{m+k-1}]\,p_{m+k+1}, \ldots) \\ &= (\ldots, p_{m-1}\,[p_m, \ldots, p_{m+k}]\,p_{m+k+1}, \ldots) = 0. \end{aligned}$$

Durch $(n - k + 1)$-maliges Anwenden dieser Beziehung erhält man

$$\left.\begin{aligned} ([p_0, \ldots, p_{k-1}]\,p_k, \ldots, p_n) &= (p_k\,[p_0, \ldots, p_{k-1}]\,p_{k+1}, \ldots, p_n) \\ &= \cdots \\ &\vdots \\ &= (p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n\,[p_0, \ldots, p_{k-1}]). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Das erste Glied dieser Folge ist höchstens von null verschieden, falls $(p_k + \cdots + p_n) \in V_+$. Es ist nämlich eine Summe von Wightmanfunktionen der Argumente $p_0, \ldots, p_n$, wobei überall die Argumente $p_k, \ldots, p_n$ am Schluss stehen. Das letzte Glied in (15) ist höchstens von null verschieden, falls $(p_0 + \cdots + p_{k-1}) \in V_+$. Beide Terme sind natürlich zugleich von null verschieden, was also nur möglich ist, wenn $(p_0 + \ldots + p_{k-1}) + (p_k + \cdots + p_n) = (p_0 + \cdots + p_n) \in V_+$. Das widerspricht aber der Trägerbedingung $p_0 + \cdots + p_n = 0$, es sei denn, die Summen $p_0 + \ldots + p_{k-1}$ und $p_k + \cdots + p_n$ seien schon einzeln gleich null. Diese Ausnahmepunkte geben Anlass zu Termen der oben erwähnten Art, die den Faktor $\delta(p_k + \ldots + p_n)$ oder Ableitungen davon enthalten. Bis auf solche Glieder gilt also

$$(p_0, \ldots, p_{m-1} [p_m, \ldots, p_{m+k-1}] p_{m+k}, \ldots, p_n) = 0 \text{ für alle } m,$$

d. h. (14) gilt auch für $k - 1$.

Wegen (13) erhält man durch n-malige Anwendung dieser Betrachtung die behauptete Beziehung:

$$\tilde{W}_n(p_0, \ldots, p_n) = 0$$

bis auf Terme der erwähnten speziellen Form.

Diese Ausnahmeterme haben wir nun noch genauer zu diskutieren. Dazu definieren wir

$$\begin{gathered} V_0(x_0) = W_0(x_0) = \text{const.} \\ V_n(x_0, \ldots, x_n) = W_n(x_0, \ldots, x_n) - \sum V_{\alpha-1}(x_{i_1} \ldots x_{i\alpha}) \ldots V_{\beta-1}(x_{j_1} \ldots x_{j\beta}). \end{gathered} \tag{16}$$

Die Summe Σ ist dabei über alle Aufteilungen der Argumente $(x_0, \ldots, x_n)$ in mindestens zwei nicht leere Mengen zu erstrecken. Innerhalb jeder der auftretenden V-Funktionen sind die Argumente in derselben Reihenfolge wie im betrachteten W_n anzuordnen. Gleichung (16) erlaubt die rekursive Berechnung aller V_n aus den W_k mit $k \leqslant n$.

Wir bilden nun

$$\left.\begin{aligned} & V_n(x_0, \ldots [x_i, x_{i+1}], \ldots) \\ \equiv\ & V_n(x_0, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots) - V_n(x_0, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots) \\ =\ & W_n(x_0, \ldots [x_i, x_{i+1}], \ldots) - \sum V_\alpha(\ldots [x_i, x_{i+1}], \ldots) \ldots V_\beta(\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die Terme in Σ, in denen x_i, x_{i+1} in verschiedenen Faktoren auftreten, fallen heraus. Durch eine evidente Verallgemeinerung dieser Betrachtung erhält man

$$\begin{aligned} V_n([x_0, \ldots, x_k], \ldots, x_n) &= W_n([x_0, \ldots, x_k], \ldots, x_n) - \sum V_\alpha([x_0, \ldots x_k] \ldots) \ldots V_\beta(\ldots) \\ &= W_n([x_0, \ldots, x_k], \ldots, x_n) - \sum_{\alpha+\beta=n-1} V_\alpha([x_0, \ldots x_k] \ldots) W_\beta(\ldots), \end{aligned} \tag{18}$$

wobei in der zweiten Zeile die Summe Σ nun über alle Aufteilungen der Argumente $x_{k+1}, \ldots, x_n$ in zwei Teilmengen läuft (wovon die im V-Faktor auftretende auch die leere Menge sein darf). Speziell:

$$V_n([x_0, \ldots, x_n]) = W_n([x_0, \ldots, x_n]). \tag{19}$$

Im p-Raum gilt

$$\tilde{V}_n([p_0, \ldots, p_k] p_{k+1}, \ldots, p_n) = 0, \text{ falls } p_0 + \ldots + p_k = 0, \ n > k \tag{20}$$

wie man mit Hilfe von (18) durch Induktion nach n leicht beweist. Sei nämlich $p_0 + \cdots + p_k = 0$ und sei (20) für $\tilde{V}_m$, $m < n$ erfüllt. Dann wird (18) zu

$$\tilde{V}_n([p_0, \ldots, p_k] \ldots p_n) = \tilde{W}_n([p_0, \ldots, p_k] \ldots p_n)$$
$$- \tilde{W}_k([p_0, \ldots, p_k]) \, \tilde{W}_{n-k-1} (\ldots p_n).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung entsteht aber aus $\tilde{W}_n([_{p_0} - p_k] \ldots p_n)$ durch Einschieben eines vollständigen Systems von Zwischenzuständen zwischen den Klammerausdruck und $\tilde{A}(p_{k+1})$ und Weglassen des zum Vakuum gehörigen Terms und hat somit die behauptete Trägereigenschaft.

Gleichung (15) gilt sowohl für $\tilde{W}_n$ als auch für $\tilde{V}_n$. $\tilde{V}_n$ ist aber im Gegensatz zu $\tilde{W}_n$ durch das dort angegebene Verfahren eindeutig bestimmbar, da es in den kritischen Punkten $p_k + \ldots + p_n = 0$ verschwindet. Also ist $\tilde{V}_n(p_0, \ldots, p_n)$ durch $\tilde{K}_n$ eindeutig festgelegt. W_n ist aber nach (16) durch die V_k mit $k \leqslant n$ ausdrückbar, also ist W_n durch die K_k mit $k \leqslant n$ eindeutig bestimmt.

4. Der Zusammenhang zwischen K_3 und W_3

Die Frage nach der Existenz von r_n ist im allgemeinen Fall schwieriger zu klären als die Eindeutigkeitsfrage. Wie wir schon in der Einleitung erwähnten, können für $n = 1$ und 2 algebraische Auflösungsformeln gegeben werden, welche man jedoch nicht auf höhere n verallgemeinern kann.

Wir werden hier nur den Fall $n = 3$ untersuchen. Das angewandte Verfahren scheint prinzipiell auf höhere n übertragbar zu sein, wird jedoch sehr unübersichtlich. Wesentlich neue Erscheinungen sind bei einer solchen Verallgemeinerung nicht zu erwarten.

Wie beim Eindeutigkeitsbeweis führen wir den mehrfachen Kommutator

$$K(x_0, \ldots, x_3) = < [[[A(x_0), A(x_1)], A(x_2)], A(x_3)] >_0 \tag{1}$$

als Zwischengrösse ein. (Der Index $n = 3$ in r_n, K_n, W_n soll in Zukunft weggelassen werden.)

In diesem Paragraphen soll der Zusammenhang zwischen K und W untersucht werden. Wir werden zeigen, dass folgende Bedingungen für K notwendig und hinreichend für die Existenz eines $W(x_0, \ldots, x_3)$ mit den Eigenschaften a) bis c) aus § 2 sind:

α) $K(x_0, \ldots, x_3)$ ist invariant gegen die inhomogene eigentliche Lorentzgruppe.

β) Die Fouriertransformierte $\tilde{K}$ von K hat folgende Trägereigenschaften:

$$\tilde{K}(p_0, \ldots, p_3) = 0, \text{ falls } p_3^2 < 0 \tag{2}$$

$$\tilde{K}(p_0, p_1, p_2, p_3) - \tilde{K}(p_0, p_1, p_3, p_2) = 0, \text{ falls } (p_2 + p_3)^2 < 0 \tag{3}$$

γ)
$$K(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \text{ falls } (x_0 - x_1)^2 < 0. \tag{4}$$

δ) Es gelten die Identitäten

$$K(x_0, x_1, x_2, x_3) + K(x_1, x_0, x_2, x_3) = 0 \tag{5}$$

$$K(x_0, x_1, x_2, x_3) + K(x_1, x_2, x_0, x_3) + K(x_2, x_0, x_1, x_3) = 0 \tag{6}$$

$$K(x_0,x_1,x_2,x_3) - K(x_0,x_1,x_3,x_2) = K(x_2,x_3,x_1,x_0) - K(x_2,x_3,x_0,x_1). \tag{7}$$

Dass diese Bedingungen notwendig sind, erkennt man sofort, wenn man K gemäss (1) als Summe von acht Wightmanfunktionen schreibt. Gleichung (3) wird hergeleitet unter Benützung der Jacobischen Identität

$$\begin{aligned} &< [[[A(x_0), A(x_1)], A(x_2)], A(x_3)] >_0 \\ &- < [[[A(x_0), A(x_1)], A(x_3)], A(x_2)] >_0 \\ &= < [[A(x_0), A(x_1)], [A(x_2), A(x_3)]] >_0 . \end{aligned}$$

Diese Identität führt durch zweimalige Anwendung auch zu (7).

Ausser (2), (3) und (4) gibt es natürlich noch weitere Trägerbedingungen für $\tilde{K}$ und K, doch lassen sich diese aus den hier gegebenen mit Hilfe der Identitäten (5) bis (7) herleiten.

Dass die angegebenen Bedingungen hinreichend sind, zeigen wir durch den Ausbau der beim Eindeutigkeitsbeweis angewandten Methode zu einem Konstruktionsverfahren. Wir verwenden die im § 3 eingeführte Bezeichnungsweise.

Sei $K(x_0, \ldots, x_3)$ mit den Eigenschaften α) bis δ) gegeben. Die Zahl der darin auftretenden Kommutatoren wird unter Ausnützung der postulierten p-Raum-Eigenschaften sukzessive abgebaut durch die Definitionen

$$[p_0, \ldots, p_3] = \tilde{K}(p_0, \ldots, p_3) \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} ([p_0, p_1, p_2]\, p_3) &= \theta(p_3)\, [p_0, \ldots, p_3] \\ (p_3\, [p_0, p_1, p_2]) &= -\,\theta(-\,p_3)\, [p_0, \ldots, p_3] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} ([p_0, p_1]\, p_2, p_3) &= \theta(p_2 + p_3) \{([p_0, p_1, p_2]\, p_3) + (p_2\, [p_0, p_1, p_3])\} \\ (p_2\, [p_0, p_1]\, p_3) &= \theta(p_2 + p_3)\, (p_0\, [p_1, p_2, p_3]) - \\ &\quad - \theta(-\,p_2 - p_3)\, ([p_0, p_1, p_2]\, p_3) \\ (p_2, p_3\, [p_0, p_1]) &= -\,\theta(-\,p_2 - p_3) \{([p_0, p_1, p_2]\, p_3) + (p_2\, [p_0, p_1, p_3])\} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{W}(p_0, \ldots, p_3) \\ &= (p_0, \ldots, p_3) \\ &= \theta(p_1+p_2+p_3)\{([p_0, p_1]\,p_2, p_3) + (p_1\,[p_0, p_2]\,p_3) + (p_1, p_2\,[p_0, p_3])\}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Die so definierten Funktionen erfüllen die Gleichungen

$$([p_0, p_1, p_2]\,p_3) - (p_3\,[p_0, p_1, p_2]) = [p_0, \ldots, p_3] \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} ([p_0, p_1]\,p_2, p_3) - (p_2\,[p_0, p_1]\,p_3) &= ([p_0, p_1, p_2]\,p_3) \\ (p_2\,[p_0, p_1]\,p_3) - (p_2, p_3\,[p_0, p_1]) &= (p_2\,[p_0, p_1, p_3]) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$(p_0, p_1, p_2, p_3) - (p_1, p_0, p_2, p_3) = ([p_0, p_1]\,p_2, p_3) \text{ usw.}, \quad (14)$$

d. h. das aus $\tilde{W}$ (Gl. 11) gemäss (1) berechnete $\tilde{K}$ ist tatsächlich das vorgegebene. Wir haben noch zu verifizieren, dass das so bestimmte W die Bedingungen a), b), c) erfüllt. Dabei beginnen wir mit Bedingung b), d. h. mit den p-Raum-Trägereigenschaften:

Wegen (2) ist

$$\left.\begin{aligned} ([p_0, p_1, p_2]\,p_3) &= 0, \text{ falls } p_3 \notin \overline{V}_+ \\ (p_3\,[p_0, p_1, p_2]) &= 0, \text{ falls } p_3 \notin \overline{V}_-. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Sei $p_3 \in \overline{V}_+$, $p_2 \notin \overline{V}_-$, $(p_2 + p_3) \notin \overline{V}_+$, also auch $p_2 \notin \overline{V}_+$, $(p_2 + p_3) \notin \overline{V}_-$. Dann, mit Hilfe von (2) und (3):

$$\left.\begin{aligned} &([p_0, p_1, p_2]\,p_3) \\ &= \theta(p_3)\{[p_0, p_1, p_2, p_3] + [p_0, p_1, p_3, p_2] - [p_0, p_1, p_3, p_2]\} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Analog:

$$(p_3\,[p_0, p_1, p_2]) = 0, \text{ falls } p_2 \notin \overline{V}_+ \text{ und } (p_2 + p_3) \notin \overline{V}_-. \quad (17)$$

Aus (15) und (17) folgt:

$$([p_0, p_1]\,p_2, p_3) = 0 \text{ falls } p_3 \notin \overline{V}_+. \quad (18)$$

Weiter:

$$\left.\begin{aligned} &([p_0, p_1]\,p_2, p_3) - ([p_0, p_1]\,p_3, p_2) \\ &= \theta(p_2 + p_3)\{[p_0, p_1, p_2, p_3] - [p_0, p_1, p_3, p_2]\} \\ &= 0, \text{ falls } (p_2 + p_3) \notin \overline{V}_+, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

nach (3). Also

$$([p_0, p_1]\,p_2, p_3) = 0 \text{ falls } p_3 \in \overline{V}_+, (p_2 + p_3) \notin \overline{V}_+, \quad (20)$$

da dann auch $p_2 \notin \overline{V}_+$. Genau gleich zeigt man:

$$(p_2, p_3 [p_0, p_1]) = 0 \text{ falls } p_2 \notin \overline{V}_- \text{ oder } (p_2 + p_3) \notin \overline{V}_-. \tag{21}$$

Ferner:

$$\left.\begin{aligned}(p_2 [p_0, p_1] p_3) &= ([p_0, p_1] p_2, p_3) - ([p_0, p_1, p_2] p_3) = 0 \text{ falls } p_3 \notin \overline{V}_+ \\ &= (p_2 [p_0, p_1, p_3]) + (p_2, p_3 [p_0, p_1]) = 0 \text{ falls } p_2 \notin \overline{V}_-.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Sei $p_3 \in \overline{V}_+$, $p_2 \in \overline{V}_-$, aber $(p_1 + p_3) \notin \overline{V}_+$, $(p_1 + p_2) \notin \overline{V}_-$. Dann auch $p_1^2 < 0$, $p_0^2 < 0$. Somit, unter Ausnützung von (6):

$$\begin{aligned}&(p_2 [p_0, p_1] p_3) \\ &= ([p_0, p_1] p_2, p_3) + ([p_1, p_2, p_0] p_3) + ([p_2, p_0, p_1] p_3) \\ &\qquad\qquad = 0, \text{ falls } (p_2 + p_3) \notin \overline{V}_+ \\ &= -(p_2 [p_1, p_3, p_0]) - (p_2 [p_3, p_0, p_1]) + (p_2, p_3 [p_0, p_1]) \\ &\qquad\qquad = 0, \text{ falls } (p_2 + p_3) \notin \overline{V}_-,\end{aligned}$$

d. h.

$$(p_2 [p_0, p_1] p_3) = 0, \text{ falls } (p_1 + p_3) \notin \overline{V}_+ \text{ und } (p_1 + p_2) \notin \overline{V}_-. \tag{23}$$

Sei $p_3 \in \overline{V}_+$, $(p_2 + p_3) \in \overline{V}_+$, $p_0 \notin \overline{V}_-$, $p_1 \notin \overline{V}_-$, also $(p_1 + p_2) \notin \overline{V}_+$, $(p_1 + p_3) \notin \overline{V}_-$, $p_1 \notin \overline{V}_+$, $p_0 \notin \overline{V}_-$. Dann:

$$\left.\begin{aligned}&([p_0, p_1] p_2, p_3) \\ &= ([p_0, p_1] p_2, p_3) - (p_2, p_3 [p_0, p_1]) \\ &= ([p_0, p_1, p_2] p_3) + (p_2 [p_0, p_1, p_3]) \\ &= [p_0, p_1, p_2, p_3] - [p_0, p_1, p_3, p_2] + ([p_0, p_1, p_3] p_2) \\ &= [p_2, p_3, p_1, p_0] - [p_2, p_3, p_0, p_1] - ([p_1, p_3, p_0] p_2) - ([p_3, p_0, p_1] p_2) \\ &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wobei der Reihe nach die Gleichungen (21), (13), (9), (12), (7), (6), (2) und (16) verwendet wurden.

Also

$$([p_0, p_1] p_2, p_3) = 0, \text{ falls } p_0 \notin \overline{V}_- \text{ und } p_1 \notin \overline{V}_- \tag{25}$$

und analog

$$(p_2, p_3 [p_0, p_1]) = 0, \text{ falls } p_0 \notin \overline{V}_+ \text{ und } p_1 \notin \overline{V}_+. \tag{26}$$

Schliesslich:

$$(p_0, \ldots, p_3) = 0, \text{ falls } p_3 \notin \overline{V}_+ \tag{27}$$

wegen (18) und (26);

$$\left.\begin{aligned}(p_0, \ldots, p_3) &= (p_0, p_1, p_3, p_2) + (p_0, p_1[p_2, p_3]) \\ &= 0, \text{ falls } p_3 \in \overline{V}_+, (p_2 + p_3) \notin \overline{V}_+\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

wegen (27) ($p_2 \notin \overline{V}_+$!) und (21); und endlich

$$\begin{aligned}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= (p_0[p_1, p_2]p_3) + (p_0, p_2[p_1, p_3]) + (p_0, p_2, p_3, p_1) \\ &= 0, \text{ falls } p_3 \in \overline{V}_+, (p_2 + p_3) \in \overline{V}_+, (p_1 + p_2 + p_3) \notin \overline{V}_+ \quad (29)\end{aligned}$$

wegen (22), (21) und (27) ($p_1 \notin \overline{V}_+$).

(27), (28) und (29) sind aber genau die Bedingungen, die $\tilde{W}$ nach (3.12) erfüllen muss. Unser $\tilde{W}$ aus Gleichung (11) erfüllt somit die Bedingung b) aus § 2.

Translationsinvarianz besteht trivialerweise, da ja der Faktor $\delta(p_0 + \ldots + p_3)$ unverändert durch die ganze Konstruktion mitwandert. Wegen der eben hergeleiteten Trägereigenschaften können in den Definitionen (8), (9), (10) alle auftretenden Θ-Funktionen durch die charakteristische Funktion des Vorkegels mit denselben Argumenten ersetzt werden. Wegen Voraussetzung α) ist also $\tilde{W}$ (und damit W) invariant gegen $L_+^\uparrow$, womit auch Bedingung a) verifiziert ist.

Die in (9) und (10) auftretenden Θ-Funktionen enthalten nur die Variablen p_2 und p_3. Die x-Raum-Eigenschaft (4) pflanzt sich deshalb ungestört fort, d. h. Rücktransformation in den x-Raum ergibt

$$([x_0, x_1]x_2, x_3) = (x_2[x_0, x_1]x_3) = (x_2, x_3[x_0, x_1]) = 0 \quad (30)$$

wenn $(x_0 - x_1)$ raumartig ist. Das ist aber Gleichung (2.7), somit ist auch Bedingung c) erfüllt.

Zum Schlusse sei noch die explizite Auflösungsformel angegeben, die sich durch Einsetzen von (9) und (10) in (11) ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{W}(p_0, \ldots, p_3) = \theta(p_3)\, \theta\,(p_2 + p_3)\, \theta\,(p_1 + p_2 + p_3)\, \{&\tilde{K}(p_0, p_1, p_2, p_3) - \\ &- \theta\,(-p_2)\, \tilde{K}(p_0, p_1, p_3, p_2) - \\ &- \theta\,(p_1 + p_3)\, \theta(-p_1)\, \tilde{K}(p_0, p_2, p_3, p_1) - \\ &- \theta\,(-p_1 - p_3)\, \tilde{K}(p_0, p_2, p_1, p_3) - \\ &- \theta\,(-p_1 - p_2)\, \theta(p_2)\, \tilde{K}(p_0, p_3, p_1, p_2) + \\ &+ \theta\,(-p_1 - p_2)\, \theta\,(-p_1)\, \tilde{K}(p_0, p_3, p_2, p_1)\}.\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

5. Die Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$

Wir haben noch den Zusammenhang zwischen $K(x_0, \ldots, x_3)$ und $r(x_0, \ldots, x_3)$ aufzuklären. Dazu bedienen wir uns analytischer Methoden.

Wir führen die komplexen Vierervektoren

$$k_j = p_j + i q_j, \quad p_j \text{ und } q_j \text{ reell,} \tag{1}$$

ein und betrachten die durch (2.21) definierte Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ der zwölf komplexen Variablen k_i^μ.

Die Eigenschaften A, B, C aus § 2 ergeben folgende Bedingungen für $\tilde{r}$:

A'. $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ ist invariant gegen $L_+^\uparrow$.

B'. $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ ist analytisch im Gebiet[1])

$$\mathfrak{R} = \{(k_1, k_2, k_3) \mid \text{alle } q_j \in V_+\}, \tag{2}$$

wobei V_+ den Vorkegel unter Ausschluss des Randes bedeutet.

Für jedes $B > 0$ und für alle $Q_j, q_j \in V_+$ ist

$$e^{-Bt}\, \tilde{r}\,(p_j + i\,(Q_j + t q_j))$$

in $t \geqslant 0$ beschränkt durch ein Polynom in p_j[8]).

C'. $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ ist invariant gegen alle Permutationen der Variablen.

Nach einem Satz von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN[9]) folgt aus A' und B', dass $\tilde{r}$ analytisch fortsetzbar ist in das Gebiet

$$\mathfrak{R}' = \underset{\Lambda \in L_+(C)}{V}(\Lambda\, \mathfrak{R}). \tag{3}$$

$L_+(C)$ bedeutet dabei die Gruppe der komplexen Lorentztransformationen mit der Determinante $+1$. $\tilde{r}$ ist invariant gegen $L_+(C)$:

$$\tilde{r}(k_1, k_2, k_3) = \tilde{r}(\Lambda k_1, \Lambda k_2, \Lambda k_3) \text{ für } \Lambda \in L_+(C). \tag{4}$$

Mit diesem Satz können wir auch Bedingung D aus § 2 in eine Eigenschaft von $\tilde{r}$ umsetzen: Nach R. JOST[2]) liegt der reelle Punkt (p_1, p_2, p_3) in $\mathfrak{R}'$, falls

$$\Big(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j\, p_j\Big)^2 < 0 \text{ für alle } \alpha_j \geqslant 0, \ \sum \alpha_j > 0. \tag{5}$$

Sei $p_0 = -\sum_1^3 p_i$, $k_0 = -\sum_1^3 k_i$. Es gibt reelle Umgebungen, in denen nach (5) sowohl $\tilde{r}\,(p_1, p_2, p_3)$ als auch $\tilde{r}(p_0, p_2, p_3)$ regulär ist. In diesen Punkten gilt (2.23), woraus man durch analytische Fortsetzung[10]) erhält:

D'.
$$\tilde{r}(k_1, k_2, k_3) = \tilde{r}(k_0, k_2, k_3). \tag{6}$$

Nach C' spielt die Variable k_1 keine ausgezeichnete Rolle, man kann also auch k_2 oder k_3 mit k_0 vertauschen.

(6) und die eben erwähnten analogen Beziehungen ergeben eine Erweiterung des Regularitätsgebietes von $\tilde{r}$, die wir weiter unten diskutieren werden.

In den reellen Punkten (p_j), die nicht Regularitätspunkte von $\tilde{r}$ sind, ist $\tilde{r}(p_1, p_2, p_3)$ Randwert der analytischen Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ in folgendem Sinne:

Für jede Testfunktion $\varphi(p_1, p_2, p_3) \in S$[11]), d. h. für jede beliebig oft stetig differenzierbare Funktion mit genügend raschem Abfall im Unendlichen, gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\int d^{12} p\, \tilde{r}(p_1, p_2, p_3)\, \varphi(p_1, p_2, p_3) \\ &= \lim_{\substack{q_i \in V_+ \\ q_i \to 0}} \int d^{12} p\, \tilde{r}\,(p_1 + i q_1, \ldots, p_3 + i q_3)\, \varphi(p_1, p_2, p_3). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Dieser limes soll existieren für alle $\varphi \in S$ und unabhängig von der Art und Weise sein, in der die k_i gegen p_i streben, wenn das nur innerhalb $\mathfrak{R}$ geschieht. Dann ist das so definierte $\tilde{r}(p_j)$ eine temperierte Distribution[12]), wie es sein muss.

Wir wollen jetzt weitere Eigenschaften der Funktion $\tilde{r}$ herleiten, die aus der Existenz von $K(x_0, \ldots, x_3)$ folgen und die wir beim Übergang von r zu K benötigen werden. Es handelt sich um eine Erweiterung des Regularitätsgebietes von $\tilde{r}$ sowie um eine ziemlich undurchsichtige Identität zwischen gewissen Randwerten der Funktion $\tilde{r}$.

Wir definieren

$$s(x_0, \ldots, x_3) = \langle [R(x_0, x_1, x_2), A(x_3)] \rangle_0. \quad (8)$$

Die Definitionsgleichung (2.9) von r wird damit zu

$$\left.\begin{aligned} &r(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= \theta\,(x_1 - x_3)\, \theta\,(x_2 - x_3)\, s(x_0, x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \theta\,(x_2 - x_1)\, \theta\,(x_3 - x_1)\, s(x_0, x_2, x_3, x_1) + \\ &+ \theta\,(x_3 - x_2)\, \theta\,(x_1 - x_2)\, s(x_0, x_3, x_1, x_2). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

s hat folgende Trägereigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} &s(x_0, \ldots, x_3) = 0, \quad \text{falls} \quad (x_0 - x_1) \notin \overline{V}_+ \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{oder} \quad (x_0 - x_2) \notin \overline{V}_+ \\ &\text{oder } (x_0 - x_3), (x_1 - x_3), (x_2 - x_3) \text{ alle raumartig.} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die ersten beiden Bedingungen ergeben sich aus den Eigenschaften von R, die dritte aus den Eigenschaften γ) und δ) von K (Gl. (4.4) bis (4.7)), wenn man beachtet, dass

$$s(x_0, \ldots, x_3) = \theta(x_0, x_1, x_2)\, K(x_0, x_1, x_2, x_3) + \theta(x_0, x_2, x_1)\, K(x_0, x_2, x_1, x_3) \quad (11)$$

Es gilt:

$$s(x_0, \ldots, x_3) = r(x_0, \ldots, x_3), \text{ falls } (x_3 - x_1) \notin \overline{V}_+ \text{ und } (x_3 - x_2) \notin \overline{V}_+. \quad (12)$$

Aus der Gleichung (9) erkennt man sofort die Gültigkeit dieser Beziehung im Falle $x_3^0 < x_1^0, x_2^0$. Für die andern Fälle hat man die Identität (4.7) zu Hilfe zu ziehen. Wegen der Symmetrie von s und r in x_1 und x_2 genügt es, den Fall $x_1^0 > x_2^0$ zu untersuchen.

Für $x_0^0 > x_1^0 > x_3^0 > x_2^0$ wird (12) zu

$$K(x_0, x_1, x_2, x_3) = K(x_0, x_1, x_3, x_2),$$

was unter unserer Voraussetzung $(x_3 - x_2) \notin \overline{V}_+$ wegen (4.7) und (4.4) stimmt.

Im Falle $x_0^0 > x_3^0 > x_1^0 > x_2^0$ ist zu zeigen, dass

$$K(x_0, x_3, x_1, x_2) = K(x_0, x_1, x_2, x_3),$$

oder mit (4.6) umgeformt

$$K(x_0, x_1, x_3, x_2) + K(x_1, x_3, x_0, x_2) = K(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Das gilt wieder auf Grund unserer Voraussetzungen wegen (4.7) und (4.4).

Für $x_3^0 > x_0^0$ verschwinden beide Seiten von (12) gemäss (10) und (2.15).

Damit ist (12) bewiesen. Die Funktion

$$g(x_0, \ldots, x_3) = s(x_0, \ldots, x_3) - r(x_0, \ldots, x_3) \quad (13)$$

verschwindet also ausserhalb der durch

$$\text{G:} \quad \left.\begin{array}{l} (x_0 - x_1) \in \overline{V}_+ \\ (x_0 - x_2) \in \overline{V}_+ \\ (x_3 - x_1) \in \overline{V}_+ \text{ oder } (x_3 - x_2) \in \overline{V}_+ \end{array}\right\} \quad (14)$$

definierten Punktmenge.

Wir betrachten nun r, s, g wieder als Funktionen der Differenzenvariablen $\xi_j = x_0 - x_j$ und führen ihre Fouriertransformierten $\tilde{r}(p_1, p_2, p_3)$ usw. ein. Aus (14) folgt in gleicher Weise wie bei $\tilde{r}$, dass $\tilde{g}(p_1, p_2, p_3)$ Randwert einer analytischen Funktion $\tilde{g}(k_1, k_2, k_3)$ ist. Deren Regularitätsgebiet ist die Röhre

$$\mathfrak{G}_{123}\colon\ q_3 \in V_-, (q_1 + q_3) \in V_+, (q_2 + q_3) \in V_+, \quad (15)$$

und $\tilde{g}$ unterliegt darin analogen Beschränktheitsbedingungen wie den in B′ für $\tilde{r}$ gegebenen. Das gilt nämlich, falls[8])

$$\sum_1^3 \xi_j\, q_j > 0 \quad \text{für} \quad (\xi_j) \in G, (q_j) \in \mathfrak{G}_{123}.$$

Diese Bedingung ist aber erfüllt: Sei $(\xi_1 - \xi_3) \in \overline{V}_+$, $\xi_1 \in \overline{V}_+$, $\xi_2 \in \overline{V}_+$. Dann gilt in $\mathfrak{G}_{123}$

$$\sum \xi_j q_j = \xi_1 (q_1 + q_3) + \xi_2 q_2 - (\xi_1 - \xi_3) q_3 > 0,$$

da alle drei Glieder dieser Summe schon einzeln > 0 sind. (Aus $q_3 \in V_-$ und $(q_2 + q_3) \in V_+$ folgt natürlich $q_2 \in V_+$.) Genau gleich verfährt man im Falle $(\xi_2 - \xi_3) \in \overline{V}_+$, $\xi_1 \in \overline{V}_+$, $\xi_2 \in \overline{V}_+$, der nach (14) auch auftreten kann. Also

$$\tilde{g}(p_1, p_2, p_3) = \lim_{\substack{(q_j) \in \mathfrak{G}_{123} \\ q_j \to 0}} \tilde{g}(k_1, k_2, k_3), \tag{16}$$

wobei dieser limes im Sinne von Gleichung (7) zu verstehen ist.

In § 2 haben wir gezeigt (im Anschluss an (2.18)), dass

$$\tilde{s}(p_1, p_2, p_3) = 0 \text{ für } p_3^2 < 0. \tag{17}$$

Nach der Definition (13) von g gilt somit:

$$\tilde{g}(p_1, p_2, p_3) = -\tilde{r}(p_1, p_2, p_3) \text{ für } p_3^2 < 0. \tag{18}$$

$\tilde{g}(k_j)$ erfüllt die Voraussetzungen des bei (3) erwähnten Satzes von Bargmann, Hall und Wightman; also lässt sich $\tilde{g}$ in ein grösseres Gebiet $\mathfrak{G}'_{123}$ analytisch fortsetzen, das analog zu $\mathfrak{R}'$ definiert ist. Die reellen Punkte in $\mathfrak{G}'_{123}$ sind analog zu (5) bestimmt durch die Forderung

$$[\alpha_1 (p_1 + p_3) + \alpha_2 (p_2 + p_3) - \alpha_3 p_3]^2 < 0 \text{ für alle } \alpha_i \geqslant 0, \sum \alpha_i > 0. \tag{19}$$

Speziell ist sowohl in den reellen Punkten von $\mathfrak{R}'$ als auch in denen von $\mathfrak{G}'_{123}$ der Vektor p_3 raumartig. Nun gibt es reelle Umgebungen, die beiden diesen Gebieten angehören, z. B. eine Umgebung des Punktes

$$p_1 = p_2 = (0,10,0,0), \; p_3 = (0, 0, 1, 0).$$

In diesen Punkten gilt (18), also ist $\tilde{g}(k_j)$ eine analytische Fortsetzung von $\tilde{r}(k_j)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}'_{123}$:

$$\tilde{g}(k_1, k_2, k_3) = -\tilde{r}(k_1, k_2, k_3), \tag{20}$$

und $\tilde{r}$ ist regulär in $\mathfrak{G}'_{123}$.

Auf Grund dieser Tatsache sowie der Symmetrien C′ und D′ von $\tilde{r}$ und der aus (4) folgenden Invarianz von $\tilde{r}$ gegen die totale Spiegelung $k'_i = -k_i$ lässt sich nun über das Regularitätsgebiet von $\tilde{r}$ folgendes aussagen:

Die Bedingungen B′, C′, D′ ergeben, dass $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ regulär ist, falls drei der vier q_j (q_0 mit eingerechnet!) in V_+ liegen (oder falls drei der vier q_j in V_- liegen, wegen der erwähnten Spiegelinvarianz). Es sind dann alle $(q_j + q_k)$ zeitartig $(j, k = 0, \ldots, 3)$. (20) bedeutet, dass $\tilde{r}$ in $\mathfrak{G}_{123}$ noch analytisch ist. An Stelle von k_1, k_2, k_3 kann man hier wieder eine beliebige Auswahl der vier k_j in beliebiger Reihenfolge setzen, d. h. $\tilde{r}$ ist regulär in allen $\mathfrak{G}_{ikj}$. Auch hier sind alle $(q_j + q_k)$ zeitartig, wie man sich leicht überlegt.

Es ist $\mathfrak{G}_{ikj} = \mathfrak{G}_{kij}$. Aus den vier Indizes $0, \ldots, 3$ lassen sich auf vier Arten drei verschiedene auswählen. Von diesen dreien kann jeder zuhinterst stehen, so dass im ganzen zwölf Gebiete $\mathfrak{G}_{ikj}$ existieren. Diese Zahl wird noch verdoppelt durch die Möglichkeit der totalen Spiegelung.

Sei nun ein Punkt $(k_0, \ldots, k_3)$ $(\sum_0^3 k_j = 0)$ gegeben, in dem alle $(q_j + q_k)$ zeitartig sind. Dann ist dieser Punkt ein Regularitätspunkt von $\tilde{r}$:

Liegen drei der q, z. B. q_i, q_j, q_h, im selben Halbkegel, so haben wir es nach (2) und (4) zu tun mit einem Regularitätspunkt von $\tilde{r}(k_i, k_j, k_h) = \tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$.

Seien nun zwei der q_i in V_+, die beiden andern in V_- (z. B. $q_0, q_1 \in V_+$, $q_2, q_3 \in V_-$). Das ist auf sechs Arten möglich. Die $(q_j + q_k)$, $j \neq k$, können noch auf je vier Arten in den beiden Halbkegeln verteilt sein: In unserem Beispiel ist die Lage von $(q_1 + q_2)$ und von $(q_1 + q_3)$ noch frei, die übrigen Summen sind dadurch festgelegt. Diese $6 \times 4 = 24$ Möglichkeiten entsprechen gerade den 24 $\mathfrak{G}$-Gebieten. Ist z. B. in unserem Spezialfall $(q_1 + q_2) \in V_-$, $(q_1 + q_3) \in V_+$, so sind wir in einem Regularitätspunkt von

$$\tilde{g}(k_0, k_1, k_3) = -\tilde{r}(k_0, k_1, k_3) = -\tilde{r}(k_1, k_2, k_3).$$

Wir haben also folgendes Ergebnis:

I. *$\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ ist analytisch im Punkte $k_j = p_j + i q_j$, falls dort alle $(q_j + q_h)^2 > 0$ $(j, h = 0, \ldots, 3)$.*

Auf jedem Strahl $Q_j + t q_j$ $(t \geqslant 0)$, der ganz in der angegebenen Menge des q-Raumes verläuft, wird für jedes $B > 0$ der Ausdruck

$$e^{-Bt}\, \tilde{r}\, (p_j + i\, (Q_j + t q_j))$$

majorisiert durch ein Polynom in den p_j.

Natürlich ist die angegebene Menge nicht das volle Regularitätsgebiet von $\tilde{r}$; sie ist überhaupt kein Gebiet, da sie nicht zusammenhängend ist. Es handelt sich um eine Vereinigungsmenge von Röhren der Art von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$. Nach dem früher zitierten Satz von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN ist $\tilde{r}$ also noch analytisch in der Holomorphiehülle $\mathfrak{H}$ des aus der betrachteten Menge durch Anwendung von $L_+(C)$ hervorgehenden Gebietes.

Wir werden in § 8 auf indirektem Wege zeigen, dass auch $\mathfrak{H}$ noch nicht das volle Regularitätsgebiet von $\tilde{r}$ ist.

Die eben hergeleitete Bedingung I ist, zusammen mit A' bis D', noch nicht hinreichend für die Lösbarkeit unseres Umkehrproblems, d. h. für die Existenz von K. Man kann das z. B. daran sehen, dass wir die Eigenschaft (14) der Funktion g nicht voll ausgenützt haben. Aus I (d. h. aus (15) und den zugehörigen Beschränktheitsbedingungen) folgt nämlich nur, dass der Träger von $g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ in der Menge $\xi_1 \in \overline{V}_+$, $\xi_2 \in \overline{V}_+$, $(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3) \in \overline{V}_+$ liegt (siehe § 6). Diese Menge ist aber grösser als G.

Wir wollen deshalb noch eine weitere Bedingung für $\tilde{r}$ ableiten, die dann zusammen mit den schon gegebenen die Existenz von K sicherstellt. Dazu beweisen wir zuerst die Identität

$$\theta(x_2 - x_3)\,[g(x_0, x_1, x_2, x_3) - g(-x_1, -x_0, -x_3, -x_2)] = 0. \tag{21}$$

Wegen (14) gilt das, wenn $x_0^0 < x_1^0$, oder $(x_3 - x_1) \notin \overline{V}_+$, oder $(x_0 - x_2) \notin \overline{V}_+$. Dann verschwinden nämlich beide Summanden einzeln. Es bleibt also nur der Fall

$$x_0^0 > x_2^0 > x_3^0 > x_1^0$$

zu untersuchen. Berücksichtigt man die Definition (13) von g und die aus dem unter unseren Voraussetzungen geltenden CTP-Theorem[2]) folgende Beziehung

$$K(x_0, x_1, x_2, x_3) = -K(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3), \tag{22}$$

so wird (21) in diesem Fall:

$$K(x_0, x_2, x_1, x_3) - K(x_0, x_2, x_3, x_1) + K(x_1, x_3, x_0, x_2) - K(x_1, x_3, x_2, x_0) = 0.$$

Das ist aber Gleichung (4.7), deren Gültigkeit wir hier voraussetzen. Damit ist (21) bewiesen.

Wir behaupten nun, dass folgende Identität gelte:

$$\left.\begin{aligned} &g(x_0, x_1, x_3, x_2) + g(x_2, x_3, x_1, x_0) - \\ &- g(-x_1, -x_0, -x_2, -x_3) - g(-x_3, -x_2, -x_0, -x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wegen (21) und (14) ist das erfüllt, falls $x_3^0 > x_2^0$ oder $x_1^0 > x_0^0$, wie man durch Multiplikation mit den entsprechenden θ-Faktoren erkennt. Durch Anwendung der Symmetrie

$$g(x_0, x_1, x_2, x_3) = g(x_0, x_2, x_1, x_3) \tag{24}$$

sieht man in gleicher Weise, dass (23) auch gilt, falls $x_3^0 > x_0^0$ oder $x_1^0 > x_2^0$. Zu diskutieren bleibt der Fall $x_1^0, x_3^0 < x_0^0, x_2^0$. Wegen der Invarianz der zu beweisenden Gleichung gegen die Vertauschungen $x_1 \leftrightarrow x_3$ und $x_0 \leftrightarrow x_2$ (wieder als Folge von (24)) genügt es, den Fall

$$x_1^0 < x_3^0 < x_0^0 < x_2^0$$

zu betrachten. Die linke Seite von (23) wird dann nach (13) und (22):

$$L = K(x_0, x_3, x_1, x_2) + K(x_2, x_3, x_1, x_0) - K(x_2, x_0, x_3, x_1) +$$

$$+ K(x_1, x_0, x_2, x_3) - K(x_1, x_3, x_0, x_2) + K(x_3, x_0, x_1, x_2),$$

was mit (4.5) bis (4.7) umgeformt werden kann:

$$L = K(x_0, x_1, x_3, x_2) + K(x_3, x_2, x_0, x_1) + K(x_2, x_3, x_1, x_0) + K(x_1, x_0, x_2, x_3) = 0,$$

womit (23) bewiesen ist.

Durch Fouriertransformation erhält man aus (23):

$$\tilde{g}(p_1, p_3, p_2) + \tilde{g}(p_3, p_1, p_0) - \tilde{g}(-p_0, -p_2, -p_3) - \tilde{g}(-p_2, -p_0, -p_1) = 0. \quad (25)$$

Diese Gleichung kann nach (16) und (20) als Beziehung zwischen Randwerten der Funktion $\tilde{r}(k_j)$ geschrieben werden und ergibt so die gewünschte zusätzliche Bedingung für diese Funktion:

II. *Es gilt die Identität*

$$\lim_{\substack{(q_j) \in \mathfrak{G}_{132} \\ q_j \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) + \lim_{\substack{(q_j) \in \mathfrak{G}_{310} \\ q_j \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) =$$

$$= \lim_{\substack{(-q_j) \in \mathfrak{G}_{023} \\ q_j \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) + \lim_{\substack{(-q_j) \in \mathfrak{G}_{201} \\ q_j \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3). \quad (26)$$

Diese Forderung scheint sich nicht in einfacher Weise als funktionentheoretische Eigenschaft von $\tilde{r}(k_j)$ ausdrücken zu lassen, wodurch sie sich sehr unvorteilhaft von den andern Forderungen A' bis D' und I abhebt.

Es ist noch zu bemerken, dass für spezielle Werte der Variablen p_j die Identität (26) eine Folge der Bedingung I ist. Die lim-Vorschriften $(q_j) \in \mathfrak{G}_{132}$ und $(-q_j) \in \mathfrak{G}_{023}$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von $(q_2 + q_3)$, ebenso die beiden andern lim-Vorschriften, die in (26) auftreten. Daraus folgt, dass die vier Terme der Identität paarweise gleich sind, falls $(p_2 + p_3)$ raumartig ist. (Siehe den Beweis von Gleichung (6.11) im folgenden Paragraphen.) Eine solche Gleichheit je zweier Terme besteht auch, falls $(p_1 + p_2)$ raumartig ist. In diesen beiden Fällen ist also (26) von selbst erfüllt.

6. Die Existenz von $K(x_0, \ldots, x_3)$

Es soll gezeigt werden, dass die in § 5 für $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ hergeleiteten Bedingungen I und II, zusammen mit den bereits bekannten A' bis D', für die Existenz der Wightmanfunktion hinreichend sind.

D. h. es gilt folgender Satz:

Es sei eine analytische Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ mit den Eigenschaften A' bis D', I und II aus § 5 gegeben.

Dann existiert eine Funktion $K(x_0, \ldots, x_3)$ mit den Eigenschaften α) bis δ) aus § 4 so, dass die daraus nach (2.9) und (2.21) berechnete Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ die vorgegebene ist.

Die in II auftretenden Randwerte von $\tilde{r}$, ebenso wie die im folgenden eingeführten anderen Randwerte, sollen existieren im Sinne der Gleichung (5.7).

Wir beweisen diesen Satz, indem wir K aus $\tilde{r}$ explizit konstruieren. Nach § 3 ist K eindeutig festgelegt. Das im folgenden konstruierte K ist also das einzig mögliche.

Zuerst definieren wir die Funktionen reeller Variablen

$$\begin{aligned} \tilde{r}(p_1, p_2, p_3) &= \lim_{\substack{(qi) \in \mathfrak{R} \\ qi \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) \\ g(p_1, p_2, p_3) &= - \lim_{\substack{(qi) \in \mathfrak{G}_{123} \\ qi \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) \\ & \qquad k_j = p_j + i q_j \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gebiete $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}_{123}$ sind dabei definiert durch (5.2) resp. (5.15). Wegen Voraussetzung I ist $\tilde{r}$ in $\mathfrak{R}$ und in $\mathfrak{G}_{123}$ analytisch, so dass die Definition (1) sinnvoll ist (unter der erwähnten zusätzlichen Voraussetzung über die Existenz der Randwerte von $\tilde{r}$).

Wegen C′ und der Symmetrien von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}_{123}$ gilt

$$\tilde{r}(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}) = \tilde{r}(p_1, p_2, p_3) \tag{2}$$

für jede Permutation (i_1, i_2, i_3) der Indizes (1, 2, 3), und

$$\tilde{g}(p_1, p_2, p_3) = \tilde{g}(p_2, p_1, p_3). \tag{3}$$

Sowohl $\mathfrak{R}$ als auch $\mathfrak{G}_{123}$ sind konvex. $\tilde{r}(k_j)$ ist deshalb in $\mathfrak{R}$, resp. $\mathfrak{G}_{123}$ Fouriertransformierte einer Distribution $r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, resp. $g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Nach L. SCHWARTZ[8]) liegt der Träger von r im Halbraum

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i \, q_i \geqslant 0,$$

falls für alle $B > 0$ und alle $(Q_j) \in \mathfrak{R}$ der Ausdruck

$$e^{-Bt} \, \tilde{r} \, (p_j + i \, (Q_j + t q_j))$$

in $t \geqslant 0$ durch ein Polynom in p_j beschränkt ist. Nach Voraussetzung I ist dies der Fall für alle $q_i \in V_+$, d. h. der Träger von r liegt im Durchschnitt aller Halbräume der angegebenen Art mit $q_i \in V_+$, also

$$r(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \text{ falls ein } \xi_i \notin \overline{V}_+. \tag{4}$$

Ebenso liegt der Träger von g im Durchschnitt der entsprechenden Halbräume mit $(q_i) \in \mathfrak{G}_{123}$. Aber

$$\sum \xi_i\, q_i = \xi_1\,(q_1 + q_3) + \xi_2\,(q_2 + q_3) - (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)\, q_3,$$

also

$$g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \text{ falls } \xi_1 \notin \overline{V}_+, \text{ oder } \xi_2 \notin \overline{V}_+, \text{ oder } (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3) \notin \overline{V}_+. \quad (5)$$

Wegen der Existenz der Randwerte in (1) sind r und g temperierte Distributionen, und $\tilde{r}(p_i)$, $\tilde{g}(p_i)$ sind ihre Fouriertransformierten im Sinne der Distributionentheorie.

Die Voraussetzung II gestattet eine Verschärfung der Trägereigenschaft (5): (5.26) kann nach (1) in der Form (5.25) geschrieben werden. Daraus erhält man durch Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} &g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= -g(\xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3, -\xi_3) + g(\xi_1, \xi_1 - \xi_3, \xi_1 - \xi_2) + g(\xi_2 - \xi_3, \xi_2, \xi_2 - \xi_1). \end{aligned}$$

Ist weder $(\xi_1 - \xi_3) \in \overline{V}_+$ noch $(\xi_2 - \xi_3) \in \overline{V}_+$, so verschwinden alle rechtsstehenden Glieder wegen (5). Der Träger von g liegt also in G (siehe (5.14)):

$$\xi_1 \in \overline{V}_+,\ \xi_2 \in \overline{V}_+,\ (\xi_1 - \xi_3) \in \overline{V}_+ \text{ oder } (\xi_2 - \xi_3) \in \overline{V}_+. \quad (6)$$

Aus der Invarianz von $\tilde{r}(k_j)$ und der Gebiete $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}_{123}$ gegen $L_+^\uparrow$ ergibt sich die Invarianz von $r(\xi_i)$ und $g(\xi_i)$ gegen $L_+^\uparrow$.

Aus $r(\xi_i)$, resp. $g(\xi_i)$ erhält man die entsprechenden Funktionen der vier Variablen x_i durch die Definition

$$\left.\begin{aligned} r(x_0, x_1, x_2, x_3) &= r(x_0 - x_1, x_0 - x_2, x_0 - x_3) \\ g(x_0, x_1, x_2, x_3) &= g(x_0 - x_1, x_0 - x_2, x_0 - x_3) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Weiter definieren wir

$$\left.\begin{aligned} s(x_0, \ldots, x_3) &= r(x_0, \ldots, x_3) + g(x_0, \ldots, x_3) \\ \text{also} \qquad s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= r(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

s ist retardiert in ξ_1 und ξ_2 und erfüllt die Gleichung (5.9):

$$\left.\begin{aligned} r(x_0, \ldots, x_3) = {} & \theta\,(x_1 - x_3)\ \theta\,(x_2 - x_3)\ s(x_0, x_1, x_2, x_3) + \\ & + \theta\,(x_2 - x_1)\ \theta\,(x_3 - x_1)\ s(x_0, x_2, x_3, x_1) + \\ & + \theta\,(x_3 - x_2)\ \theta\,(x_1 - x_2)\ s(x_0, x_3, x_1, x_2), \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wie man durch Einsetzen erkennt (unter Benützung der (2) und (3) entsprechenden Symmetrien von r und g).

Im p-Raum wird (8) zu

$$\left.\begin{aligned}\tilde{s}(p_1, p_2, p_3) &= \tilde{r}(p_1, p_2, p_3) + \tilde{g}(p_1, p_2, p_3)\\ &= \lim_{\substack{(q_i)\in\mathfrak{R}\\ q_i\to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) - \lim_{\substack{(q_i)\in\mathfrak{G}_{123}\\ q_i\to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die beiden limes-Vorschriften in dieser Gleichung unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von q_3. Es ist nämlich $q_3 \in V_+$ in $\mathfrak{R}$, $q_3 \in V_-$ in $\mathfrak{G}_{123}$, aber in beiden Gebieten $q_1, q_2 \in V_+$ und $(q_1 + q_3) \in V_+$, $(q_2 + q_3) \in V_+$.

Falls p_3 raumartig ist, ist der Punkt (k_j) mit $q_1 \in V_+$, $q_2 \in V_+$, $q_3 = 0$ ein Regularitätspunkt von $\tilde{r}(k_j)$. Es kann dann nämlich eine infinitesimale Lorentztransformation $\Lambda \in L_+(C)$ angegeben werden, so dass $(\Lambda k_1, \Lambda k_2, \Lambda k_3) \in \mathfrak{R}$, d. h. unser Punkt liegt in $\mathfrak{R}'$:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen

$$p_3 = (0, a, 0, 0), \quad a > 0.$$

Durch die infinitesimale Transformation

$$\Lambda = 1 + i\,\varepsilon \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right), \ \varepsilon > 0$$

wird dieses p_3 übergeführt in $k_3' = \Lambda p_3 = p_3 + i\varepsilon(a, 0, 0, 0)$, also ist $q_3' \in V_+$. Für $j = 1,2$ ist mit q_j auch q_j' in V_+, wenn nur ε genügend klein gewählt wird.

Da die Reihenfolge des Verschwindens der q_j in der Definition (1) keine Rolle spielen soll, können wir in (10) zuerst mit q_3 gegen null gehen. Ist p_3 raumartig, so gelangen wir dabei nach der vorhergehenden Bemerkung in einen Regularitätspunkt von $\tilde{r}$, das Vorzeichen von q_3 ist also in diesem Falle ohne Bedeutung. Beide Terme der rechten Gleichungsseite sind gleich, d. h.

$$\tilde{s}(p_1, p_2, p_3) = 0 \text{ wenn } p_3^2 < 0. \tag{11}$$

Wegen (2) und (3) gilt

$$s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = s(\xi_2, \xi_1, \xi_3), \tag{12}$$

wegen der Lorentzinvarianz von r und g ist auch s invariant gegen $L_+^\uparrow$.

Wir haben nun noch die Gleichung (5.11) zu lösen, die zusammen mit (9) zu der Definition (2.9, 11) der Funktion r äquivalent ist. Die Lösung kann auf algebraischem Wege gefunden werden, unter Ausnützung der Bedingungen (4.5) und (4.6) und der Beziehung (5.22). Es ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}K(x_0, \ldots, x_3) &= s(x_0, x_1, x_2, x_3) - s(x_1, x_0, x_2, x_3) - \\ &- s(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3) + s(-x_1, -x_0, -x_2, -x_3).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dieser Ausdruck ist sicher lorentzinvariant, da s lorentzinvariant ist. Wegen der Retardierung von s in $(x_0 - x_1)$ erfüllt K die Lokalitätsbedingung (4.4). Die Antisymmetrie (4.5) ist offensichtlich auch vorhanden, ebenso gilt die Jacobi-Identität (4.6). Zu prüfen sind also noch die Bedingung β) und die Identität (4.7) aus Bedingung δ) in § 4.

Durch Einsetzen von (8) in (13) erhält man unter Berücksichtigung der Symmetrien von r und g:

$$\left.\begin{aligned} &K(x_0, x_1, x_2, x_3) - K(x_0, x_1, x_3, x_2) \\ &= g(x_0, x_1, x_2, x_3) - g(x_1, x_0, x_2, x_3) - g(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3) + \\ &+ g(-x_1, -x_0, -x_2, -x_3) - \\ &- g(x_0, x_1, x_3, x_2) + g(x_1, x_0, x_3, x_2) + g(-x_0, -x_1, -x_3, -x_2) - \\ &- g(-x_1, -x_0, -x_3, -x_2). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Einen analogen Ausdruck erhält man für

$$K(x_2, x_3, x_1, x_0) - K(x_2, x_3, x_0, x_1).$$

Wegen der Identität (5.23) sind diese beiden Ausdrücke gleich. ((5.23) gilt als Folge der Voraussetzung (5.26)). Damit ist auch die Forderung (4.7) erfüllt.

Die Fouriertransformierte von $K(x_0, \ldots, x_3)$ ist

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{K}(p_0, \ldots, p_3) \\ &= \delta\,(p_0 + \ldots + p_3)\,[\tilde{s}(p_1, p_2, p_3) - \tilde{s}(p_0, p_2, p_3) - s(-p_1, -p_2, -p_3) \\ &+ \tilde{s}(-p_0, -p_2, -p_3)] = 0, \text{ wenn } p_3{}^2 < 0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

als Folge von (11). Sei

$$G(x_0, x_1, x_2, x_3) = g(-x_1, -x_0, -x_2, -x_3) - g(x_0, x_1, x_3, x_2). \tag{16}$$

Damit wird (14) zu

$$\left.\begin{aligned} &K(x_0, x_1, x_2, x_3) - K(x_0, x_1, x_3, x_2) \\ &= G(x_0, x_1, x_2, x_3) - G(x_1, x_0, x_2, x_3) - G(x_0, x_1, x_3, x_2) + G(x_1, x_0, x_3, x_2) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Aber:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= \delta\,(p_0 + \ldots + p_3)\,\tilde{G}'(p_1, p_2, p_3), \\ \tilde{G}'(p_1, p_2, p_3) &= -\tilde{g}(p_1, p_3, p_2) + \tilde{g}(-p_0, -p_2, -p_3) \\ &= \lim_{\substack{(qj) \in \mathfrak{G}_{132} \\ qj \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) - \lim_{\substack{(-qj) \in \mathfrak{G}_{023} \\ qj \to 0}} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

Die beiden hier auftretenden limes-Vorschriften unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von $(q_2 + q_3)$, alle andern $(q_j + q_h)$ – natürlich mit Ausnahme von $(q_0 + q_1)$ – liegen beidemal im selben Halbkegel. Auf gleiche Weise wie Gleichung (11) erhält man daraus:

$$\tilde{G}(p_0, .., p_3) = 0 \quad \text{wenn } (p_2 + p_3)^2 < 0. \tag{18}$$

Also:

$$\tilde{K}(p_0, p_1, p_2, p_3) - \tilde{K}(p_0, p_1, p_3, p_2) = 0 \text{ wenn } (p_2 + p_3)^2 < 0. \tag{19}$$

(15) und (19) sind aber identisch mit den Gleichungen (4.2) und (4.3), also ist auch Bedingung β) erfüllt.

Damit ist der am Anfang dieses Paragraphen gegebene Satz bewiesen. In § 4 wurde gezeigt, dass aus α) bis δ) die Existenz der Wightmanfunktion folgt, so dass wir folgendes Ergebnis haben:

Falls $\tilde{r}(p_1, p_2, p_3)$ Randwert einer analytischen Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ mit den Eigenschaften A' bis D', I und II ist, so existiert die zugehörige Wightmanfunktion $W(x_0, \ldots, x_3)$ mit den Eigenschaften a), b), c) aus § 2.

7. Das *T*-Produkt

Wir wollen kurz noch eine weitere Funktion betrachten, die mit den Funktionen W und r in engem Zusammenhange steht, nämlich die Funktion

$$\tau(x_0, \ldots, x_3) \equiv < T A(x_0) \ldots A(x_3) >_0 \equiv < T(x_0, \ldots, x_3) >_0. \tag{1}$$

$T(x_0, \ldots, x_3)$ bedeutet dabei das zeitlich geordnete Produkt der Feldoperatoren $A(x_0), \ldots, A(x_3)$.

Es ist wohlbekannt, dass diese Funktion eine enge Verwandtschaft mit der Wightmanfunktion $W(x_0, \ldots, x_3)$ aufweist:

Gleich wie $\tilde{r}(p_1, p_2, p_3)$ ist auch $W'(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ (siehe (2.3)) Randwert einer analytischen Funktion $W'(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, $\zeta_k = \eta_k + i\varrho_k$[1]). W' ist regulär in $\mathfrak{R}$, d. h. falls alle $\varrho_k \in V_+$. Die lokalen Vertauschungsrelationen (2.8) bewirken – ähnlich wie die Symmetrien (5.6) und (5.20) im Falle von $\tilde{r}$ – eine Vergrösserung des Regularitätsgebietes von W'. Wir definieren

$$W(z_0, \ldots, z_3) = W'(z_1 - z_0, z_2 - z_1, z_3 - z_2), \; z_k = x_k + i y_k. \tag{2}$$

W ist analytisch im Punkte $(z_0, \ldots, z_3)$, falls eine Permutation $(z_{i_0}, \ldots, z_{i_3})$ der Variablen $(z_0, \ldots, z_3)$ existiert, so dass $(y_{i_{k+1}} - y_{i_k}) \in V_+$ für alle k.

Gehen die y_{i_k} unter Innehaltung dieser Bedingung gegen null, so strebt $W(z_0, \ldots, z_3)$ gegen $W(x_{i_0}, \ldots, x_{i_3})$.

Wählt man

$$y_k = -\varepsilon \, x_k^0 (1, 0, 0, 0), \; \varepsilon > 0, \tag{3}$$

so sieht man auf Grund dieser Betrachtung, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W(z_0, \ldots, z_3) = \tau(x_0, \ldots, x_3). \tag{4}$$

Dieses Ergebnis kann man in eine elegantere Form bringen, das so spezielle Vorschriften für den Grenzübergang wie (3) vermeidet. Nach HALL und WIGHTMAN[9]) kann $W(z_0, \ldots, z_3)$ als Funktion der sechs Variablen

$$u_{ik} = (z_i - z_k)^2, \, i > k \tag{5}$$

geschrieben werden. Das Regularitätsgebiet von $W(u_{ik})$ weist längs den positiv reellen Achsen aller u_{ik}-Ebenen Schnitte auf. Die Randwerte von W in den reellen Punkten hangen also im allgemeinen davon ab, ob die u_{ik} aus der oberen oder aus der unteren Halbebene gegen die reelle Achse streben. Aus der Vorschrift (3) ergibt sich:

$$v_{ik} = Im\, u_{ik} = 2(x_i - x_k)\,(y_i - y_k) = 2\,\varepsilon\,(x_i^0 - x_k^0)^2 > 0,$$

so dass (4) wird:

$$\tau(x_0, \ldots, x_3) = \lim_{v_{ik} \downarrow 0} W(u_{ik}). \tag{6}$$

Der Grenzübergang muss selbstverständlich innerhalb des Regularitätsgebietes von W erfolgen.

Die Ergebnisse von § 5 erlauben es nun, eine ähnliche Beziehung zwischen $\tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_3)$ und der Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ herzustellen.

Die Identität[13])

$$R(x_0, \ldots, x_n) = \sum (-1)^k\, \overline{T}(x_1, \ldots, x_k)\, T(x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n), \tag{7}$$

$\overline{T}$ = antichronologischer Operator.

Σ erstreckt über alle Aufteilungen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in zwei Gruppen $(x_1, \ldots, x_k)$, $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

wird im Spezialfall $n = 3$ zu

$$\left.\begin{aligned} &R(x_0, \ldots, x_3)\\ &= T(x_0, \ldots, x_3) - A(x_1)\, T(x_0, x_2, x_3) - A(x_2)\, T(x_0, x_1, x_3) -\\ &\quad A(x_3)\, T(x_0, x_1, x_2) +\\ &+ \overline{T}(x_1, x_2)\, T(x_0, x_3) + \overline{T}(x_1, x_3)\, T(x_0, x_2) + \overline{T}(x_2, x_3)\, T(x_0, x_1) -\\ &- T(x_1, x_2, x_3)\, A(x_0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Eine ähnliche Überlegung wie wir sie beim Beweis von (2.23) angewandt haben ergibt daraus:

$$\tilde{r}(p_0, \ldots, p_3) = \tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_3), \text{ falls } p_i \notin \overline{V}_-, \, p_0 \notin \overline{V}_+, \, (p_0 + p_i) \notin \overline{V}_+ \quad (i = 1, 2, 3) \tag{9}$$

Speziell:

$$\tilde{r}(p_0, \ldots, p_3) = \tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_3) \text{ wenn alle } p_i^0 > 0, \, i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Wegen der totalen Symmetrie von τ in allen Argumenten gilt allgemeiner

$$\tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_3) = \tilde{r}(p_{i_0}, \ldots, p_{i_3}) \text{ wenn } p_{i_1}^0, p_{i_2}^0, p_{i_3}^0 > 0. \tag{11}$$

Weiterhin folgt aus dem CTP-Theorem[2])

$$\left.\begin{aligned} \tau(x_0, \ldots, x_3) &= \tau(-x_0, \ldots, -x_3) \\ \tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_3) &= \tilde{\tau}(-p_0, \ldots, -p_3) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

also

$$\tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_3) = \tilde{r}(-p_{i_0}, \ldots, -p_{i_3}) \text{ wenn } p_{i_1}^0, p_{i_2}^0, p_{i_3}^0 < 0. \tag{13}$$

Mit Hilfe der ebenfalls aus (7) folgenden Identität

$$\left.\begin{aligned} &T(x_0, x_1, x_2) \\ &= R(x_0, x_1, x_2) + A(x_1)\, T(x_0, x_2) + A(x_2)\, T(x_0, x_1) - \overline{T}(x_1, x_2)\, A(x_0) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

lässt sich das in (8) auftretende Glied $A(x_3) T(x_0, x_1, x_2)$ umformen:

$$A(x_3)\, T(x_0, x_1, x_2) = A(x_3)\, R(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$

Mit

$$S(x_0, \ldots, x_3) = [R(x_0, x_1, x_2), A(x_3)] \tag{15}$$

wird das

$$A(x_3)\, T(x_0, x_1, x_2) = -S(x_0, \ldots, x_3) + R(x_0, x_1, x_2)\, A(x_3) + \ldots$$

Setzt man das in Gleichung (8) ein, so erhält man auf gleiche Weise wie (10):

$$\tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_3) = -\tilde{g}(p_0, \ldots, p_3) \text{ wenn } p_3^0 < 0, \, p_1^0 + p_3^0 > 0, \, p_2^0 + p_3^0 > 0, \tag{16}$$

wobei g durch (5.13) definiert ist.

Auch diese Beziehung lässt sich auf Grund der vorhandenen Symmetrien verallgemeinern zu

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\tau}(p_0, \dots, p_3) &= -\tilde{g}(p_{i_0}, \dots p_{i_3}) \\ &\quad \text{wenn } p^0_{i_3} < 0, p^0_{i_1} + p^0_{i_3} > 0, p^0_{i_2} + p^0_{i_3} > 0 \\ &= -\tilde{g}(-p_{i_0}, \dots, -p_{i_3}) \\ &\quad \text{wenn } p^0_{i_3} > 0, p^0_{i_1} + p^0_{i_3} < 0, p^0_{i_2} + p^0_{i_3} < 0.\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die in (11), (13) und (17) auftretenden Vorzeichenkombinationen erschöpfen alle Möglichkeiten. Der Beweis entspricht genau den in § 5 im letzten Abschnitt vor der Formulierung der Bedingung I gegebenen Betrachtungen, wobei man nur die Halbkegel V_+ resp. V_- durch die Halbräume $p^0 > 0$ resp. $p^0 < 0$ zu ersetzen hat.

Nach § 5 sind $\tilde{r}$ und $\tilde{g}$ nach Abspaltung des Faktors $\delta(p_0 + \cdots + p_3)$ Randwerte der analytischen Funktion $\tilde{r}(k_i)$. Seien die Vektoren p_1, p_2, p_3 (und damit p_0) gegeben. Wir definieren

$$q_j = \varepsilon\, p^0_j (1, 0, 0, 0). \quad (18)$$

Der Punkt $(p_j + i q_j)$ ist nach I ein Regularitätspunkt der Funktion $\tilde{r}$. (Falls eine oder mehrere der Summen $p^0_j + p^0_h$ verschwinden, muss die Definition (18) etwas abgeändert werden.) Durch Vergleich von (6.1) mit (11), (13), (17) erkennt man

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\tau}(p_0, \dots, p_3) &= \delta(p_0 + \dots + p_3)\, \tilde{\tau}'(p_1, p_2, p_3) \\ \tilde{\tau}'(p_1, p_2, p_3) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{r}(k_1, k_2, k_3).\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Nach dem erwähnten Satz von Hall und Wightman lässt sich $\tilde{r}$ als Funktion der Variablen

$$w_{ij} = (k_i + k_j)^2, \quad i, j = 0, \dots, 3 \quad (20)$$

schreiben, wovon sechs unabhängig sind. (18) ergibt dann die Bedingung

$$t_{ij} = Im\, w_{ij} = 2\, \varepsilon\, (p^0_i + p^0_j)^2 > 0,$$

woraus man erhält:

$$\tilde{\tau}'(p_1, p_2, p_3) = \lim_{t_{ij} \downarrow 0} \tilde{r}(w_{ij}). \quad (21)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die Gleichung (6) im x-Raum. Es ist allerdings zu beachten, dass in Gleichung (6) nur sechs Variable u_{ik} auftreten, man also für die Grenzwertbildung nur sechs Positivitätsvorschriften zu beachten hat. Im Falle von Gleichung (21) hat man es jedoch mit zehn Variablen w_{ij} zu tun. Wegen $w_{01} = w_{23}$ ist allerdings zugleich mit t_{01} auch t_{23} positiv usw., es bleiben jedoch auch nach Berücksichtigung dieser Paare sieben Positivitätsvorschriften für die sechs (beliebig wählbaren) unabhängigen Variablen übrig. Das hängt damit zusammen, dass das in I gegebene Regularitätsgebiet von $\tilde{r}$ kleiner ist als das bei (2) angegebene Regularitätsgebiet von $W(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$.

8. Eine Bemerkung zur Bedingung II

Wir wollen zeigen, dass im Falle nicht verschwindender Ruhemasse der betrachteten Teilchen das in § 5 im Anschluss an Satz I erwähnte Gebiet $\mathfrak{H}$ (inkusive einer aus den verschärften Spektralbedingungen folgenden Erweiterung) noch nicht das volle aus unseren Annahmen folgende Regularitätsgebiet der Funktion $\tilde{r}$ ist, d. h. die Bedingung II hat eine Vergrösserung dieses Gebietes zur Folge. Die Art dieser Vergrösserung ist leider noch nicht bekannt*).

Wir werden den Beweis auf indirektem Wege führen, indem wir ein Gegenbeispiel zu den sog. Dispersionsrelationen für Streuung zweier Teilchen konstruieren.

Dazu spezialisieren wir unsere Annahmen wie folgt: Das Feld $A(x)$ soll hermitisch sein und einem Teilchen mit der Ruhemasse 1 entsprechen, das keine Wechselwirkung mit anderen Teilchen aufweist. In der Definition von R (Gl. (2.9)) ersetzen wir $A(x)$ durch $(\Box - 1)\, A(x)$. Die Eigenschaften A bis C von $r(x_k)$ aus § 2 werden dadurch nicht berührt, hingegen lässt sich D verschärfen:

$$\mathrm{D}_1)\quad \left.\begin{array}{l} \tilde{r}(p_1, p_2, p_3) = \tilde{r}(p_0, p_2, p_3) \text{ falls } p_0^2 < 4,\ p_1^2 < 4, \\ \qquad\qquad (p_1 + p_2)^2 < 4,\ (p_1 + p_3)^2 < 4. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ebenso gilt nun Gleichung (5.18) für $p_3^2 < 4$.

Die Funktion $\tilde{r}(k_1, k_2, k_3)$ schreiben wir wie in § 7 als Funktion der Variablen

$$\left.\begin{array}{l} w_i = k_i^2, \quad i = 0, \ldots, 3 \\ w_{ij} = (k_i + k_j)^2,\ i = 1, 2, 3,\ j > i. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Die Eigenschaften A′ bis D′, I, II aus § 5 bleiben bestehen. Die angegebenen verschärften Spektralbedingungen sind erfüllt, falls die in $\mathfrak{H}$ auftretenden Schnitte längs den positiv reellen Achsen der w-Ebenen erst bei 4 einsetzen.

---

*) Das endgültige Regularitätsgebiet von $\tilde{r}$ enthält sicher nicht alle Punkte des bei (7.2) angegebenen Regularitätsgebietes von $W(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Das würde nämlich bedeuten, dass $\tilde{r}(k_j)$ regulär ist, falls alle q_i und zwei der drei unabhängigen $(q_i + q_j)$, $i \neq j$, zeitartig sind. Speziell wäre der Punkt $q_2 + q_3 = 0$, alle andern $q_i + q_j$ zeitartig, ein Regularitätspunkt, also wäre $\tilde{G} \equiv 0$ (siehe (6.18)). Es ist aber

$$G(x_0, \ldots, x_3) = \langle [R(x_0, x_1), R(x_2, x_3)] \rangle_0,$$

und dieser Ausdruck ist im allgemeinen sicher von null verschieden.

Aus der Hermitizität von $A(x)$ folgt, dass $r(x_0, \ldots, x_3)$ rein imaginär ist (siehe LSZ), d. h.

$$\tilde{r}^*(p_1, p_2, p_3) = -\tilde{r}(-p_1, -p_2, -p_3), \tag{3}$$

was durch analytische Fortsetzung ergibt:

$$\tilde{r}^*(k_1^*, k_2^*, k_3^*) = -\tilde{r}(-k_1, -k_2, -k_3). \tag{4}$$

Wir betrachten nun die Streuung zweier Teilchen mit den Anfangsimpulsen p, k und den Endimpulsen p', k' $(p + k = p' + k')$. Die zugehörige Streuamplitude $T(k', p'; k, p)$ ist eine Funktion der Variablen

$$\Delta^2 = -\frac{(k-k')^2}{4}, \qquad \omega = \frac{(k+k')\,(p+p')}{2\sqrt{(p+p')^2}}, \tag{5}$$

und es gilt nach LSZ

$$T(w, \Delta^2) = \tilde{r}(k, p, -p') \tag{6}$$

bis auf einen konstanten Faktor. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= p^2 = p'^2 = k'^2 = 1 \\ (p + k)^2 &= 2\,(1 + \Delta^2 + \omega\,(1 + \Delta^2)^{1/2}) \\ (k - p')^2 &= 2\,(1 + \Delta^2 - \omega\,(1 + \Delta^2)^{1/2}) \\ (p - p')^2 &= -4\,\Delta^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dieses T erfüllt eine Dispersionsrelation, falls die Impulsübertragung $\Delta^2 < 2$ ist[14]). D. h. für $0 \leqslant \Delta^2 < 2$ ist $T(\omega, \Delta^2)$, aufgefasst als Funktion von ω, analytisch in der ganzen komplexen Ebene mit Ausnahme der Schnitte in der reellen Achse

$$\omega \geqslant (1 - \Delta^2)\,(1 + \Delta^2)^{-1/2}, \quad \omega \leqslant -(1 - \Delta^2)\,(1 + \Delta^2)^{-1/2}. \tag{8}$$

Die Interpretation von T als Streuamplitude ist natürlich nur möglich unter Benützung der Asymptotenbedingung; nur dann kann ja eine S-Matrix definiert werden. Wir können jedoch formal (6) als Definition von T auffassen. Die genannte Regularitätseigenschaft von T bleibt dabei bestehen, da in ihrem Beweis die Asymptotenbedingung nicht wesentlich verwendet wird. Können wir also eine in $\mathfrak{H}$ reguläre Funktion $\tilde{r}$ angeben, so dass das daraus nach (6) berechnete T keine Dispersionsrelation erfüllt, so ist gezeigt, dass $\mathfrak{H}$ noch nicht das volle aus unseren Annahmen folgende Regularitätsgebiet von $\tilde{r}$ ist.

Ein solches Beispiel soll jetzt gegeben werden. Wir definieren:

$$N(k_1, k_2, k_3) = \sum_{k=0}^{3} (z_k + 3^{2/n}\, z_k^{-1}) + z_{12} + \alpha\, z_{23}^{-1} - a + i\varepsilon. \tag{9}$$

Dabei bedeutet

$$z_k = (4 - w_k)^{1/n}, \ z_{ik} = (4 - w_{ik})^{1/n}. \tag{10}$$

Ein in der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen Ebene eindeutiger Zweig dieser n-ten Wurzeln wird ausgewählt durch die Forderung, dass $u^{1/n}$ für positiv reelle u positiv reell sein soll. n ist eine positive ganze Zahl, α, a, ε sind positive reelle Zahlen, über deren Grösse wir noch verfügen können.

Unser Beispiel ist

$$\tilde{r}(k_1, k_2, k_3) = \Big\{ \prod_{(i_1, i_2, i_3)} N(k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}) \Big\}^{-1} - \{ \varepsilon \to -\varepsilon \}, \tag{11}$$

wobei das Produkt Π über alle Permutationen der Indizes 1, 2, 3 zu erstrecken ist. Das zweite Glied entsteht aus dem ersten durch die Substitution von $-\varepsilon$ an Stelle von ε und hat die Erfüllung von (4) zur Folge.

(11) befriedigt offensichtlich die Bedingungen A′, C′ und D′ aus § 5. (Es ist $z_{01} = z_{23}$, usw.!) Ebenso treten die richtigen Schnitte in den w_i und w_{ik} auf, so dass die verschärften Spektralbedingungen (1) erfüllt sind. Wir haben noch zu zeigen, dass unser $\tilde{r}$ bei geeigneter Wahl der verfügbaren Parameter in den durch I, § 5, definierten Punkten (und damit in $\mathfrak{H}$) analytisch ist. Die in I noch geforderten Beschränktheitsbedingungen im ∞ sind erfüllt, da $\tilde{r}$ im ∞ gegen null strebt.

Als Singularitäten von $\tilde{r}$ treten erstens die schon erwähnten Schnitte w_i (oder w_{ik}) $\geqslant 4$ auf. Diese liegen ausserhalb des gewünschten Regularitätsgebietes. Ist nämlich $q_i^2 > 0$ und w_i positiv reell, so ist auch $p_i^2 > 0$, also $p_i q_i \neq 0$ im Widerspruch zur Forderung $Im\, w_i = 0$.

Weiterhin können Pole auftreten, die natürlich in den Nullstellen eines der Faktoren N des Nenners liegen. Diese Nullstellen haben wir also zu untersuchen, soweit sie in der betrachteten Punktmenge I liegen. Wegen der Symmetrie von I genügt es, die Funktion $N(k_1, k_2, k_3)$ zu diskutieren.

Zuerst betrachten wir den in (9) auftretenden Ausdruck

$$z_i + 3^{2/n} z_i^{-1}.$$

Nach der Definition (10) liegen alle z_i (und auch alle z_{ik}) in einem Keil längs der positiv reellen Achse mit der Spitze im Ursprung und dem halben Öffnungswinkel $\varphi = \pi/n$:

$$Re\, z_i \geqslant 0, \quad |\, Im\, z_i \,| \leqslant (Re\, z_i) \cdot \mathrm{tg}\, \varphi \tag{12}$$

φ kann durch geeignete Wahl von n beliebig klein gemacht werden. Wir werden voraussetzen, dass n gross ist (z. B. $n \gg 10$).

Sei

$$y_i = Re\, (z_i + 3^{2/n} z_i^{-1}). \tag{13}$$

Es gilt

$$y_i \geqslant (| z_i | + 3^{2/n} | z_i |^{-1}) \cos \varphi$$

wegen (12) und weil mit z_i auch z_i^{-1} im Keil (12) liegt. Die in dieser Ungleichung auftretende Funktion von $|z_i|$ (ohne den Faktor $\cos\varphi$) nimmt ihr Minimum an für $| z_i | = 3^{1/n}$. Dieser Minimalwert beträgt

$$\mu = 2 \cdot 3^{1/n}. \tag{14}$$

Also

$$y_i \geqslant \mu \cos \varphi. \tag{15}$$

Wir führen die neue Konstante

$$\delta = a - 4 \mu \cos \varphi \tag{16}$$

ein und wählen a so, dass $0 < \delta \ll 1$.

Sei nun (k_1, k_2, k_3) eine Nullstelle von $N(k_1, k_2, k_3)$ mit $(q_i + q_j)^2 > 0$ für alle $i, j = 0, \ldots, 3$.

Mit N muss natürlich auch Re N verschwinden. Re N ist von der Form

$$Re\, N = A + B + C - \delta \tag{17}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum_{k\ 0}^{3} y_k - 4 \mu \cos \varphi \geqslant 0 \\ B &= Re\, z_{12} \geqslant 0 \\ C &= \alpha\, Re(z_{23}^{-1}) \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Aus Re $N = 0$ folgt also

$$A \leqslant \delta, B \leqslant \delta, C \leqslant \delta. \tag{19}$$

Wir werden zeigen, dass diese Ungleichungen bei geeigneter Wahl von α und n einen Widerspruch enthalten. Bei den folgenden Abschätzungen werden wir folgende Bezeichnungsweise verwenden:

$a \sim b$ heisst $a = b$ bis auf einen Term der Ordnung $o(\delta)/\delta + o(n)/n$

$a \lesssim b$ heisst $a < b$ bis auf einen Term derselben Ordnung.

Aus $B \leqslant \delta$ (d. h. $B \sim 0$) folgt wegen (12), dass $z_{12} \sim 0$ sein muss, also $w_{12} \sim 4$. Das bedeutet

$$(p_1 + p_2)^2 - (q_1 + q_2)^2 \sim 4, \quad (p_1 + p_2)\,(q_1 + q_2) \sim 0. \tag{20}$$

Das ist mit der Bedingung $(q_1 + q_2)^2 > 0$ nur verträglich, falls

$$(q_1 + q_2)^2 \sim 0\,, \ (p_1 + p_2)^2 \sim 4. \tag{21}$$

Wegen $k_1 + k_2 = - k_0 - k_3$ gilt auch

$$(q_0 + q_3)^2 \sim 0, \quad (p_0 + p_3)^2 \sim 4, \quad (p_0 + p_3)\,(q_0 + q_3) \sim 0. \tag{22}$$

Aus $A \leqslant \delta$ (also $A \sim 0$) folgt, dass alle y_i in der Nähe des Minimalwertes $\mu \cos \varphi$ liegen müssen, d. h.

$$|\,z_i\,| \sim 3^{1/n} \to |\,4 - w_i\,| \sim 3, \quad i = 0, \ldots, 3.$$

Die w_i liegen also alle in der Nähe des Kreises vom Radius 3 um den Punkt $w = 4$. Speziell muss gelten:

$$1 \lesssim Re\, w_i = p_i^2 - q_i^2 \lesssim 7, \quad |\,Im\, w_i\,| \lesssim 3, \tag{23}$$

woraus wegen $q_i^2 > 0$ folgt:

$$p_i^2 \gtrsim 1. \tag{24}$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $p_1 \in V_+$, $p_2 \in V_-$ (oder umgekehrt).

Dann gilt (in Analogie zur Dreiecksungleichung im Falle einer definiten Metrik) die Ungleichung:

$$(p_1 + p_2)^2 \leqq (\sqrt{p_1^2} - \sqrt{p_2^2})^2,$$

woraus wegen (21) und (24):

$$\sqrt{p_1^2} \gtrsim \sqrt{p_2^2} + 2 \gtrsim 3 \quad \text{oder} \quad \sqrt{p_2^2} \gtrsim \sqrt{p_1^2} + 2 \gtrsim 3.$$

Also, für $i = 1$ oder 2:

$$p_i^2 \gtrsim 9.$$

Wegen (23) muss dann $q_i^2 \gtrsim 2$ sein, und somit $|\,Im\, u_i\,| = 2\,|\,p_i q_i\,| \gtrsim 2 \cdot 3 \sqrt{2}$, im Widerspruch zur zweiten Bedingung in (23).

Dieser Fall kann somit nicht auftreten. Genau gleich können wir auch den Fall ausschliessen, dass p_0 und p_3 in verschiedenen Halbkegeln liegen.

2. Fall:

$$p_1 \in V_+,\; p_2 \in V_+,\; p_0 \in V_-,\; p_3 \in V_-. \tag{25}$$

(Der daraus durch Vorzeichenwechsel aller p_i entstehende Fall ergibt nichts Neues.)

Aus (24) ergibt sich $p_1 p_2 \gtrsim 1$, also ist (21) nur möglich, falls

$$\left.\begin{aligned} &p_1^2 \sim p_2^2 \sim p_1\, p_2 \sim 1, \\ &\text{und ebenso} \\ &p_0^2 \sim p_3^2 \sim p_0\, p_3 \sim 1. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Weiter, wegen $p_0 + p_3 = - p_1 - p_2$:

$$(p_0 + p_3)\,(p_1 + p_2) \sim - 4.$$

Alle vier linksstehenden Terme sind wegen (24) und (25) $\lesssim - 1$, also

$$p_i\, p_j \sim - 1, \quad i = 0{,}3, \quad j = 1, 2. \tag{27}$$

Da alle w_i auf dem erwähnten Kreis liegen müssen, folgt aus (26):

$$w_i \sim 1, \text{ also } p_i\, q_i \sim 0, \quad q_i^2 \sim 0, \tag{28}$$

und damit aus (21) und (22):

$$q_1\, q_2 \sim q_0\, q_3 \sim 0. \tag{29}$$

Ferner:

$$q_0^2 = - q_0\,(q_1 + q_2 + q_3) \sim 0, \tag{30}$$

also

$$q_0\, q_1 + q_0\, q_2 \sim 0,$$

woraus

$$q_0\, q_1 \sim q_0\, q_2 \sim 0, \tag{31}$$

wenn q_1 und q_2 im gleichen Halbkegel liegen. Dann aber auch

$$(q_2 + q_3)^2 = (q_0 + q_1)^2 \sim 0,$$

d. h.

$$q_2\, q_3 \sim 0 \quad \text{und analog} \quad q_1\, q_3 \sim 0. \tag{32}$$

Ebenso lassen sich (31) und (32) beweisen, falls q_0 und q_3 im gleichen Halbkegel liegen.

Sei nun keine der beiden Annahmen erfüllt, z. B.

$$q_0 \in V_-,\ q_1 \in V_+,\ q_2 \in V_-,\ q_3 \in V_+, \text{ aber } (q_2 + q_3) \in V_+.$$

(Alle andern Fälle sind von der gleichen Struktur und lassen sich deshalb analog behandeln.) Aus (30) ergibt sich dann:

$$q_0\, q_1 + q_0\,(q_2 + q_3) \sim 0.$$

Beide Terme sind negativ, also

$$q_0\, q_1 \sim 0, \ q_0\,(q_2 + q_3) \sim 0, \text{ d. h. } q_0\, q_2 \sim 0 \text{ wegen (29)}.$$

Dann aber auch

$$q_2\, q_3 \sim 0, \ q_1\, q_3 \sim 0,$$

die Gleichungen (31) und (32) gelten also auch in diesem Fall.

Zusammenfassend haben wir bis jetzt gefunden:

$$p_i\, p_k \sim \pm 1, \quad q_i\, q_k \sim 0, \quad p_i\, q_i \sim 0, \quad i, k = 0,.., 3. \tag{33}$$

Wir haben nun noch die Bedingung $C \leqslant \delta$ aus (19) zu diskutieren: Aus (33) ergibt sich

$$Re\, w_{23} = (p_2 + p_3)^2 - (q_2 + q_3)^2 \sim 0, \tag{34}$$

da p_2 und p_3 nach (25) in verschiedenen Halbkegeln liegen; und

$$Im\, w_{23} = 2\,(p_2 + p_3)\,(q_2 + q_3) \sim 2\,(p_2\, q_3 + p_3\, q_2). \tag{35}$$

Sei $q_3 \in V_+$. Dann

$$(p_3 + q_3)^2 = p_3^{\,2} + q_3^{\,2} + 2\, p_3\, q_3 \sim 1,$$

d. h. $(p_3 + q_3) \in V_-$. Also ist $p_2(p_3 + q_3) < 0$ und damit

$$0 < p_2\, q_3 < - p_2\, p_3 \sim 1.$$

Auf ähnliche Weise zeigt man im Falle $q_3 \in V_-$:

$$0 > p_2\, q_3 > p_2\, p_3 \sim -1,$$

also $| p_2 q_3 | \lesssim 1$, und analog $| p_3 q_2 | \lesssim 1$. (35) wird damit zu

$$| Im\, w_{23} | \lesssim 4. \tag{36}$$

$C \leqslant \delta$ bedeutet

$$Re\, z_{23}^{-1} \leqslant \frac{\delta}{\alpha}, \tag{37}$$

was nach (12) ergibt

$$| z_{23} |^{-1} \leqslant \frac{\delta}{\alpha \cos \varphi}$$

und schliesslich

$$| z_{23} |^{2n} = | 4 - w_{23} |^2 \geqslant \left[\frac{\alpha \cos \varphi}{\delta}\right]^{2n}. \tag{38}$$

Aber, nach (34) und (36):

$$| 4 - w_{23} |^2 = (4 - Re\, w_{23})^2 + (Im\, w_{23})^2$$

$$\lesssim 16 + 16 = 32.$$

Aus (38) folgt damit:

$$\left[\frac{\alpha \cos \varphi}{\delta}\right]^{2n} \lesssim 32. \tag{39}$$

Wir können sicher α, δ, n so wählen, dass

$$\left[\frac{\alpha \cos \varphi}{\delta}\right]^{2n} > 33. \tag{40}$$

Dann ist Bedingung (39) verletzt, also hat Re N – und damit auch N selbst – keine Nullstellen in $\mathfrak{H}$. Das durch (11) definierte $\tilde{r}$ erfüllt also alle in § 5 angegebenen Bedingungen mit Ausnahme der Identität II, falls wir die verfügbaren Konstanten so wählen, dass Bedingung (40) erfüllt ist.

Die zugehörige Streuamplitude $T(\omega, \Delta^2)$ ergibt sich aus $\tilde{r}$ gemäss (6) und (7) durch Einsetzen der Argumente

$$\left.\begin{aligned} w_i &= 1, \quad i = 0, \ldots, 3 \\ w_{12} &= 2\,(1 + \Delta^2 + \omega\,(1 + \Delta^2)^{1/2}) \\ w_{13} &= 2\,(1 + \Delta^2 - \omega\,(1 + \Delta^2)^{1/2}) \\ w_{23} &= -\,4\,\Delta^2. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Wir halten $\Delta^2 \geqslant 0$ fest und betrachten T als Funktion der komplexen Variablen ω. Es ist zu untersuchen, für welche Werte von Δ^2 T in der geschnittenen ω-Ebene (8) analytisch ist.

Als mögliche Singularitäten von T treten wieder die bekannten Schnitte in der Definition von z_i und z_{ik} sowie Pole auf. Die Schnitte in den z_i und in z_{23} spielen keine Rolle wegen $w_i < 4$ und $w_{23} < 4$. Die durch z_{12} und z_{13} erzeugten Schnitte sind gerade die gewünschten (siehe (8)). Eine Dispersionsrelation besteht also, falls keine Pole auftreten, d. h. falls der Nenner in der Definition von T nirgends verschwindet.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} z_{12} &= [2\,(1 - \Delta^2 - w\,(1 + \Delta^2)^{1/2}]^{1/n} \\ z_{13} &= [2\,(1 - \Delta^2 + \omega\,(1 + \Delta^2)^{1/2}]^{1/n} \\ z_{23} &= [4\,(1 + \Delta^2)]^{1/n}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Also wird (9) zu

$$N(k_i, k_j, k_h) = 4\,\mu + z_{ij} + \alpha\, z_{jh}^{-1} - a + i\,\varepsilon, \tag{43}$$

(i, j, h) eine Permutation von (1, 2, 3).

Nach (16) ist

$$4\,\mu - a = 4\,\mu\,(1 - \cos\varphi) - \delta. \tag{44}$$

$N = 0$ bedeutet also

$$z_{ij} + \alpha\, z_{jh}^{-1} = \delta - 4\,\mu\,(1 - \cos\varphi) - i\,\varepsilon. \tag{45}$$

Der Realteil des links stehenden Ausdrucks ist nie negativ, Lösungen existieren also höchstens, falls

$$\delta \geqslant 4\,\mu\,(1 - \cos\varphi). \tag{46}$$

Diese Ungleichung sei erfüllt.

Wir betrachten zuerst den Fall $i = 2$, $j = 1$, $h = 3$. Aus (45) folgt:

$$Re\, z_{12} \leqslant \delta, \text{ d. h. } z_{12} \sim 0,$$

also nach (42):

$$\omega \sim (1 - \Delta^2)\,(1 + \Delta^2)^{-1/2}$$

und damit

$$z_{13} \sim [4\,(1 - \Delta^2)]^{1/n}.$$

Aus der weiteren Bedingung Re $z_{13}^{-1} < \delta/\alpha$ folgt wie bei (37):

$$|\, z_{13}\,|^n \sim 4\,|\,1 - \Delta^2\,| > \left[\frac{\alpha \cos\varphi}{\delta}\right]^n > \sqrt{33},$$

also wegen $\Delta^2 \geqslant 0$:

$$4\,\Delta^2 > 4 + \sqrt{33} > 2 \cdot 4.$$

Unterhalb der Lehmannschen Schranke $\Delta^2 = 2$ gibt der hier diskutierte Faktor N zu keinem Pol Anlass.

Ebenso erhalten wir im Falle $i = 2$, $j = 3$, $h = 1$ keine Nullstellen von N. In einer solchen müsste nämlich gelten

$$Re\, z_{23} < \delta, \quad \text{d. h. } 1 + \Delta^2 \sim 0,$$

was wegen $\Delta^2 \geqslant 0$ nicht möglich ist.

Zu diskutieren bleibt noch der Fall $i = 1$, $j = 2$, $h = 3$. (Die andern drei Fälle unterscheiden sich von den hier diskutierten nicht wesentlich, sie entstehen daraus durch Vorzeichenumkehr von ω.) Hier wird (45) zu

$$z_{12} = \delta - 4\,\mu\,(1 - \cos\varphi) - i\,\varepsilon - \alpha\,[4(1 + \Delta^2)]^{-1/n}. \tag{47}$$

Wir definieren eine Konstante $\overline{\Delta^2}$ durch

$$\delta = 4\,\mu\,(1 - \cos\varphi) + \alpha\,[4\,(1 + \overline{\Delta^2})]^{-1/n}. \tag{48}$$

(47) wird damit zu

$$z_{12} = \alpha\,[4\,(1 + \overline{\Delta^2})]^{-1/n} - \alpha\,[4\,(1 + \Delta^2)]^{-1/n} - i\,\varepsilon. \tag{49}$$

Ist nun $\Delta^2 > \overline{\Delta^2}$ und ε genügend klein, so liegt die rechte Seite dieser Gleichung im Keil (12). Dann kann das so bestimmte z_{12} nach ω aufgelöst werden, wobei das ε-Glied bewirkt, dass dieser Pol von T (um einen solchen handelt es sich ja) nicht gerade auf die reelle Achse zu liegen kommt.

Eine Dispersionsrelation besteht also nicht für $\Delta^2 > \overline{\Delta^2}$!

$\overline{\Delta^2}$ ist nicht beliebig wählbar. Aus den Bedingungen (40) und (46) ergibt sich:

$$[4\,(1+\overline{\Delta^2})]^{1/n} = \frac{\alpha}{\delta - 4\,\mu\,(1-\cos\varphi)} > \frac{\alpha}{\delta},$$

$$4\,(1+\overline{\Delta^2}) > \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^n > \sqrt{33},$$

also

$$\overline{\Delta^2} > \frac{\sqrt{33}-4}{4}. \tag{50}$$

Sei nun umgekehrt ein $\overline{\Delta^2}$ vorgegeben, das (50) erfüllt. Ebenso geben wir ein $\delta \ll 1$ vor. Zu jedem n ergibt dann (48) einen Wert von α. Bedingung (46) kann offensichtlich durch Wahl eines genügend grossen n erfüllt werden ($\varphi = \pi/n$ kann beliebig klein gemacht werden). Aus (48) folgt

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{4\,\mu}{\alpha}\,(1-\cos\varphi) + [4\,(1+\overline{\Delta^2})]^{-1/n}.$$

Man erhält daraus

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\delta}{\alpha\cos\varphi}\right)^{2n} = [16\,(1+\overline{\Delta^2})^2]^{-1} < 33^{-1}.$$

Für ein genügend grosses n ist also auch Bedingung (40) erfüllt.

Wir haben somit folgendes Ergebnis: Die Konstanten a, α, n und ε in unserem Beispiel können so gewählt werden, dass $\tilde{r}$ alle Bedingungen mit Ausnahme von II erfüllt, dass aber die zugehörige Streuamplitude für Impulsübertragungen Δ^2, die grösser als eine vorgegebene Zahl $\overline{\Delta^2}$ sind, keiner Dispersionsrelation genügt, wenn nur diese Zahl $\overline{\Delta^2}$ der Bedingung (50) entspricht. Die in (50) gegebene Schranke ist aber kleiner als die Lehmannsche Schranke $\overline{\Delta^2} = 2$.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, dass $\mathfrak{H}$ zumindest im Falle nicht verschwindender Ruhemasse noch nicht das volle Regularitätsgebiet von $\tilde{r}$ ist.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Jost, möchte ich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche fördernde Diskussionen während ihrer Ausführung. Dem Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung habe ich für ein Stipendium zu danken.

Literatur

[1]) A. S. Wightman, Phys. Rev. *101*, 860 (1956).
[2]) R. Jost, Helv. Phys. Acta *30*, 409 (1957).
[3]) N. Burgoyne, Nuovo Cim. *8*, 607 (1958). – G. Lüders und B. Zumino, Phys. Rev. *110*, 1450 (1958).

4) H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cim. *6*, 319 (1957). – V. Glaser, H. Lehmann und W. Zimmermann, Nuovo Cim. *6*, 1122 (1957) (zitiert als LSZ resp. GLZ).
5) H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann, Nuovo Cim. *1*, 205 (1955).
6) R. Jost, Helv. Phys. Acta *31*, 263 (1958).
7) L. Schwartz, Théorie des distributions (Verlag Hermann, Paris), Bd. I, 2. Aufl, 1957, Bd. II, 1951 (zitiert als Schwartz I, II).
8) L. Schwartz, Marcel-Riesz-Festschrift, Suppl. zu Medd. Lunds mat. sem. 1952.
9) D. Hall und A. S. Wightman, Dan. mat. fys. medd. *31*, No. 5 (1957).
10) S. Bochner und W. Martin, Several Complex Variables (Princeton 1948), p. 34.
11) Schwartz II, p. 89.
12) Schwartz I, p. 74, und II, p. 94.
13) K. Nishijima, Phys. Rev. *111*, 995 (1958).
14) H. Lehmann, Nuovo Cim. *10*, 579 (1958).