Necessary restriction on Wightman functions

Autor(en): **Hepp, K. / Jost, R. / Ruelle, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **34 (1961)**

Heft V

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-113183

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Necessary Restriction on Wightman Functions*)

by **K. Hepp, R. Jost, D. Ruelle**, and **O. Steinmann**
Seminar für Theoretische Physik der ETH, Zürich, Switzerland

(23. VIII. 1961)

Wightman has translated his axioms of field theory into properties of the vacuum expectation values of field operators (Wightman functions)[1].

We will, as usual, illustrate the following remarks by the theory of a real scalar field $A(x)$; then these functions take the form

$$\mathfrak{W}_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = (\Omega, A(x_1)\, A(x_2) \ldots A(x_n)\, \Omega)\,.$$

The necessary conditions for a sequence of such functions to correspond to the theory of a scalar field naturally decompose into linear and non-linear restrictions. It seems that one essential non-linear restriction has been overlooked till now. It is the purpose of this letter to emphasize this additional condition. It has to do with the uniqueness of the vacuum state Ω.

We need the following axioms explicitly:

1. The translational invariance and the existence of a unitary translation operator $T(a)$ defined by $T(a)\,\Omega = \Omega$, $T(a)\,A(x)\,T^*(a) = A(x+a)$.
2. The spectrum conditions for the energy momentum vector P_μ defined by $T(a) = \exp i(P_\mu a^\mu)$: The spectrum of P has an isolated simple eigenvalue at $p_\mu = 0$, corresponding to the eigenvector Ω. All other points of the spectrum are in the forward cone.

   The second axiom has the following consequence: let $\chi(a) = (2\pi)^{-4} \int e^{i(p,a)}\, \tilde{\chi}(p)\, d^4p$ be a testing function and let the support of $\tilde{\chi}(p)$ contain only the point $p = 0$ of the energy momentum spectrum. Then $\int \chi(a)\, T(a)\, d^4a = \tilde{\chi}(0)\, E_\Omega$ where E_Ω is the projection on the vacuum state Ω.

*) Die vorliegende kurze Note war als Mitteilung in Phys. Rev. Letters gedacht. Sie teilte aber das Schicksal der grundlegenden Arbeit von Hall und Wightman beim Phys. Rev. und gelangt daher in ihrer ursprünglichen Form hier zum Abdruck. R. J.

This has as consequence for the Wightman functions

$$\int \chi(a)\, \mathfrak{W}_n(x_1, \ldots x_{k-1}, x_k + a, x_{k+1} + a, \ldots x_n + a)\, d^4a =$$
$$= \tilde{\chi}(0)\, \mathfrak{W}_{k-1}(x_1, \ldots x_{k-1})\, \mathfrak{W}_{n-k+1}(x_k, \ldots x_n)\,. \tag{1}$$

Proof

$$\int \chi(a)\, \mathfrak{W}(x_1, \ldots x_{k-1}, x_k + a, \ldots x_n + a)\, d^4a =$$
$$= (\Omega, A(x_1) \ldots A(x_{k-1}) \int \chi(a)\, T(a)\, d^4a\, A(x_k) \ldots A(x_n)\, \Omega) =$$
$$= (\Omega, A(x_1) \ldots A(x_{k-1})\, \Omega)\, (\Omega, A(x_k) \ldots A(x_n)\, \Omega)\,.$$

Equation (1) is essentially the additional condition mentioned above.

In a more technical way the following can be easily shown: If a sequence of (tempered) distributions $\mathfrak{W}_n(x_1, \ldots x_n)$ satisfies all the Wightman properties and in addition the equations

$$\int \varphi^*(x_1, \ldots x_n)\, \mathfrak{W}_{2n}(x_n, \ldots x_1, y_1, \ldots y_n)\, \varphi(y_1, \ldots y_n)\, d^{4n}x\, d^{4n}y =$$
$$= \left| \int \mathfrak{W}_n(x_1, \ldots x_n)\, \varphi(x_1, \ldots x_n)\, d^{4n}x \right|^2 \tag{2}$$

for all testing functions $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ of which the Fouriertransform $\tilde{\varphi}(p_1, \ldots p_n)$ vanishes if $p_1 + p_2 + \ldots + p_n \neq 0$ is in the spectrum of P, then these $\mathfrak{W}_n$ are Wightman functions to a field $A(x)$, which satisfies all the Wightman axioms. Our condition (2) insures the uniqueness of the vacuum.

Remarks

1. The condition (2) is seemingly weaker than (1). It however insures (together with the Wightman-conditions) the validity of (1).
2. The condition (2) is independent of the Wightman conditions. In order to see this we remark that from two different sequences $\mathfrak{W}_n^{(1)}$ and $\mathfrak{W}_n^{(2)}$ satisfying the Wightman conditions we can construct a third sequence $\mathfrak{W}_n = \alpha\, \mathfrak{W}_n^{(1)} + (1-\alpha)\, \mathfrak{W}_n^{(2)}$, also satisfying the same conditions, provided $0 \leq \alpha \leq 1$. If we assume now that (2) is also satisfied, then (1) can be used for $\mathfrak{W}_n$, $\mathfrak{W}_n^{(1)}$ and $\mathfrak{W}_n^{(2)}$ and leads (provided that $\tilde{\chi}(0) \neq 0$) to

$$(\alpha\, \mathfrak{W}_k^{(1)} + (1-\alpha)\, \mathfrak{W}_k^{(2)})\, (\alpha\, \mathfrak{W}_{n-k}^{(1)} + (1-\alpha)\, \mathfrak{W}_{n-k}^{(2)}) =$$
$$= \alpha\, \mathfrak{W}_k^{(1)}\, \mathfrak{W}_{n-k}^{(1)} + (1-\alpha)\, \mathfrak{W}_k^{(2)}\, \mathfrak{W}_{n-k}^{(2)} \qquad \text{or, if} \qquad \alpha(1-\alpha) \neq 0\,,$$

$$(\mathfrak{W}_k^{(1)} - \mathfrak{W}_k^{(2)})\,(\mathfrak{W}_{n-k}^{(1)} - \mathfrak{W}_{n-k}^{(2)}) = 0$$

from which we get the contradiction $\mathfrak{W}_m^{(1)} = \mathfrak{W}_m^{(2)}$ for all m.

3. The condition (1) is closely related to Haag's cluster property for Wightman functions[2]).

The preceding note grew out of a discussion about a paper by E. C. G. SUDARSHAN and K. BARDAKCI[3]).

References

1) A. S. WIGHTMAN, Phys. Rev. *101*, 860 (1956).

2) R. HAAG, Phys. Rev. *112*, 669 (1958); G. F. DELL'ANTONIO and P. GULMANELLI, Nuovo Cimento [10] *7*, 38 (1959); H. ARAKI, Annals of Physics *11*, 260 (1960).

3) E. C. G. SUDARSHAN and K. BARDAKCI: The Nature of the Axioms of Relativistic Quantum Field Theory (preprint NYO – 9687).