

# Zur Definition der retardierten und zeitgeordneten Produkte

Autor(en): **Steinmann, O.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **36 (1963)**

Heft I

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113359>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zur Definition der retardierten und zeitgeordneten Produkte

von **O. Steinmann**\*)

Seminar für theoretische Physik der ETH, Zürich

(15. VI. 62)

*Summary.* The product of a Wightman function  $\langle A(x_0) \dots A(x_n) \rangle_0$  with step-functions in the difference-variables  $(x_i - x_j)$  can be defined in such a way that the well-known retarded and time-ordered functions become Lorentz invariant distributions. Except for the two-point-case ( $n = 1$ ) the proof is given only for two-dimensional space-time. The definition is unique up to terms with support in the points  $x_i = x_j, i \neq j$ .

### 1. Einleitung

In der sog. axiomatischen Feldtheorie spielen die bekannten retardierten und zeitgeordneten Produkte<sup>1)</sup> von Feldoperatoren sowie allgemeinere Bildungen ähnlicher Art<sup>2)</sup> eine grosse Rolle. Speziell interessiert man sich für die Vakuumerwartungswerte (im folgenden VEW genannt) solcher Produkte. Diese sind immer definiert als Summen von mit Sprungfunktionen multiplizierten Wightman-Funktionen<sup>3)</sup>. Nun sind bekanntlich die Wightman-«Funktionen» in Wirklichkeit Distributionen, das Produkt mit einer Sprungfunktion ist also gar nicht definiert. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, dass zumindest im zweidimensionalen Fall eine mathematisch exakte Definition der betrachteten Ausdrücke als Distributionen derart möglich ist, dass sie alle gewünschten (im folgenden näher spezifizierten) Eigenschaften aufweisen. Die Definition ist nicht eindeutig möglich; Unbestimmtheiten treten in den Punkten auf, in denen zwei oder mehrere der Argumente zusammenfallen.

Wir betrachten wie üblich den Fall eines einzigen Skalarfeldes  $A(x)$ , das den Wightmanschen Axiomen<sup>3)</sup> genügt. Von spezieller Bedeutung werden für uns dabei die Voraussetzungen der Lorentz-Invarianz (genauer: Invarianz gegen die inhomogene eigentliche Lorentz-Gruppe) und der Lokalität sein, während die Positivität der Energie keine Rolle spielen wird.

Nach D. RUELLE<sup>4)</sup> führen wir formal folgende, als Zyklen bezeichnete Operatoren ein:

$$Z(x_0, \dots, x_k) = \sum_{P \in \mathfrak{S}_{k-1}} (-1)^{\sigma_P} \prod_{i=1}^k \theta[\sigma_P^i (x_{P_i} - x_{P_{i-1}})] A(x_{P_0}) \dots A(x_{P_k}). \quad (1)$$

Dabei ist

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^0 < 0 \\ 1 & \text{für } x^0 > 0, \end{cases} \quad \sigma_P^i = \pm 1, \quad \sigma_P = \prod_i \sigma_P^i.$$

\*) Gegenwärtige Adresse: Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, USA.

Für zwei Permutationen  $P, P'$ , die sich nur durch die Vertauschung zweier benachbarter Variablen  $x_{P_{i-1}}, x_{P_i}$  unterscheiden, soll  $\sigma_P^i = \sigma_{P'}^i$  für alle  $i \neq j$  gelten. Unter dieser Bedingung ist  $Z$  formal lorentzkovariant.

Wir interessieren uns für die VEW von Produkten von Zyklen zur totalen Variablenzahl  $n + 1$ :

$$z(x_0, \dots, x_n) = \langle Z_1(x_0, \dots, x_{k_1}) Z_2(x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2}) \dots Z_h(x_{k_{h-1}+1}, \dots, x_n) \rangle_0. \quad (2)$$

Die Menge aller  $z$  dieser Form bezeichnen wir mit  $\mathfrak{Z}_n$ .  $\mathfrak{Z}_n$  enthält speziell die retardierte Funktion  $r(x_0, \dots, x_n)$  und die zeitgeordnete Funktion  $\tau(x_0, \dots, x_n)$ . Unser Ziel ist es, der vorerst rein formalen Definition (1), (2) eine exakte Bedeutung zu geben.

Die «Funktionen»  $z(x_i)$  haben formal folgende Eigenschaften, die bei der exakten Definition erhalten bleiben sollen:

### a) Lorentz-Invarianz

$z$  ist invariant gegen Translationen, also nur abhängig von den Variablen  $\xi_i = x_{i-1} - x_i, i = 1, \dots, n$ . Ferner ist  $z$  invariant gegen die eigentliche homogene Lorentz-Gruppe  $L_{\uparrow}$ . Sei  $A_{\mu\nu}$  der Differentialoperator

$$A_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n A_{\mu\nu}^i, \quad A_{\mu\nu}^i = \xi_i^\mu \frac{\partial}{\partial \xi_i^\nu} \pm \xi_i^\nu \frac{\partial}{\partial \xi_i^\mu}, \quad \mu < \nu, \quad (3)$$

wobei das obere Vorzeichen gilt, falls  $\mu = 0$  ist, das untere, falls  $\mu > 0$ . Invarianz gegen  $L_{\uparrow}$  ist äquivalent zu der Bedingung

$$A_{\mu\nu} z = 0 \text{ für alle } 0 \leq \mu < \nu \leq 3. \quad (4)$$

Im zweidimensionalen Fall tritt nur  $A_{01}$  auf, das wir einfach mit  $A$  bezeichnen werden.

Distributionentheoretisch bedeutet (4), dass die (temperierte) Distribution  $z(x_0, \dots, x_n)$  auf dem Raum  $\mathfrak{U} < \mathfrak{S}$  der Testfunktionen  $u(\xi_1, \dots, \xi_n)$  der Form

$$u(\xi_i) = \sum_{\mu < \nu} A_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \psi_{\mu\nu} \in \mathfrak{S} \quad (5)$$

verschwinden muss. Verwenden wir für die Distributionen die Skalarprodukt-Schreibweise, so heisst unsere Bedingung symbolisch:

$$(z | \mathfrak{U}) = 0. \quad (6)$$

### b) Trägerbedingungen

Jedes  $z$  weist formal einen Träger  $T_z$  auf, der natürlich lorentzinvariant ist. Zum Beispiel ist  $T_\tau$  der ganze Raum,  $T_r$  die Menge  $(x_0 - x_i) \in \bar{V}_+$  für alle  $i$ . ( $V_+$  ist der offene,  $\bar{V}_+$  der abgeschlossene Vorkegel.) Wir definieren:

$$T'_z = \overline{\mathfrak{C}T_z}, \quad (7)$$

das heisst  $T'_z$  ist die abgeschlossene Hülle der Komplementärmenge von  $T_z$ . Den Unterraum von  $\mathfrak{S}$  der Testfunktionen mit Träger in  $T'_z$  nennen wir  $\mathfrak{T}_z$ . Bedingung b) lautet dann

$$(z | \mathfrak{T}_z) = 0. \quad (8)$$

### c) Symmetrien, Identitäten

Einzelne  $z$  sind invariant gegen gewisse Permutationen der Argumente  $x_i$ , z. B.  $\tau$  gegen die volle Permutationsgruppe,  $r$  gegen beliebige Permutationen der Argumente  $x_1, \dots, x_n$ . Ferner bestehen innerhalb  $\mathfrak{Z}_n$  lineare Abhängigkeiten. Zum Beispiel müssen im Fall  $n = 1$  die Identitäten

$$\begin{aligned} a(x_0, x_1) &= -r(x_1, x_0) = W(x_0, x_1) - W(x_1, x_0) - r(x_0, x_1), \\ \tau(x_0, x_1) &= r(x_0, x_1) + W(x_1, x_0), \\ \bar{\tau}(x_0, x_1) &= r(x_0, x_1) + W(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (9)$$

etc., gelten. Dabei bedeutet  $a$  die avancierte,  $\bar{\tau}$  die antizeitgeordnete und  $W$  die gewöhnliche Wightmansche Funktion.

Die erwähnten Symmetrien schreiben wir ebenfalls in der Form linearer Identitäten, zum Beispiel

$$\tau(x_0, x_1) = \tau(x_1, x_0),$$

und verlangen, dass die zu leistende Definition der  $z$  alle diese Identitäten erfüllt.

Das einzuschlagende Verfahren soll an einem eindimensionalen Beispiel kurz erläutert werden: Sei  $T(x)$  eine temperierte Distribution. (Die Voraussetzung der Temperiertheit ist in diesem Beispiel unwesentlich, da eine beliebige Distribution immer als Summe einer temperierten und einer in einer Umgebung des kritischen Punktes  $x = 0$  verschwindenden Distribution dargestellt werden kann.) Wir suchen eine temperierte Distribution  $\theta(x) T(x)$ , das heisst eine Distribution mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} (\theta(x) T(x) | \varphi(x)) &= 0, \text{ falls } \varphi(x) \equiv 0 \text{ in } x \geq 0, \\ (\theta(x) T(x) | \varphi(x)) &= (T(x) | \varphi(x)), \text{ falls } \varphi(x) \equiv 0 \text{ in } x \leq 0. \end{aligned}$$

Wir benützen die Tatsache, dass  $T$  global von einer endlichen Ordnung ist<sup>5)</sup>, das heisst  $T$  ist ein stetiges lineares Funktional auf dem Funktionenraum  $\mathfrak{S}_{NK}$ , bestehend aus den  $N$  mal stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi(x)$ , für die

$$p_{nk}(x) = |x|^k \left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right|, \quad n \leq N, \quad k \leq K$$

auf der ganzen  $x$ -Achse beschränkt ist. Die Topologie in  $\mathfrak{S}_{NK}$  wird durch die Seminormen

$$p_{nk} = \sup_x p_{nk}(x)$$

festgelegt. Es handelt sich um endlich viele Seminormen,  $\mathfrak{S}_{NK}$  ist also ein Banachraum bezüglich der Norm<sup>6)</sup>

$$p = \sup p_{nk}$$

Wir betrachten den Unterraum  $\mathfrak{S}_{NK}^0 \subset \mathfrak{S}_{NK}$  der Testfunktionen, die in  $x = 0$  mit allen Ableitungen bis zur Ordnung  $N$  verschwinden. Mit  $\varphi(x)$  gehört auch  $\theta(x)\varphi(x)$  zu  $\mathfrak{S}_{NK}^0$ , auf  $\mathfrak{S}_{NK}^0$  ist somit  $\theta T$  durch

$$(\theta T | \varphi) = (T | \theta\varphi)$$

eindeutig definiert. Da die Abbildung  $\varphi \rightarrow \theta\varphi$  von  $\mathfrak{S}_{NK}^0$  in sich stetig ist, ist das so definierte lineare Funktional  $\theta T$  auf  $\mathfrak{S}_{NK}^0$  stetig und kann deshalb zu einem auf ganz  $\mathfrak{S}_{NK}$  definierten stetigen linearen Funktional erweitert werden<sup>7)</sup>. Diese Erweiterung ist nicht eindeutig, sondern enthält einen unbestimmten Summanden der Form

$$\sum_{n=0}^N c_n \delta^{(n)}(x).$$

In unserem Beispiel kann die gesuchte Erweiterung durch folgendes Verfahren explizit konstruiert werden:

Sei  $\varphi \in \mathfrak{S}_{NK}$ . Wir setzen  $\varphi_n = \varphi^{(n)}(x)|_{x=0}$  und führen beliebige Funktionen  $\gamma_n(x) \in \mathfrak{S}_{NK}$  mit der Eigenschaft

$$\left. \frac{d^m \gamma_n}{dx^m} \right|_{x=0} = \delta_{nm}$$

ein. Dann liegt

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - \sum_{n=0}^N \varphi_n \gamma_n(x)$$

in  $\mathfrak{S}_{NK}^0$ . Geben wir den unbestimmten Ausdrücken  $(\theta T | \gamma_n)$  willkürlich die Werte  $c_n$ , so können wir definieren

$$(\theta T | \varphi) = (\theta T | \varphi') + \sum c_n \varphi_n.$$

Das ist eine Distribution mit den gewünschten Eigenschaften.

Das so definierte  $\theta T$  sollte nicht als Produkt zweier Distributionen aufgefasst werden, da nicht alle bei einem Produkt normalerweise bestehenden Eigenschaften vorhanden sind. Zum Beispiel kann  $\theta T$  nicht nach der Produktregel differenziert werden. Ferner gilt für eine Distribution  $T$  mit Träger in  $x \geq 0$  die Beziehung  $\theta T = T$  im allgemeinen nicht, wie man am Beispiel  $T = \delta(x)$  sehen kann. Ist schliesslich  $T$  im Intervall  $x \geq 0$  eine positive Distribution (das heisst ist  $(\tau/\varphi) \geq 0$  für alle nicht-negativen  $\varphi$  mit Träger in  $x \geq 0$ ), so braucht  $\theta T$  durchaus nicht positiv zu sein (Beispiel:  $T = P 1/x$ ).

Nach diesem Vorbild werden wir im folgenden die Distributionen  $z \in \mathfrak{Z}_n$  konstruieren, wobei wir immer die Nebenbedingungen a)–c) im Auge zu behalten haben werden. Wir benützen wieder die Tatsache, dass die Wightman-Funktion  $W(\xi_1, \dots, \xi_n)$  als temperierte Distribution als lineares stetiges Funktional auf einem Funktionenraum  $\mathfrak{S}_{NK}$  folgender Form aufgefasst werden kann:

$\mathfrak{S}_{NK}$  besteht aus den Funktionen  $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , die  $N$  mal stetig differenziert werden können und für die die Ausdrücke

$$\phi_{Dk}(\xi_i) = \prod_i |\xi_i|^{k_i} |D\varphi|, \quad k = \{k_i\}, \quad \sum k_i \leq K \quad (10)$$

im ganzen Raum beschränkt sind und im  $\infty$  verschwinden. Dabei ist  $D$  ein beliebiger Differentialoperator der Form

$$D = \prod_{i,v} \delta_{iv}^{\alpha_{iv}}, \quad \delta_{iv} = \frac{\partial}{\partial \xi_i^v}, \quad \sum_{i,v} \alpha_{iv} \leq N.$$

Die Topologie in  $\mathfrak{S}_{NK}$  wird durch die Seminormen

$$\phi_{Dk} = \sup \phi_{Dk}(\xi_i) \quad (11)$$

definiert. Es handelt sich wieder um ein endliches System von Seminormen,  $\mathfrak{S}_{NK}$  ist also wieder ein Banachraum. Wir werden im folgenden die einfachere Bezeichnung  $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}_{NK}$  verwenden.  $W$  ist ein Element des Dualraums  $\overline{\mathfrak{S}}^*$ .

Wir erwarten zunächst, dass Schwierigkeiten in den Punkten auftreten, in denen zwei 0-Komponenten  $x_i^0$  zusammenfallen. Im § 2) werden wir jedoch zeigen, dass auf Grund der Lokalitätsvoraussetzung die Distribution  $z$  auf einem Unterraum  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0 < \overline{\mathfrak{S}}$  eindeutig festgelegt ist, der wie folgt charakterisiert werden kann: Nach Gleichung (2) ist  $z$  der VEW eines Produkts von Zyklen  $Z_j$ . Wir nennen einen Punkt  $(x_0, \dots, x_n)$   $z$ -kritisch, wenn zwei der im selben Faktor  $Z_j$  auftretenden Argumente  $x_i$  zusammenfallen (das heisst mit allen vier Komponenten).  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0$  besteht dann aus den Testfunktionen  $\in \overline{\mathfrak{S}}$ , die in allen  $z$ -kritischen Punkten mit allen Ableitungen (das soll hier und im folgenden immer bedeuten: mit allen Ableitungen bis zur Ordnung  $N$ ) verschwinden.

Betrachten wir jetzt einen Raum  $\mathfrak{S}_{N'K'}^0$ ,  $N' \geq N$ ,  $K' \geq K$ , den wir analog zu (11) mit einer Topologie versehen, sowie den entsprechenden Unterraum  $\mathfrak{S}_{N'K'z}^0$ .  $\mathfrak{S}_{N'K'}$  ist in  $\overline{\mathfrak{S}}$  dicht, ebenso  $\mathfrak{S}_{N'K'z}^0$  in  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0$ . Die Überlegungen des § 2 können sofort auf diesen Fall übertragen werden, das heisst  $z$  ist auf  $\mathfrak{S}_{N'K'z}^0$  als lineares stetiges Funktional definiert.

Sei  $\mathfrak{U}_{N'K'}$  der Raum der Funktionen der Form (5), wobei die Bedingung  $\psi_{\mu\nu} \in \mathfrak{S}$  durch  $\psi_{\mu\nu} \in \mathfrak{S}_{N'K'}$ ,  $u \in \mathfrak{S}_{N'K'}$  ersetzt ist. Auf Grund der Bedingung a) muss  $z$  auf  $\mathfrak{U}_{N'K'}$  verschwinden. Dadurch ist  $z$  auf dem durch  $\mathfrak{S}_{N'K'z}^0$  und  $\mathfrak{U}_{N'K'}$  aufgespannten Raum  $\mathfrak{S}_{N'K'z}^0 + \mathfrak{U}_{N'K'}$  als lineares Funktional eindeutig definiert. In § 3 werden wir zeigen, dass dieses Funktional für genügend grosses  $N'$ ,  $K'$  in der Topologie des  $\mathfrak{S}_{N'K'}$  stetig ist. Wir werden den betreffenden Raum in Zukunft einfach mit  $\mathfrak{S}$  bezeichnen. (Der Schwartzsche Raum  $\mathfrak{S}$  wird in unseren Betrachtungen nie auftreten, so dass keine Verwechslungen zu befürchten sind.) Wir werden diesen Stetigkeitsbeweis nur im zweidimensionalen Fall geben, ein Beweis für den physikalisch interessanten vierdimensionalen Fall ist noch ausstehend.

In § 4 werden wir zeigen, dass die durch Bedingung b) gegebene Erweiterung von  $z$  auf  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0 + \mathfrak{U} + \mathfrak{T}_z$  immer noch stetig ist.  $z$  lässt sich somit zu einem stetigen linearen Funktional auf ganz  $\overline{\mathfrak{S}}$ , also zu einer temperierten Distribution, erweitern<sup>7)</sup>. Diese Erweiterung ist nur bestimmt bis auf eine Distribution mit Träger in den  $z$ -kritischen Punkten. In § 5 wird bewiesen, dass diese unbestimmten Terme so gewählt werden können, dass die in c) geforderten Identitäten erfüllt sind. Gewisse Unbestimmtheiten bleiben dabei immer noch bestehen.

In § 6 schliesslich werden wir den Spezialfall der Zwei-Punkt-Funktion untersuchen, in dem eine explizitere Behandlungsweise als im allgemeinen Fall möglich ist. Auch lässt sich dieser Fall leicht im Vierdimensionalen behandeln.

**2. Definition von  $z$  auf  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0$**

Sei  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0$  der in § 1 definierte Unterraum von  $\overline{\mathfrak{S}}$ . Wir wollen zeigen, dass  $z$  auf  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0$  eindeutig definiert ist und dort lorentzinvariant ist. Einfachheitshalber betrachten wir nur den Fall des VEW eines Zyklus (das heisst  $h = 1$  in Gleichung 2). Die Verallgemeinerung auf beliebige  $h$  ist trivial.  $\overline{\mathfrak{S}}_z^0$  ist dann der Raum  $\overline{\mathfrak{S}}^0$  der Testfunktionen  $\in \overline{\mathfrak{S}}$ , die mit allen Ableitungen verschwinden, falls zwei  $x_i$  zusammenfallen.

Wir werden den Beweis in zwei Schritten führen, indem wir  $z$  zuerst auf kleineren Unterräumen  $\overline{\mathfrak{S}}^a < \overline{\mathfrak{S}}^0$  definieren und dann diese Definition zu einer Definition auf  $\overline{\mathfrak{S}}^0$  erweitern.

Sei  $a$  eine positive Zahl zwischen 0 und 1:  $0 < a < 1$ . Seien  $M_1, M_2, M_3$  die durch

$$\xi \in \begin{cases} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{cases} \text{ falls } \begin{cases} \xi^0 > a \mid \xi \\ \xi^0 < -a \mid \xi \\ \mid \xi^0 \mid < a \mid \xi \end{cases} \tag{12}$$

definierten Mengen. Sei  $A = \{\alpha_{ij}\}$  eine Zuordnung einer Zahl  $\alpha_{ij} = 1, 2, 3$  zu jeder Differenz  $x_{ij} = x_i - x_j$  zweier Argumente. Wir definieren

$$M_A = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_{ij} \in M_{\alpha_{ij}}\}. \tag{13}$$

$\overline{\mathfrak{S}}_A^a$  sei der Raum der Testfunktionen mit Träger in  $M_A$ .

Wir betrachten eine der Mengen  $M_A$ . Sei  $P$  eine beliebige Permutation  $(x_{i_0}, \dots, x_{i_n})$  der Argumente  $(x_0, \dots, x_n)$ . Wir bezeichnen mit  $\gamma_P$  die Menge aller Permutationen von  $(x_0, \dots, x_n)$ , die aus  $P$  durch Vertauschungen benachbarter Elemente mit Differenz in  $M_3$  hervorgehen. Es gilt:

**Lemma 1**

*Die Funktion*

$$S = \sum_{Q \in \gamma_P} (-1)^{\sigma_Q} \prod_{i=1}^n \theta [\sigma_Q^i (x_{Q_i} - x_{Q_{i-1}})] \equiv \sum_{Q \in \gamma_P} \theta_Q \tag{14}$$

ist in  $M_A$  konstant. (Die auftretenden Grössen haben dieselbe Bedeutung wie in Gleichung 1.)

Sei nämlich diese Behauptung nicht erfüllt, das heisst es existieren zwei Punkte  $X^1, X^2$  in  $M_A$ , in denen  $S$  verschiedene Werte annimmt. Wir nehmen an, dass in  $X^i$  alle  $x_j^0$  voneinander verschieden sind. Nur in solchen Punkten ist ja vorläufig  $S$  überhaupt definiert. (Auf Grund des zu beweisenden Lemmas können wir nachträglich  $S$  durch stetige Fortsetzung auch in den Ausnahmepunkten  $x_i^0 = x_j^0$  definieren.) Da  $M_A$  zusammenhängend ist, können wir  $X^1$  und  $X^2$  innerhalb  $M_A$  durch eine stetige Bahn  $X(t), 0 \leq t \leq 1, X(0) = X^1, X(1) = X^2$ , verbinden. Speziell können wir diese Bahn so wählen, dass für kein  $t$  mehr als zwei  $x_i^0(t)$  (das heisst zwei Null-Komponenten) zusammenfallen. Sei  $S(t) = S(X(t))$ . Nach unserer Annahme ist  $S(0) \neq S(1)$ . Es gibt also einen  $t$ -Wert  $t_0$ , in dem  $S(t)$  einen Sprung aufweist. In  $t_0$  muss offensichtlich ein  $x_{ij}^0 = 0$  sein. Betrachten wir ein  $t$ -Intervall  $I$ , das  $t_0$  enthält. Nach unserer Annahme über die Bahn können wir  $I$  so klein wählen, dass in  $I$

$$\mid x_{lr}^0 \mid > \mid x_{ij}^0 \mid, \quad (l, r) \neq (i, j)$$

gilt. Der Sprung muss somit in einem  $\theta_Q$  erfolgen, in dem  $x_i$  und  $x_j$  benachbart sind. Aus  $X(t_0) \in M_A$  folgt  $x_{ij} \in M_B$ , das heisst mit der kritischen Permutation  $Q$  gehört auch die daraus durch Vertauschung von  $x_i$  und  $x_j$  hervorgehende Permutation  $Q'$  zu  $\gamma_I$ .  $\theta_Q, \theta_{Q'}$  sind von der Form

$$\theta_Q = c \theta(\sigma_1(x_l - x_i)) \theta(\sigma_2(x_i - x_j)) \theta(\sigma_3(x_j - x_r)),$$

$$\theta_{Q'} = \pm c \theta(\sigma_1(x_l - x_j)) \theta(\pm \sigma_2(x_j - x_i)) \theta(\sigma_3(x_i - x_r)),$$

wobei  $c$  eine von  $x_i$  und  $x_j$  unabhängige, in  $I$  konstante Grösse ist. In  $I$  haben  $x_{ii}^0$  und  $x_{ij}^0$  dasselbe Vorzeichen, ebenso  $x_{jr}^0$  und  $x_{ir}^0$ , also ist  $\theta_Q + \theta_{Q'}$  in  $I$  konstant, in Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist das Lemma bewiesen.

Sei  $\varphi \in \mathfrak{S}_A^a$ . Wir definieren

$$\left( \sum_{\gamma_P} \theta_Q W(Qx) \mid \varphi(x) \right) = \left( W(Px) \mid \sum_{\gamma_P} \theta_Q \varphi(x) \right). \quad (15)$$

Dieser Ausdruck ist wohlbestimmt, da nach Lemma 1  $\left[ \sum_{\gamma_P} \theta_Q \right] \varphi$  eine Testfunktion ist.

Die Definition ist sinnvoll wegen der Voraussetzung der Lokalität, gemäss der

$$(W(Qx) \mid \varphi) = (W(Px) \mid \varphi)$$

für alle  $Q \in \gamma_P$  und alle  $\varphi \in \mathfrak{S}_A^a$  gilt.

Durch die Definition

$$Q \sim P, \text{ falls } Q \in \gamma_P$$

werden die Permutationen von  $(x_0, \dots, x_n)$  in Äquivalenzklassen  $A_1, \dots, A_s$  eingeteilt, was schliesslich ergibt:

$$(z \mid \varphi) = \sum_{v=1}^s (W(P_v x) \mid \sum_{\gamma_{P_v}} \theta_Q \varphi), \quad P_v \in A_v, \quad \varphi \in \mathfrak{S}_A^a. \quad (16)$$

Diese Definition kann durch lineare Fortsetzung sofort auf Summen von Funktionen aus verschiedenen  $\mathfrak{S}_A^a$  (zum selben  $a$ ) ausgedehnt werden, das heisst auf den Raum  $\mathfrak{S}^a$  der Testfunktionen, die mit allen Ableitungen verschwinden, falls für ein  $x_{ij}$  die Beziehung  $|x_{ij}^0| = a |x_{ij}|$  besteht.

Die Definition von  $z$  auf  $\mathfrak{S}^0$  ist möglich mit Hilfe des folgenden Lemmas:

### Lemma 2

Es existiert eine endliche Anzahl von Unterräumen  $\mathfrak{S}_v = \mathfrak{S}_{A_v}^a \subset \mathfrak{S}^0$  so, dass jede Testfunktion  $\varphi \in \mathfrak{S}^0$  in der Form

$$\varphi = \sum_v \varphi_v, \quad \varphi_v \in \mathfrak{S}_v \quad (17)$$

geschrieben werden kann, wobei die  $\varphi_v$  von  $\varphi$  stetig abhängen, das heisst  $\varphi_v \rightarrow 0$  in  $\mathfrak{S}$ , falls  $\varphi \rightarrow 0$  in  $\mathfrak{S}$ .



Wir beweisen die Darstellung (17) durch explizite Konstruktion der  $\varphi_\nu$ :

Zu jedem Paar  $a, b$  von reellen Zahlen mit  $0 < a < b < 1$  existiert eine Funktion  $\chi_{ab}^1(\xi)$  mit folgenden Eigenschaften:

- a)  $\chi_{ab}^1$  ist überall ausser im Ursprung beliebig oft stetig differenzierbar.
- b)  $\chi_{ab}^1$  hängt nur von  $\xi^0/|\xi|$  ab.
- c)  $\chi_{ab}^1 \equiv 1$  in  $\xi^0/|\xi| > b$ ,  $\chi_{ab}^1 \equiv 0$  in  $\xi^0/|\xi| < a$ . Im Zwischengebiet fällt  $\chi_{ab}^1$  monoton von 1 auf 0.

Wir definieren

$$\begin{aligned} \chi_{ab}^2(\xi) &= \chi_{ab}^1(-\xi), \\ \chi_{ab}^3(\xi) &= 1 - \chi_{ab}^1(\xi) - \chi_{ab}^2(\xi). \end{aligned}$$

Betrachten wir wieder die Variablen  $x_i$  und ihre Differenzen  $x_{ij} = x_i - x_j$ . Es gilt

$$\sum_{\nu_{ij}=1}^3 \prod_{i < j} \chi_{ab}^{\nu_{ij}}(x_{ij}) \equiv 1. \tag{18}$$

Wählen wir  $a_1, b_1, 0 < a_1 < b_1 < 1$ , fest. Nach Gleichung 18 können wir alle  $\varphi \in \mathfrak{S}^0$  in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi(x_i) &= \sum_B \varphi_B(x_i), \\ \varphi_B(x_i) &= \prod_{i < j} \chi_{a_1 b_1}^{\beta_{ij}}(x_{ij}) \cdot \varphi(x_i), \quad B = (\beta_{ij}). \end{aligned} \tag{19}$$

$\varphi_B$  liegt in  $\mathfrak{S}^0$ , da die Singularitäten von  $\chi_{a_1 b_1}^\beta$  im Ursprung durch das Verschwinden von  $\varphi$  in den kritischen Punkten kompensiert werden. Weiter hängt  $\varphi_B$  stetig von  $\varphi$  ab. Zum Beweis haben wir zu zeigen, dass alle  $D\varphi_B$  ( $D$  eine beliebige Ableitung der Ordnung  $\leq N$ ) gleichmässig gegen Null streben, falls  $\varphi$  in  $\mathfrak{S}$  gegen Null geht. Die Multiplikation mit Potenzen von  $\xi_i$  ist offenbar überflüssig, da das Verhalten im Unendlichen keine Schwierigkeiten bereitet. Sei  $D_m$  ein Differentialoperator  $m$ -ter Ordnung. Dann folgt aus Eigenschaft b) der  $\chi$ -Funktionen eine Abschätzung der Form

$$|D_m \chi_{a_1 b_1}^\nu(\xi)| \leq \frac{c(D_m)}{|\xi|^m}.$$

Andererseits gelten in jedem beschränkten Bereich  $B$  des  $\mathfrak{S}^0$  Abschätzungen der Form

$$|D_m \varphi| \leq c(D_m, m_{ij}) \prod_{i < j} |x_{ij}|^{m_{ij}}$$

für alle  $m_{ij}$  mit  $\sum m_{ij} \leq N - m$ . Dabei bedeutet  $|\xi|$  die euklidische Länge  $(\sum \xi^{\nu^2})^{1/2}$  des Vektors  $\xi$ . Die  $c(D_m, m_{ij})$  gehen mit  $B$  gegen Null. Aus diesen beiden Abschätzungen folgt die behauptete Stetigkeit unmittelbar.

Der zu  $B = (3, 3, \dots, 3)$  gehörige Summand in (19) liegt in  $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{S}^{b_1}$ , die zu  $\beta_{ij} \neq 3$ , alle  $i, j$ , gehörigen Summanden in  $\mathfrak{S}_2 \equiv \mathfrak{S}^{b_1}$ . Die übrigen Summanden enthalten höchstens  $\binom{n+1}{2} - 1$ , aber mindestens einen,  $\chi^3$ -Faktor. In jedem dieser Summanden

nehmen wir bezüglich der in  $\chi^3$ -Faktoren auftretenden Variablen  $x_{ij}$  eine zu (19) analoge Zerlegung vor, aber mit Funktionen  $\chi_{a_2 b_2}^{\nu}$  mit  $b_2 < a_1$ . Wieder liegen die zu  $\beta_{ij} = 3$  (alle auftretenden  $i, j$ ) gehörigen Summanden in  $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}^{b_2}$ , die zu  $\beta_{ij} \neq 3$  (alle auftretenden  $i, j$ ) gehörigen in  $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}^{a_2}$ . Die übrigen Summanden enthalten höchstens  $[(\binom{n+1}{2} - 2) \chi_{a_2 b_2}^3]$ -Faktoren und werden bezüglich der zugehörigen Differenzen weiter aufgespalten. Man sieht leicht, wie das Verfahren weiter geht und dass es nach spätestens  $(\binom{n+1}{2})$  Schritten abbricht. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Lemma 2 erlaubt die Definition von  $z$  auf  $\overline{\mathfrak{S}^0}$  durch

$$(z | \varphi) = \sum_{\nu} (z | \varphi_{\nu}), \quad \varphi \in \overline{\mathfrak{S}^0}. \quad (20)$$

Man sieht leicht ein, dass diese Definition von der speziell gewählten Zerlegung (19) etc. (das heisst von der Form der Funktionen  $\chi_{a_i b_i}^{\nu}$ ) nicht abhängt.

Es bleibt noch die Invarianz des so definierten  $z$  auf  $\overline{\mathfrak{S}^0}$  zu zeigen, das heisst das Verschwinden auf  $\overline{\mathfrak{S}^0} \cap \mathfrak{U}$ .

Rotationsinvarianz besteht trivialerweise, da das angegebene Konstruktionsverfahren nur rotationsinvariante Schritte umfasst. Wir haben also nur die Beziehung  $A_{01} z = 0$  zu verifizieren. Sie gilt sicher in den Punkten, in denen alle  $x_i^0$  voneinander verschieden sind. Die kritischen Punkte sind also von folgender Form: Die Menge der Variablen  $x_0, \dots, x_n$  zerfällt in Teilmengen  $T_{\alpha}$ , so dass alle  $x_i$  im selben  $T_{\alpha}$  dieselbe 0-Komponente aufweisen, während die  $x_i^0$  in verschiedenen  $T_{\alpha}$  verschieden sind. Zu jedem solchen Punkt existiert eine Umgebung  $U$  und eine positive Zahl  $a < 1$  so, dass in  $U$  gilt:

$$\frac{|x_i^0 - x_j^0|}{|x_i - x_j|} \leq a \text{ falls } x_i, x_j, \left\{ \begin{array}{l} \text{in verschiedenen} \\ \text{im selben} \end{array} \right\} T_{\alpha} \text{ liegen.}$$

Es gibt also ein  $M_A$ , das  $U$  umfasst. Nach (16) und Lemma 1 ist somit  $z$  in  $U$  eine Summe von permutierten  $W$ -Distributionen multipliziert mit in  $U$  konstanten Funktionen, also lorentzinvariant.

Ebenso lässt sich das Verschwinden von  $z$  auf  $\overline{\mathfrak{S}^0} \cap \overline{\mathfrak{T}_z}$  leicht beweisen.

### 3. Lorentzinvarianz

Die Distribution  $z \in \mathfrak{S}^*$  ist einerseits gemäss § 2 auf dem Raum  $\mathfrak{S}_z^0$  bekannt, andererseits nach der Voraussetzung der Lorentz-Invarianz auf  $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{U}_{N'K'}$ . Dadurch ist  $z$  auf  $\mathfrak{S}_z^0 + \mathfrak{U} \equiv \mathfrak{S}_z^1$  definiert:

$$(z | s + u) = (z | s), \quad s \in \mathfrak{S}_z^0, \quad u \in \mathfrak{U}. \quad (21)$$

Da  $z$  auf  $\mathfrak{S}_z^0 \cap \mathfrak{U}$  verschwindet, ist diese Definition von der gewählten Aufspaltung der Testfunktion  $\varphi \in \mathfrak{S}_z^1$  in  $s$  und  $u$  unabhängig. Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, dass  $z$  für genügend grosses  $N', K'$  auf  $\mathfrak{S}_z^1$  stetig ist. Wir werden nicht versuchen, optimale Werte für  $N'$  und  $K'$  zu finden. Der Stetigkeitsbeweis wird nur für den zweidimensionalen Fall gegeben.

Die behauptete Stetigkeit folgt unmittelbar aus den Ergebnissen von § 2 und dem folgenden Theorem:

*Theorem*

Seien  $u_i \in \mathfrak{U}, s_i \in \mathfrak{S}_z^0$  ( $N' = N + 2, K' = K + 2$ ) zwei Folgen von Testfunktionen mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (u_i - s_i) = 0 \text{ in } \mathfrak{S}.$$

Dann existiert eine Folge  $u_i^0 \in \overline{\mathfrak{S}_z^0} \cap \overline{\mathfrak{U}}$  mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (u_i^0 - s_i) = 0 \text{ in } \overline{\mathfrak{S}}.$$

Dieses Theorem soll jetzt bewiesen werden.

Sei  $T$  eine Aufteilung der Variablen  $x_i$  in  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) nicht leere Teilmengen  $M_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ). Die Ebene  $x_i = x_j$ , wenn  $x_i, x_j$ , zum selben  $M_\alpha$  gehören, bezeichnen wir mit  $E_T^m$ . Durch eine Permutation  $P$  lässt es sich erreichen, dass die Elemente jedes  $M_\alpha$  benachbart sind. Die Differenzvariablen  $\xi_i^P = x_{P_{i-1}} - x_{P_i}$  zerfallen dann in zwei Klassen, nämlich erstens in Differenzen  $\eta_\mu^T$  ( $\mu = 1, \dots, n - m + 1$ ) von  $x'_i$ s aus demselben  $M_\alpha$  und zweitens Differenzen  $\xi_\nu^T$  ( $\nu = 1, \dots, m - 1$ ) von  $x_i$  aus verschiedenen  $M_\alpha$ , so dass  $E_T^m$  durch die Bedingung  $\eta_\mu^T = 0$  für alle  $\mu$  charakterisiert ist.  $\varphi \in \mathfrak{S}^0$  bedeutet, dass  $\varphi$  auf allen  $E_T^m$  mit allen Ableitungen nach den  $\xi_\nu^T$  bis zur Ordnung  $N'$  verschwindet. (Wir betrachten der Einfachheit halber wie schon in § 2 den Fall, dass  $z$  der VEW eines Zyklus ist.)

Sei  $D$  der Differentialoperator

$$D = \prod_{\mu=1}^{n-m+1} \delta_{\mu 0}^{\alpha_\mu} \delta_{\mu 1}^{\beta_\mu}, \quad \delta_{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial \eta_\mu^{T0}}, \quad \delta_{\mu 1} = \frac{\partial}{\partial \eta_\mu^{T1}}. \quad (22)$$

Sei  $u \in \mathfrak{U}$ :

$$u = \sum_{i=1}^n A^i \psi(\xi_i^P), \quad (23)$$

Dann gilt auf  $E_T^M$ :

$$u_T^D(\xi_\nu^T) \equiv D u |_{\eta_\mu^T = 0} = \sum_{\mu} (\alpha_\mu \psi_T^{D\mu} + \beta_\mu \psi_T^{D\mu}) + A_T \psi_T^D. \quad (24)$$

Dabei bedeuten

$$D^\mu = \prod_{\mu' \neq \mu} \delta_{\mu' 0}^{\alpha_{\mu'}} \cdot \delta_{\mu' 1}^{\beta_{\mu'}} \cdot \delta_{\mu 0}^{\alpha_\mu - 1} \cdot \delta_{\mu 1}^{\beta_\mu + 1},$$

$$D_\mu = \prod_{\mu' \neq \mu} \delta_{\mu' 0}^{\alpha_{\mu'}} \cdot \delta_{\mu' 1}^{\beta_{\mu'}} \cdot \delta_{\mu 0}^{\alpha_\mu + 1} \cdot \delta_{\mu 1}^{\beta_\mu - 1},$$

$$\psi_T^D = D\psi |_{\eta_\mu^T = 0}, \quad A_T = \sum_{\mu=1}^{n-m+1} A_{\eta_\mu^T}.$$

Unter den Voraussetzungen unseres Theorems gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u_{iT}^D = 0 \text{ für alle } D \text{ und } T. \quad (25)$$

Der Limes ist zu verstehen im Sinne der gleichmässigen Konvergenz aller existierenden Ableitungen (multipliziert mit Polynomen des Grades  $\leq K'$ ).

Wir beweisen folgende Lemmata :

### Lemma 3

Unter der Voraussetzung (25) gehen die Funktionen  $\psi_{iT}^D(\xi_\nu^T)$ ,  $D$  von der Ordnung  $\leq N' - 1$ , bezüglich der durch die Topologie des  $\mathfrak{S}_{N'-1, K'-1}$  induzierten Topologie mit wachsendem  $i$  gegen 0.

Das Lemma gilt nicht im Fall  $n = 1$  (das heisst für die Zweipunktfunktion), den wir in § 6 speziell behandeln werden.

Zum Beweis genügt es, den Fall  $m = n$  zu betrachten, da alle  $E_T^m$  in den  $E_T^n$  enthalten sind. Wir haben dann einen Vektor  $\eta^T$  und  $n - 1$  Vektoren  $\xi_\nu^T$ . Den Index  $T$  werden wir in Zukunft einfachheitshalber weglassen, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Der Zusammenhang zwischen den  $\psi^D$  und den  $u^D$  ist durch die Gleichungen (24) gegeben. Diese Gleichungen wollen wir jetzt nach  $\psi^D$  lösen, wobei wir  $u^D$  als bekannt voraussetzen.

Die einzelnen Gleichungen des Systems (24) verknüpfen immer nur  $\psi^{D'}$  s mit  $D'$  s gleicher Ordnung,  $M = \alpha + \beta$  ( $\alpha = \alpha_\mu$ ,  $\beta = \beta_\mu$ , da  $\mu$  nur einen Wert annimmt) miteinander. Das System zerfällt also in ungekoppelte Teilsysteme zu festen  $M$ , und es genügt, diese Teilsysteme zu diskutieren. Wir betrachten somit im folgenden fest gewählte  $M$  ( $M < N'$ ).

Durch eine Variablentransformation führen wir (24) in charakteristische Form über:

Durch die Kegel  $\xi_\nu^2 = 0$  für ein  $\nu$  wird der  $(\xi_\nu)$ -Raum in Teilgebiete zerlegt. Wir betrachten ein solches Teilgebiet  $G$ . Nach Definition sind in  $G$  alle  $\xi_\nu^2$  von Null verschieden, und  $G$  enthält mit jedem Punkt die ganze zugehörige Lorentz-Bahn (das heisst alle Punkte, die aus dem gegebenen Punkt durch eine Transformation aus  $L_\uparrow$  hervorgehen). Wir definieren in  $G$  neue Variablen durch

$$\begin{aligned} \xi_\nu^0 &= \varrho_\nu \operatorname{Ch} \chi_\nu & \xi_\nu^0 &= \varrho_\nu \operatorname{Sh} \chi_\nu \\ \xi_\nu^1 &= \varrho_\nu \operatorname{Sh} \chi_\nu & \xi_\nu^1 &= \varrho_\nu \operatorname{Ch} \chi_\nu \end{aligned} \quad \text{falls } \xi_\nu^2 > 0, \quad \text{falls } \xi_\nu^2 < 0. \quad (26)$$

Gleichung 24 wird damit zu

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial \psi^D}{\partial \chi_\nu} + \alpha \psi^{D^\mu} + \beta \psi^{D_\mu} = u^D. \quad (27)$$

(Hier ist natürlich:  $D = \delta_0^\alpha \delta_0^\beta$ ,  $D^\mu = \delta_0^{\alpha-1} \delta_1^{\beta+1}$ ,  $D_\mu = \delta_0^{\alpha+1} \delta_1^{\beta-1}$ ,  $\delta_i = \frac{\partial}{\partial \eta^i}$ )

Die weitere Substitution

$$\chi = \frac{1}{n-1} \sum \chi_r \quad (28)$$

$$\sigma_i = \chi_i - \chi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2$$

ergibt daraus

$$\frac{\partial \psi^D}{\partial \chi} + \alpha \psi^{D\mu} + \beta \psi^{D\mu} = u^D. \quad (29)$$

Das ist nun ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der Variablen  $\chi$ , wobei man die übrigen Variablen  $\sigma_i, \varrho_\mu$  als Parameter aufzufassen hat.

Wir fassen die  $\psi^D$  zu einem  $(M+1)$ -dimensionalen Vektor  $\Psi$  zusammen, ebenso die  $u^D$  zum Vektor  $U$ . Gleichung (29) lautet dann

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} + A \Psi = U. \quad (30)$$

Dabei bedeutet  $A$  die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & M-1 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & M-2 & \dots \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & M & 0 \end{pmatrix},$$

Sei

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & 0 & 1 \\ \cdot & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^- = A - A^+.$$

Dann wird  $A$  durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\tilde{A} = e^{-A/2} e^{A^+} \cdot A \cdot e^{-A^+} e^{A/2}$$

in die Diagonalform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} M & & & & \\ & M-2 & & & 0 \\ & & M-4 & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & -M \end{pmatrix}$$

übergeführt \*).

\*) Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Prof. H. ARAKI.

Es existiert also ein Fundamentalsystem  $\Psi_i$  von Lösungen der homogenen Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} + A \Psi = 0$$

der Form

$$\Psi_i(\chi) = e^{-\lambda_i \chi} \Psi_{i0}. \quad (31)$$

Dabei durchläuft  $\lambda_i$  die Eigenwerte  $M, M-2, \dots, -M$  der Matrix  $A$ , während die  $\Psi_{i0}$  von  $\chi$  unabhängige Vektoren sind. Wir werden die  $\Psi_{i0}$  speziell auch von  $\sigma_i, \varrho_\mu$  unabhängig wählen. Aus der Form dieser Fundamentallösungen sieht man sofort, dass die homogene Gleichung keine Lösungen in  $\mathfrak{S}_{N'-1, K'-1}$  hat (wir setzen natürlich immer  $N', K' \geq 2$  voraus), das heisst  $\Psi$  ist durch (30) eindeutig festgelegt.

Die Wronski-Determinante

$$W = \text{Det} \|\Psi_i\|$$

ist von  $\chi$  unabhängig und kann auf 1 normiert werden. Sei  $W_i(\chi)$  die Determinante, die aus  $W$  durch Ersetzung der  $i$ -ten Kolonne  $\Psi_i$  durch  $U$  entsteht. Mit der Methode der Variation der Konstanten erhält man als Lösung von (30):

$$\Psi = \sum_i z_i(\chi) \Psi_i(\chi) \quad (32)$$

mit

$$z_i(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} W_i(\tau) d\tau = - \int_{\chi}^{\infty} W_i(\tau) d\tau. \quad (33)$$

Dabei ist die Randbedingung des Verschwindens von  $\Psi$  im Unendlichen verwendet worden. Die Gleichheit der beiden in (33) auftretenden Integrale ist offenbar eine Bedingung für die Existenz einer Lösung und ist natürlich in unserem Fall erfüllt.

Der Ausdruck (32) ist die Lösung der Gleichungen (24) im betrachteten Gebiet  $G$ . Da die Lösung eindeutig ist und somit mit der vorgegebenen Lösung  $\{\psi^0\}$  (aus der ja  $U$  nach (24) gewonnen wurde) übereinstimmen muss, ergibt sich die Lösung auf dem Rande von  $G$  durch stetige Fortsetzung von (32).

Zum Beweis der Stetigkeit der durch (32) vermittelten Abbildung  $U \rightarrow \Psi$  betrachten wir einen beliebigen der in (32) auftretenden Summanden

$$\psi_i^D \int_{-\infty}^{\chi} W_i(\tau) d\tau = - \psi_i^D \int_{\chi}^{\infty} W_i(\tau) d\tau.$$

Dabei ist  $\psi_i^D = e^{-\lambda_i \chi} \psi_{i0}^D$ , wobei die Konstante  $\psi_{i0}^D$  für unsere Zwecke unwesentlich ist.  $W_i(\tau)$  ist von der Form

$$W_i(\tau) = e^{\lambda_i \tau} W_i'(\tau),$$

wobei  $W'_i$  die aus den  $\Psi_{j_0}$  – mit Ausnahme von  $\Psi_{i_0}$  – und  $U$  gebildete Determinante ist, deren  $\tau$ -Abhängigkeit allein von den Elementen  $u^D$  herrührt:

$$W'_i(\tau) = \sum_D a_D u^D(\tau), \quad a_D = \text{const.}$$

Wir haben also Ausdrücke der Form

$$I = e^{-\lambda_i z} \int e^{\lambda_i \tau} W'_i(\tau, \sigma_i, \varrho_\mu) d\tau \quad (34)$$

zu diskutieren, wobei die Integration entweder über das Intervall  $(-\infty, \chi)$  oder über  $(\chi, \infty)$  zu erstrecken ist. Wir schreiben  $u^D$  und  $W'$  als Funktion der charakteristischen Koordinaten

$$x_\mu = \xi_\mu^0 + \xi_\mu^1, \quad y_\mu = \xi_\mu^0 - \xi_\mu^1 \quad ;$$

$u^D = u^D(x_\mu, y_\mu)$ . Durch die Substitution  $v = e^{\tau-z}$  geht dann (34) über in

$$I = \int dv v^{\lambda_i-1} W'_i(v x_\mu, v^{-1} y_\mu). \quad (35)$$

Die Integration läuft über die Intervalle (01) resp.  $(1, \infty)$ .

Liege nun  $u$  und damit  $W'_i$  in einer beschränkten Menge  $\mathfrak{B}$  des Raumes  $\mathfrak{S}$ , das heisst es gelten die Abschätzungen

$$\prod_\mu |\xi_\mu|^{n_\mu} |D W'_i| < \varepsilon_n^D, \quad n = \{n_\mu\}, \quad |\xi_\mu| = (x_\mu^2 + y_\mu^2)^{1/2} \quad (36)$$

für alle Ableitungen  $D$  bis zur Ordnung  $N' - M$  und alle  $\sum n_\mu \leq K'$ . Wir suchen dann ähnliche Abschätzungen für  $I$  (und damit für  $\Psi$ ).

Wir diskutieren zuerst den Fall  $D = \text{Identität}$  und untersuchen dazu Ausdrücke der Form

$$\begin{aligned} I_n &= \prod_\mu |\xi_\mu|^{n_\mu} |I| \\ &\leq \prod_\mu |\xi_\mu|^{n_\mu} \cdot \varepsilon_m^{Id} \int dv v^{\lambda-1} \prod_\mu (v^2 x_\mu^2 + v^{-2} y_\mu^2)^{-m_\mu/2} \end{aligned} \quad (37)$$

Sei (in einem beliebigen Punkt  $(\xi_\mu)$ )  $A$  die Menge der  $\xi_\mu$  mit  $x_\mu^2 > y_\mu^2$ ,  $B$  die Menge der  $\xi_\mu$  mit  $x_\mu^2 \leq y_\mu^2$ . Aus (37) folgt die Abschätzung

$$I_n \leq \varepsilon_m \prod_\mu |\xi_\mu|^{n_\mu - m_\mu} \int dv v^{\lambda-1 - \sum_A m_\mu + \sum_B m_\mu}, \quad \varepsilon_m = 2^{1/2 \sum_\mu m_\mu} \varepsilon_\mu^{Id}. \quad (38)$$

Jetzt treffen wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall:

$$E = \lambda - \sum_A n_\mu + \sum_B n_\mu < 0.$$

Dann konvergiert

$$J_n^1 = \int_1^\infty dv v^{E-1}$$

und (38) wird für  $m_\mu = n_\mu$  zu

$$I_n \leq \varepsilon_n J_n^1, \quad (39)$$

was eine Abschätzung der gewünschten Form ist.

2. Fall:  $E < 0$ .

Dann existiert

$$J_n^2 = \int_0^1 dv v^{E-1}$$

und es gilt

$$I_n \leq \varepsilon_n J_n^2. \quad (40)$$

3. Fall:  $E = 0$ .

a) Sei mindestens ein  $|\xi_\alpha| \geq C$ , wobei  $C$  eine beliebige, aber fest gewählte Zahl zwischen 0 und  $1/n$  ist. Dann erhalten wir aus (38) mit der Wahl  $m_\alpha = n_\alpha + 1$ , alle andern  $m_\mu = n_\mu$ , die Abschätzung

$$I_n \leq \varepsilon_m C^{-1} J_m^{1,2}. \quad (41)$$

Dabei tritt  $J_m^1$  resp.  $J_m^2$  auf, falls  $\xi_\alpha$  in  $A$  resp.  $B$  liegt. Die angegebene Wahl der  $m_\mu$  ist möglich wegen der Bedingung  $\sum n_\mu < K'$ .

b) Seien alle  $|\xi_\alpha| < C$ , aber  $n_\alpha \neq 0$  für mindestens ein  $\alpha$ . Dann wählen wir in (38)  $m_\alpha = n_\alpha - 1$ , alle andern  $m_\mu = n_\mu$ , und erhalten

$$I_n \leq \varepsilon_m C \cdot J_m^{1,2}, \quad (42)$$

wobei die Indizes 1,2 den Fällen  $\xi_\alpha \in B$  resp.  $A$  entsprechen.

c) Seien alle  $|\xi_\alpha| < C$  und alle  $n_\mu = 0$ , also  $\lambda_i = 0$ . (Dieser Fall kann nur bei geradem  $M$  auftreten.) Der zu  $\lambda_i = 0$  gehörige Summand in (32) ist

$$\Psi_{00} \int \frac{dv}{v} W'_0(x_\mu v, y_\mu v^{-1}) = \Psi_{00} I_0.$$

Da alle andern Summanden sowie  $\Psi$  selbst in den Punkt  $\xi_\mu = 0$  (alle  $\mu$ ) stetig fortsetzbar sind, muss das auch für  $I_0$  gelten. Das ist aber nur möglich, falls  $W'_0(0, 0, \dots) = 0$ . Diese Bedingung ist also für die Lösbarkeit von (30) notwendig und somit in unserem Fall erfüllt. Wegen  $M < N'$  gilt in  $\mathfrak{B}$  die Abschätzung

$$W'_0(x_\mu, y_\mu) \leq \varepsilon' \left( \sum_\mu |x_\mu| + \sum_\mu |y_\mu| \right).$$



Sei  $S^{-1} = \sum |x_\mu| \geq \sum |y_\mu| = T$ . Dann

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_1^S \frac{dv}{v} \cdot W'_0 + \int_S^\infty \frac{dv}{v} W'_0 \\
 &\leq 2\varepsilon' \int_0^S \frac{dv}{s} + \varepsilon_1 \int_S^\infty \frac{dv}{v^2} \cdot S \\
 &= 2\varepsilon' + \varepsilon_1.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Im Fall  $S^{-1} \leq T$  spaltet man in analoger Weise das Integral  $\int_0^1$  in zwei Teile  $\int_0^T$  und  $\int_T^1$  und erhält damit eine ähnliche Abschätzung.

Der Fall allgemeiner  $D$  in (36) lässt sich genau gleich diskutieren. Aus (35) erhält man nämlich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial x_\mu} &= \int dv v^\lambda W'_{x_\mu}(v x_\mu, v^{-1} y_\mu), \\
 \frac{\partial I}{\partial y_\mu} &= \int dv v^{\lambda-2} W'_{y_\mu}(v x_\mu, v^{-1} y_\mu)
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

also Ausdrücke derselben Form wie (35).

Damit ist Lemma 3 bewiesen. Wir bemerken noch, dass für ungerades  $N'$  in der Behauptung von Lemma 3  $\mathfrak{S}_{N'-1, K'-1}$  durch  $\mathfrak{S}_{N', K'-1}$  ersetzt werden kann.

**Lemma 4**

Sei  $\mathfrak{M}$  eine abgeschlossene Menge des  $R^n$  ( $n$  beliebig), deren Rand aus  $N$  mal stetig differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zusammengesetzt ist, so dass zwei Konstanten  $\bar{d}$  und  $a$  mit folgender Eigenschaft existieren: Zu zwei Punkten aus  $\mathfrak{M}$ , deren Abstand  $d$  kleiner als  $\bar{d}$  ist, existiert immer ein sie verbindender Weg in  $\mathfrak{M}$  von der Länge  $\leq a d$ .

Dann existiert eine Konstante  $C$  so, dass jede auf  $\mathfrak{M}$  vorgegebene Funktion  $\varphi \in \mathfrak{S}_{NK}$  auf ganz  $R^n$  so fortgesetzt werden kann, dass

$$\sup_{x \in R^n} \sup_{D, k} \rho_{Dk}(x) \leq C \cdot \sup_{x \in \mathfrak{M}} \sup_{D, k} \rho_{Dk}(x)
 \tag{45}$$

gilt. (Zur Definition von  $\rho_{Dk}$  siehe § 1.)

Wir betrachten die Umgebung  $\mathfrak{M}_{\bar{d}}$  von  $\mathfrak{M}$ , bestehend aus den Punkten, deren Abstand von  $\mathfrak{M}$  kleiner als  $\bar{d}$  ist. Wir setzen  $\varphi$  durch folgendes Verfahren von  $\mathfrak{M}$  auf  $\mathfrak{M}_{\bar{d}}$  fort: Wir geben eine beliebige Richtung im  $R^n$  vor und betrachten alle dazu parallelen Geraden. Längs jeder dieser Geraden können wir  $\varphi$  so fortsetzen, dass eine Beziehung der Form (45) besteht. Falls die Gerade  $\partial \mathfrak{M}$  in zwei Punkten schneidet, deren Abstand  $\leq 2\bar{d}$  ist, ist die vorausgesetzte Existenz der Konstanten  $a$  wesentlich. Sei nämlich  $d$  der Abstand der beiden Durchstosspunkte. Dann ist die Differenz der Werte einer Ableitung  $M$ -ter Ordnung in diesen Punkten kleiner als  $a \cdot d \cdot \rho_{M+1}$ , wenn  $\rho_{M+1}$  das Maximum der Ableitungen  $(M+1)$ -ter Ordnung auf  $\mathfrak{M}$  ist. Diese Differenz geht also mit  $\bar{d}$  linear gegen Null, was für unsere Konstruktion wesentlich ist.

Es ist klar, dass man die Fortsetzung längs den einzelnen Geraden so wählen kann, dass auch die Ableitungen senkrecht zu der vorgegebenen Richtung sich in der gewünschten Weise verhalten. Die so erhaltene Fortsetzung nennen wir  $\varphi_{\bar{a}}$ . Wir wählen eine Funktion  $\gamma(x)$ , die auf  $\mathfrak{M}$  identisch = 1 ist (wozu im Falle niedrigerdimensionaler  $\mathfrak{M}$  noch das Verschwinden aller Ableitungen kommt) und die ausserhalb  $\mathfrak{M}_{\bar{a}}$  identisch verschwindet. Die Funktion  $\varphi = \gamma \varphi_{\bar{a}}$  erfüllt dann die Behauptung des Lemmas.

Jetzt können wir das am Anfang dieses Abschnitts gegebene Theorem beweisen:  
Sei

$$u_i = \Lambda \psi_i$$

eine Folge der im Theorem vorausgesetzten Art. Nach Lemma 3 konvergiert dann  $\psi_i$  mit allen Ableitungen bis zur Ordnung  $N' - 1$  (resp.  $N'$ , falls  $N'$  ungerade ist) bezüglich der Topologie des  $\mathfrak{S}_{N'-1, K'-1}$  auf allen  $E_T^m$  gegen Null. Nach Lemma 4 existiert dann eine Folge  $\psi_i - \psi_i^0$ , die auf allen  $E_T^m$  mit  $\psi_i$  übereinstimmt und die gegen null konvergiert. Die so konstruierten  $\psi_i^0$  verschwinden auf allen  $E_T^m$  und konvergieren gegen  $\psi_i$  (in  $\mathfrak{S}_{N'-1, K'-1}$ ). Die Folge  $u_i^0 = \Lambda \psi_i^0$  ist dann eine Folge mit den in unserem Theorem postulierten Eigenschaften.

#### 4. Trägereigenschaften

Die im vorangehenden auf  $\mathfrak{S}_z^1 = \mathfrak{S}_z^0 + \mathfrak{U}$  definierte Distribution  $z$  kann auf Grund der im § 1 diskutierten Trägerbedingungen zu einem linearen Funktional auf  $\mathfrak{S}_z^2 = \mathfrak{S}_z^1 + \mathfrak{T}_z$  erweitert werden. Wir wollen zeigen, dass diese Erweiterung stetig ist.

Das Verschwinden von  $z$  ausserhalb  $T_z$  folgt aus der Lokalitätsvoraussetzung. Der Rand von  $T_z$  besteht deshalb aus Stücken der Form

$$(x_i - x_k)^2 = 0 \text{ für gewisse Indexpaare } i, k.$$

$T_z$  erfüllt also die Voraussetzungen des Lemmas 4, ebenso die Vereinigung, resp. der Durchschnitt von  $T_z$  mit den  $z$ -kritischen  $E_T^m$ .

Sei  $t_i \in \mathfrak{S}_z^1$  eine Folge von Testfunktionen, die in  $T_z$  bezüglich der Topologie von  $\mathfrak{S}$  gegen Null strebt. Dann muss gelten:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (z | t_i) = 0. \quad (46)$$

Sei  $t_i = u_i + s_i$ ,  $u_i \in \mathfrak{U}$ ,  $s_i \in \mathfrak{S}_z^0$ . Sei  $E_z$  die Menge aller  $z$ -kritischen  $E_m$ . Nach unseren Voraussetzungen strebt  $u_i$  auf  $T_z \cap E_z$  in  $\mathfrak{S}$  gegen Null. Auf analoge Weise wie im vorangehenden Abschnitt können wir eine Folge  $u_i^0 \in \mathfrak{S}$  konstruieren, die gegen 0 konvergiert und die auf  $T_z \cap E_z$  mit  $u_i$  übereinstimmt.

$s_i^0 = t_i - u_i^0$  strebt auf  $T_z$  bezüglich  $\mathfrak{S}$  gegen null und kann wieder nach Lemma 4 aus  $T_z$  zu einer auf dem ganzen Raum definierten Folge  $s_i^0 \in \mathfrak{S}_z^0$  erweitert werden, die gegen Null konvergiert. Die Funktion  $t_i^0 = t_i - u_i^0 - s_i^0$  liegt in  $\mathfrak{S}_z^1 \cap \overline{T_z}$ . Also

$$t_i = s_i^0 + u_i^0 + t_i^0,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (z | t_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (z | s_i^0) = 0,$$

womit (46) bewiesen ist.

### 5. Identitäten, Symmetrien

Wir betrachten die in § 1 definierte Menge  $\mathfrak{Z}_n$  der VEW von Produkten von Zyklen zur totalen Variablenzahl  $n$ . Wir haben gezeigt, dass alle Elemente  $z$  dieser Menge als Distributionen auf gewissen Räumen  $\mathfrak{S}_z^2$  definiert sind und somit zu Distributionen auf ganz  $\mathfrak{S}$  erweitert werden können<sup>7)</sup>. Diese Erweiterung von  $z$  ist eindeutig bis auf einen auf  $\mathfrak{S}_z^2$  verschwindenden Summanden  $H_z$ , das heisst bis auf eine lorentz-invariante Distribution  $H_z$  mit Träger in  $T_z \cap E_z$ .

Wir werden zeigen, dass die  $H_z$  so gewählt werden können, dass die in § 1 unter c geforderten Identitäten (Symmetrien eingeschlossen) erfüllt sind.

Die betrachteten Identitäten sind von der Form

$$\sum_k c_k z_k = 0, \quad c_k = \text{const.}, \tag{47}$$

wobei die Summe über eine Teilmenge von  $\mathfrak{Z}_n$  läuft.

Sei

$$\sum_k a_{ik} z_k = 0 \tag{48}$$

eine Basis der Identitäten, das heisst eine linear unabhängige Menge von Identitäten, aus denen alle Beziehungen (47) durch Linearkombination folgen. Sei  $z'_k$  gemäss §§ 2–4 definiert, das heisst ein speziell ausgewähltes mögliches  $z_k$ . Dann erfüllt  $z_k = z'_k - H_k$  alle Bedingungen (47), falls

$$\sum_k a_{ik} H_k = \sum_k a_{ik} z'_k = I_i \tag{49}$$

gilt. Wir haben also zu zeigen, dass diese Gleichungen unter den erwähnten Nebenbedingungen lösbar sind.

#### Lemma 5

Die Identität (47) gilt auf dem Raum  $\mathfrak{R} = \bigcap_k \mathfrak{S}_k^2$ , wobei der Durchschnitt über alle in (47) auftretenden  $z_k$  zu erstrecken ist.

Den Beweis zerlegen wir in verschiedene Schritte:

a)  $\mathfrak{R}$  wird aufgespannt durch  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B} = \bigcap_k \mathfrak{B}_k$ ,  $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{S}_k^0 + T_k$ .  $\mathfrak{B}_k$  ist der Raum der auf  $D_k = M_k \cap T_k$  verschwindenden Testfunktionen.

Sei nämlich  $\varphi \in \mathfrak{R}$ . Dann ist auf jedem  $D_k$   $\varphi$  in  $\mathfrak{U}$ , das heisst es existieren Funktionen  $u_k \in \mathfrak{U}$ , die auf  $D_k$  mit allen Ableitungen mit  $\varphi$  übereinstimmen. Es ist leicht einzusehen, dass die verschiedenen  $u_k$  auf den Schnitten der  $D_k$  glatt zusammenpassen, das heisst man kann eine Funktion  $u \in \mathfrak{U}$  wählen, die auf allen  $D_k$  mit  $\varphi$  übereinstimmt.  $\varphi - u$  liegt dann offensichtlich in  $\mathfrak{B}$ .

Da Gleichung 47 natürlich auf  $\mathfrak{U}$  erfüllt ist, haben wir noch zu zeigen, dass sie auch auf  $\mathfrak{B}$  gilt.

b)  $\mathfrak{B}$  wird aufgespannt durch die Räume

$$\mathfrak{B}_A = \bigcap_{k \in A} \mathfrak{I}_k \cap \bigcap_{k \notin A} \mathfrak{S}_k^0, \tag{50}$$

wobei  $A$  eine Teilmenge der in (47) auftretenden Indizes  $k$  bedeutet.

Sei nämlich  $\varphi \in \mathfrak{B}$ . Sei  $T_k$  der Träger von  $z_k$ . Dann liegt in  $\bigcap_k T_k$   $\varphi$  in  $\mathfrak{B}_\phi$ . Wir setzen also in  $\bigcap_k T_k$ :

$$\varphi_0 = \varphi, \text{ alle andern } \varphi_A = 0.$$

Betrachten wir jetzt  $\bigcap_{k \neq j} T_k \cap \mathcal{C}T_i$ , das heisst die Menge der Punkte, die zu allen  $T_k$  ausser  $T_j$  gehören. Dort liegt  $\varphi$  in  $\bigcap_{k \neq j} \mathfrak{S}_k^0$ .  $\varphi_0$  kann stetig (das heisst nach den Vorschriften von Lemma 4) innerhalb  $\mathfrak{B}_\phi$  aus  $\bigcap_k T_k$  auf die betrachtete Menge fortgesetzt werden.  $\varphi_j = \varphi - \varphi_0$  liegt dann in dieser Menge in  $\mathfrak{B}_i$ . Die übrigen  $\varphi_A$  werden wieder zu Null definiert.

Weiter betrachten wir  $\bigcap_{k \neq i, j} T_k \cap \mathcal{C}T_i \cap \mathcal{C}T_h$ . Wir definieren  $\varphi_0, \varphi_j, \varphi_h$  wieder als stetige Fortsetzungen aus den Gebieten, wo diese Funktionen bereits bekannt sind.  $\varphi_{jh} = \varphi - \varphi_j - \varphi_h - \varphi_0$  liegt dann in  $\mathfrak{B}_{jh}$ , da im betrachteten Gebiet  $\varphi \in \bigcap_{k \neq j, h} \mathfrak{S}_k^0$ . Es ist klar, wie das Verfahren weitergeht.

c) (47) gilt auf  $\mathfrak{B}_A$ .

Sei  $A'$  die Komplementärmenge zu  $A$  bezüglich der in (47) auftretenden Indizes. Die linke Seite von (47) wird auf  $\mathfrak{B}_A$  zu

$$L = \sum_k c_k z_k = \sum_{A'} c_k z_k.$$

Nun ist  $\mathfrak{B}_A \subset \bigcap_{A'} \mathfrak{S}_k^0$ , also ist  $L$  nach § 2 auf  $\mathfrak{B}_A$  eindeutig bestimmt und verschwindet natürlich, da auf  $\mathfrak{S}_z^0$  die formale Definition von  $z$  exakt ist und  $L$  auf  $\mathfrak{B}_A$  formal verschwindet.

Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Wir beweisen jetzt die Lösbarkeit von (49) durch explizite Konstruktion einer Lösung  $H_k$ .

Nach Lemma 5 verschwinden alle  $I_i$  auf dem Raum  $\mathfrak{R} = \bigcap_{k \in Z_n} \mathfrak{S}_k^2$ . Wir können also auf  $\mathfrak{R}$ , der Nebenbedingung entsprechend, alle  $H_k$  zu Null definieren.

Sei  $\mathfrak{R}^j = \bigcap_{k \neq j} \mathfrak{S}_k^2$ . Auf diesem Raum verschwindet  $I_i$ , falls  $a_{ij} = 0$ .

Wir definieren wieder

$$(H_k | \mathfrak{R}^i) = 0 \text{ für } k \neq j.$$

Ferner:

$$(H_j | \mathfrak{R}^j) = \frac{1}{a_{ij}} (I_i | \mathfrak{R}^j), \quad a_{ij} \neq 0. \quad (51)$$

Falls  $z_j$  in keiner Identität vorkommt, das heisst  $a_{ij} = 0$  für alle  $i$ , kann man natürlich  $H_j$  überhaupt zu Null definieren. Die Definition (51) ist von der speziell gewählten Identität  $i$  unabhängig: Ist  $a_{ij} \neq 0$  und  $a_{hj} \neq 0$ , so gilt

$$\frac{1}{a_{ij}} (I_i | \mathfrak{R}^j) = \frac{1}{a_{hj}} (I_h | \mathfrak{R}^j). \quad (52)$$

Aus den Identitäten  $i$  und  $h$  folgt nämlich durch Subtraktion die neue Identität

$$\frac{I_i}{a_{ij}} - \frac{I_h}{a_{hj}} = \sum_k \left( \frac{a_{ik}}{a_{ij}} - \frac{a_{hk}}{a_{hj}} \right) z_k = 0,$$

welche  $z_j$  nicht enthält und somit nach Lemma 5 auf  $\mathfrak{R}^j$  erfüllt ist.

Weiter betrachten wir  $\mathfrak{R}^{jh} = \bigcap_{k \neq j, h} \mathfrak{S}_k^2$ . Wieder können wir  $H_k, k \neq j, h$ , darauf zu Null definieren. Es bleibt dann ein lineares Gleichungssystem für  $H_j, H_h$  übrig, von dem man analog zum Beweis von Gleichung 52 zeigen kann, dass die linken und die rechten Seiten die gleichen linearen Abhängigkeiten aufweisen, das heisst, dass das System lösbar ist. Falls die Lösung eindeutig ist, ist sie nach den Cramerschen Regeln eine lineare Superposition der  $I_i$ , also eine Distribution. Falls die Lösung unterbestimmt ist, definieren wir  $H_h$  als stetige Fortsetzung<sup>7)</sup> aus  $\mathfrak{R}_h \subset \mathfrak{R}_{hj}$  und erhalten dann  $H_j$  wieder als Distribution. Auf  $\mathfrak{R}^h, \mathfrak{R}^j$  stimmen die Resultate natürlich mit den schon bekannten überein.

Es ist klar, wie das Verfahren auf  $\mathfrak{R}^{jhr}, \mathfrak{R}^{jh rs}$  etc. fortgesetzt wird.

Durch (49) werden die  $H_k$  nicht eindeutig festgelegt, wie wir im nächsten Abschnitt am Beispiel der Zweipunktfunktion sehen werden, das heisst die  $z$ 's sind durch die gestellten Bedingungen nicht eindeutig definiert.

## 6. Die Zweipunktfunktion

Für die Zweipunktfunktion versagt das angegebene Verfahren, da Lemma 3 in diesem Fall in der angegebenen Form nicht gilt. Wir werden diesen wichtigen Spezialfall deshalb hier noch kurz gesondert betrachten, und zwar gleich im Vierdimensionalen.

Sei

$$W(\xi) = \langle A(x) A(y) \rangle_0, \quad \xi = x - y \quad (53)$$

die 2-Punkt-Wightman-Funktion, also eine lorentzinvariante Distribution, die in diesem Fall nicht temperiert zu sein braucht.

Wir wollen die Distributionen

$$\begin{aligned} r(\xi) &= \theta(\xi) [W(\xi) - W(-\xi)], \\ a(\xi) &= \theta(-\xi) [W(\xi) - W(-\xi)], \\ \tau(\xi) &= \theta(\xi) W(\xi) + \theta(-\xi) W(-\xi), \\ \bar{\tau}(\xi) &= \theta(-\xi) W(\xi) + \theta(\xi) W(-\xi) \end{aligned} \quad (54)$$

definieren.

Nach L. SCHWARTZ<sup>8)</sup> ist  $W$  in einer Umgebung  $U$  des Ursprungs von einer endlichen Ordnung  $N$ , das heisst noch definiert auf Testfunktionen, die in  $U$  nur  $N$  mal stetig differenzierbar sind. Wir werden den entsprechenden Funktionenraum mit  $\mathfrak{D}_N$  bezeichnen.

Die Resultate von § 2 sind unmittelbar anwendbar, das heisst die Distributionen (54) sind auf dem Raum  $\mathfrak{D}_N^0$  der in  $\xi = 0$  mit allen Ableitungen bis zur Ordnung  $N$  verschwindenden Testfunktionen definiert und sind dort lorentzinvariant.

Aus Gründen der Lorentzinvarianz müssen die betrachteten Zyklen auf dem Unterraum  $\mathfrak{U}_N \subset \mathfrak{D}_N$  der Testfunktionen der Form

$$u(\xi) = \sum_{\mu < \nu} A_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}(\xi), \quad \psi_{\mu\nu} \in \mathfrak{D}_N \quad (55)$$

verschwinden, so dass  $\nu, \tau$  etc. auf  $\mathfrak{D}_N^0 + \mathfrak{U}_N$  definiert ist. Dass diese Definition konsistent ist, folgt auf ähnliche Weise wie in § 3:

Seien  $u_i \in \mathfrak{U}_N, s_i \in \mathfrak{D}_N^0$  zwei Folgen von Testfunktionen mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (u_i - s_i) = 0. \quad (56)$$

Sei

$$\delta_\nu = \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}, \quad D = \prod_{\nu=0}^3 \delta_\nu^{\alpha_\nu}, \quad \sum \alpha_\nu \leq N.$$

Dann:

$$u^D = D u \big|_{\xi=0} = \sum_{\mu < \nu} (\alpha_\mu \psi_{\mu\nu}^{D^\mu} \pm \alpha_\nu \psi_{\mu\nu}^{D^\nu}), \quad (57)$$

$$D_\mu^\nu = \delta_\mu^{\alpha_\mu - 1} \delta_\nu^{\alpha_\nu + 1} \dots, \quad \psi_{\mu\nu}^D = D \psi_{\mu\nu} \big|_{\xi=0}.$$

Gleichung 56 wird zu

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u_i^D = 0 \text{ für alle } D. \quad (58)$$

Wir untersuchen das lineare algebraische Gleichungssystem

$$\sum_{\mu < \nu} (\alpha_\mu c_{\mu\nu}^{D^\mu} \pm \alpha_\nu c_{\mu\nu}^{D^\nu}) = u^D \quad (59)$$

für die Unbekannten  $c_{\mu\nu}^D$ . Es hat sicher eine Lösung, zum Beispiel  $c_{\mu\nu}^D = \psi_{\mu\nu}^D$ . Wir wählen speziell eine Lösung aus, die von den Inhomogenitäten  $u^D$  linear abhängt:

$$c_{\mu\nu}^D = \sum_{D'} A_{\mu\nu}^{DD'} u^{D'} \quad (60)$$

und die somit mit  $u^D$  stetig gegen Null geht. (Die Lösung  $\psi_{\mu\nu}^D$  erfüllt im allgemeinen diese Bedingung nicht!). Seien  $\gamma^D(\xi) \in \mathfrak{D}_{N+1}$  Funktionen mit  $D' \gamma^D \big|_{\xi=0} = \delta_{DD'}$ . Wir definieren:

$$\psi_{\mu\nu}^0(\xi) = \psi_{\mu\nu}(\xi) - \sum_D c_{\mu\nu}^D \gamma^D(\xi), \quad u^0(\xi) = \sum_{\mu < \nu} A_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}^0(\xi). \quad (61)$$

$u_i^0$  liegt in  $\mathfrak{D}_N^0 \cap \mathfrak{U}_N$ , und  $\lim_{i \rightarrow \infty} (u_i^0 - u_i) = 0$ .

Damit lässt sich die Stetigkeit auf  $\mathfrak{D}_N^0 + \mathfrak{U}_N$  sofort beweisen.

Die Trägerbedingungen machen keine Schwierigkeiten, da die Träger aller betrachteten Zyklen den kritischen Punkt  $\xi = 0$  enthalten und somit die entsprechenden Funktionenräume  $\mathfrak{T}_z$  in  $\mathfrak{D}_N^0$  enthalten sind.

Wir können  $r, a, \tau, \bar{\tau}$  auf  $\mathfrak{D}_N$  durch Fortsetzung aus  $\mathfrak{D}_N^0 + \mathfrak{U}_N$  definieren, wobei noch immer ein Summand der Form

$$\sum_{k=0}^{[N/2]} c_k \square^k \delta^4(\xi)$$

frei ist. Die  $c_k$  können zum Beispiel für  $r(\xi)$  beliebig gewählt werden, sind dann aber in den übrigen Zyklen durch die Identitäten

$$\left. \begin{aligned} a(\xi) &= W(\xi) - W(-\xi) - r(\xi) = -r(-\xi), \\ \tau(\xi) &= r(\xi) + W(-\xi), \\ \bar{\tau}(\xi) &= r(\xi) + W(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

festgelegt.

Die Fortsetzung der betrachteten Distribution (zum Beispiel  $r(\xi)$ ) von  $\mathfrak{D}_N^0 + \mathfrak{U}^N$  auf  $\mathfrak{D}_N$  kann übrigens explizit wie folgt durchgeführt werden:

Sei  $\varphi \in \mathfrak{D}_N$  eine Testfunktion. Wir definieren

$$\varphi_n = \square^n \varphi(\xi) \Big|_{\xi=0}$$

und führen Funktionen  $\eta_n(\xi) \in \mathfrak{D}_N$  mit der Eigenschaft

$$\square^m \eta_n \Big|_{\xi=0} = \delta_{mn}$$

ein. Solche Funktionen existieren sicher. Dann spalten wir  $\varphi$  auf gemäss

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{[N/2]} \varphi_n \eta_n(\xi) + \varphi'(\xi).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass  $\varphi' \in \mathfrak{D}_N^0 + \mathfrak{U}_N$ , so dass  $(r | \varphi')$  eindeutig definiert ist. Ferner ist  $\varphi_n = 0$  für alle  $n$ , falls  $\varphi \in \mathfrak{D}_N^0 + \mathfrak{U}_N$ . Wir erhalten also

$$(r | \varphi) = \sum_n \varphi_n (r | \eta_n) + (r | \varphi'), \quad (63)$$

wobei die Konstanten  $c_n = (r | \eta_n)$  willkürlich sind und speziell zu 0 definiert werden können. Auch durch diese spezielle Wahl wird  $r$  nicht eindeutig festgelegt, da  $\varphi'$  und damit  $(r | \varphi')$  von der Wahl der Funktionen  $\eta_n$  abhängt. Ändert man  $\eta_n$  um die Funktion  $\delta \eta_n$ , so ändert sich (63) um  $\varphi_n (r | \delta \eta_n)$ , so dass die Unbestimmtheit  $\sum c_n \square^n \delta^4(\xi)$  immer noch bestehen bleibt.

Herrn Prof. R. JOST möchte ich für einige klärende Diskussionen danken.

**Literaturverzeichnis**

- 1) H. LEHMANN, K. SYMANZIK und W. ZIMMERMANN, *Il Nuovo Cimento* *7*, 205 (1955); *6*, 319 (1957).
- 2) O. STEINMANN, *Helv. Phys. Acta* *33*, 257 und 347 (1960); D. RUELLE, *Il Nuovo Cimento* *19*, 356 (1961); H. ARAKI, *J. Math. Phys.* *2*, 163 (1961).
- 3) A. S. WIGHTMAN, *Phys. Rev.* *101*, 860 (1956).
- 4) D. RUELLE, *loc. cit.*
- 5) L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, 2. Band, 2. Aufl. (Hermann, Paris 1959), p. 95.
- 6) G. KÖTHER, *Topologische lineare Räume I* (Springer 1960), p. 207.
- 7) G. KÖTHER, *loc. cit.*, p. 194.
- 8) L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, 1. Band, 2. Aufl. (Hermann, Paris 1957), p. 82.