**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta
**Band:** 37 (1964)
**Heft:** III

**Artikel:** De la permutabilité des opérateurs non hornes
**Autor:** Guenin, M. / Misra, B.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-113479

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 21.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# De la permutabilité des opérateurs non bornes*)

par **M. Guenin****) et **B. Misra**
Institut de Physique Théorique de l'Université de Genève

(22. XI. 63)

*Abstract*: The notion of commutativity for unbounded operators is discussed.

## § 1. Introduction

La localité dans une théorie des champs locaux s'exprime par la permutabilité des opérateurs de champ, si leurs supports sont séparés par une distance du genre espace. Il est par conséquent important, avant de vouloir construire une théorie des champs locaux, de savoir définir la permutabilité d'opérateurs non-bornés dans un espace de HILBERT $\mathfrak{H}$.

La définition usuelle est que 2 opérateurs $T_1$ et $T_2$ sont permutables si $T_1 T_2 \psi = T_2 T_1 \psi \ \forall \ \psi \in D$ où $D$ est dense dans $\mathfrak{H}$, $T_1 T_2$ et $T_2 T_1$ étant définis sur $D$.

Dans un certain nombre de travaux récents (par exemple [1-4]) la localité a été exprimée en utilisant les algèbres de VON NEUMANN engendrées par les opérateurs de champ. Si $T_1$ et $T_2$ sont supposés auto-adjoints (comme dans [1]), [2]) et [4]) par exemple) cette nouvelle définition revient à dire que $T_1$ est permutable à $T_2$ si chaque projecteur de la décomposition spectrale de $T_1$ est permutable à chaque projecteur de la décomposition spectrale de $T_2$.

Le but de cette note est de montrer, en utilisant un exemple donné par NELSON[5]), que cette nouvelle définition n'est pas équivalente à la définition usuelle, et d'en établir quelques unes des propriétés essentielles. Nous examinerons également les relations de ce travail avec une publication de M. H. STONE[6]) qui présente certaines analogies du moins formelles.

## § 2. Définitions usuelles de la permutabilité

Dans ce paragraphe nous rappelerons quelques unes des propriétés de la permutabilité d'opérateurs.

On dit que 2 opérateurs *bornés* $A$ et $B$ sont *permutables*, et l'on écrit $A \smile B$ si

$$AB = BA \, . \tag{1}$$

*) Travail présenté à la session de printemps de la Société Suisse de Physique, le 5 mai 1963 à Berne.

**) Subventionné par le Fond National pour la recherche scientifique.

Cette définition se justifie par le fait que $AB$ et $BA$ sont définis sur tout l'espace de HILBERT $\mathfrak{H}$.

D'autre part, on dit qu'un opérateur *borné* $B$ est *permutable* à un opérateur *non borné* $T$, si $TB$ est une extension de $BT$:

$$BT \subseteq TB \tag{2}$$

et l'on écrit $B \smile T$. Cette définition est justifiée par le fait que les règles de calcul suivantes sont valables[7]):

(a) $B \smile T_1$ et $B \smile T_2$ entraînent $B \smile (T_1 + T_2)$ et $B \smile T_1 T_2$.
(b) $B_1 \smile T$ et $B_2 \smile T$ entraînent $(B_1 + B_2) \smile T$ et $B_1 B_2 \smile T$.
(c) Si $T^{-1}$ existe, $B \smile T$ entraîne $B \smile T^{-1}$.
(d) $B \smile T_n$ $(n = 1, \ldots)$ entraîne $B \smile \lim\,(\text{forte})\; T_n$.
(e) $B_n \smile T$ $(n = 1, \ldots)$ entraîne $\lim\,(\text{forte})\; B_n \smile T$ si $\lim B_n$ est bornée et $T$ fermé.
(f) Si $T^*$ existe, $B \smile T$ entraîne $B^* \smile T^*$.

Le cas où les 2 opérateurs sont non bornés est plus complexe; la définition la plus naturelle est la suivante: $T_1$ et $T_2$ sont permutables, si $T_1 T_2$ et $T_2 T_1$ sont définis et égaux sur un domaine commun $D$ tel que $D$ soit dense dans $\mathfrak{H}$, ce que nous écrirons

$$(T_1 T_2 - T_2 T_1)\, \psi = 0 \quad \forall\, \psi \in D\,. \tag{3}$$

VON NEUMANN[8]) a donné une autre définition, que nous pouvons appeler *permutabilité faible*. Nous dirons que $T_1$ et $T_2$ sont *faiblement permutable* si $D = D_{T_1} \cap D_{T_2} \cap D_{T_1^*} \cap D_{T_2^*}$ est dense dans $\mathfrak{H}$, et si $\forall\, \varphi, \psi \in D$

$$(T_1^*\, \varphi,\, T_2\, \psi) = (T_2^*\, \varphi,\, T_1\, \psi)\,. \tag{4}$$

VON NEUMANN a montré que cette définition était effectivement plus faible que (3)*) Mais en physique, et plus précisément en théorie axiomatique des champs, on fait en plus l'hypothèse que

$$T_i\, D \in D \quad \text{et} \quad T_i^*\, D \in D \quad i = 1, 2$$

et ces relations impliquent que $T_1 T_2$ et $T_2 T_1$ sont définis sur $D$; il est alors immédiat que (4) implique (3).

Pour terminer cette section, nous examinerons le cas de la permutabilité d'opérateurs auto-adjoints. Soient $H_1$ et $H_2$ 2 opérateurs auto-adjoints, $E_1(\sigma)$ et $E_2(\lambda)$ leurs projecteurs spectraux respectifs. Nous dirons que $H_1$ est permutable à $H_2$ si

$$E_1(\sigma) \smile E_2(\lambda) \quad \forall\, \sigma, \lambda\,. \tag{5}$$

Il est bien connu que la condition (5) est équivalente à la suivante:

$$T_1 T_2 \quad ou \quad T_2 T_1 \quad \text{est auto-adjoint.} \tag{6}$$

Il existe une forme plus faible de (6), on montre[9]) qu'il est suffisant (pour que $T_1$ et $T_2$ soient permutable au sens (5)) qu'il existe un opérateur auto-adjoint $T$ tel que

$$T \subseteq T_1 T_2 \quad ou \quad T \subseteq T_2 T_1\,. \tag{7}$$

---

*) Car elle ne nécessite pas que $T_1 T_2$ et $T_2 T_1$ soient définis.

Comme nous le montrerons à la fin du § 4, il suit d'un exemple de NELSON que la définition (5) n'est pas équivalente à la définition (3).

## § 3. Permutabilité forte

Nous allons formuler une première généralisation de la définition (5) de la permutabilité d'opérateurs auto-adjoints, généralisation qui s'applique à tous les opérateurs fermés.

Lorsque l'on passe des opérateurs auto-adjoints aux opérateurs fermés, on utilise généralement la décomposition dite polaire (ou canonique) des opérateurs fermés. Tout opérateur linéaire fermé $T$ peut s'écrire

$$T = \Omega B$$

où $\Omega$ et $B$ ont les propriétés suivantes: $B$ est un opérateur auto-adjoint défini positif et tel que $B^2 = T^*T$; $\Omega$ est une isométrie partielle dont le domaine est la fermeture du but de $T^*$ et le but la fermeture du but de $T$. On peut montrer d'autre part que la décomposition ainsi obtenue est unique.

On peut essayer de définir la permutabilité de 2 opérateurs fermés $T_1$ et $T_2$ en disant que $T_1$ et $T_2$ *sont fortement permutables* si avec $T_i = \Omega_i B_i$

$$\left.\begin{array}{lll} \Omega_1 \smile \Omega_2\,, & B_1 \smile B_2 & (\text{selon (5)}), \\ \Omega_1 \smile B_2\,, & \Omega_2 \smile B_1 & (\text{selon (2)}). \end{array}\right\} \quad (8)$$

Nous ne nous attarderons pas à cette définition; remarquons seulement que (8) implique (3). Nous montrerons par un exemple (au § 5) que (8) est effectivement plus forte que (3). Mais cette définition est d'une certaine manière «pathologique». En effet, elle n'est pas «symétrique» en ce sens qu'elle nécessite un choix fixe dans la décomposition polaire. On peut écrire $T = \Omega B$ mais aussi $T = C\Omega$ avec le *même* $\Omega$ et $C^2 = TT^*$ (au lieu de $B^2 = T^*T$). Mais $\Omega \smile B$ n'implique *pas* $\Omega \smile C$, comme nous le montrerons par un exemple (au § 5). Pour donner à la définition (8) cette «symétrie» supplémentaire, il faudrait définir la permutabilité forte par $T_1 T_2$ (fortement) si

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 \smile \Omega_2,\ B_1 \smile B_2,\ C_1 \smile C_2,\ \Omega_1 \smile B_2 \\ \Omega_1 \smile C_2,\ \Omega_2 \smile B_1,\ \Omega_2 \smile C_1\,. \end{array}\right\} \quad (8\,\text{bis})$$

Nous abandonnerons la permutabilité forte pour une définition beaucoup plus élégante, que nous appelerons permutabilité hyperforte.

## § 4. Permutabilité hyperforte

Nous formulerons ici une nouvelle généralisation de la définition (5) donnée pour les opérateurs auto-adjoints, généralisation qui, dans la forme que nous en donnerons, s'applique aux opérateurs fermés. Mais une généralisation à tous les opérateurs linéaires peut se faire sans difficulté.

Remarquons tout d'abord que la définition (5) est équivalente à la suivante:

Si $H_1$ et $H_2$ sont auto-adjoints, $H_1$ est permutable à $H_2$ si

$$\{H_1\}'' \subset \{H_2\}' \tag{9}$$

où $\{H_1\}''$ est l'algèbre de VON NEUMANN engendrée par $H_1$, et $\{H_2\}'$ est l'ensemble des opérateurs bornés permutables à $H_2$ (au sens (2)). La relation (9) peut paraître «asymétrique», mais ce n'est pas en fait le cas puisqu'elle implique

$$\{H_1\}' \supset \{H_2\}''.$$

$\{H_1\}''$ contient tous les projecteurs spectraux de $H_1$ (ainsi que toutes les fonctions bornées de $H_1$), de même, *mutatis mutandis*, $\{H_2\}''$. $\{H_1\}'' \subset \{H_2\}' = \{H_2\}'''$ signifie simplement que les projecteurs spectraux de $H_1$ font partie de l'ensemble des opérateurs bornés permutables aux projecteurs spéctraux de $H_2$. La généralisation de (9) au cas des opérateurs fermés peut se faire simplement en disant que 2 opérateurs fermés $T_1$ et $T_2$ sont *(hyperfortement)* permutables, et l'on écrit $T_1 \smile\!\!\!\smile T_2$, si

$$\{T_1\}'' \subset \{T_2\}' \tag{10*)}$$

où il faut entendre par $\{T_i\}''$ la plus petite algèbre de VON NEUMANN à laquelle $T_i$ soit affilié, donc l'algèbre de VON NEUMANN engendrée par $T_i$ et $T_i^*$. On peut donc simplement définir $\{T_i\}'$ par l'ensemble des opérateurs bornés $B$ tels que $B$ *et* $B^*$ soient permutable à $T_i$ (au sens (2))**). (Remarquons que l'on obtient la permutabilité hyperforte en ajoutant $\Omega_1 \smile \Omega_2^*$ à la définition (8) de la permutabilité forte.)

Cette définition de la permutabilité jouit d'une propriété assez curieuse; en effet mettons dans la définition (10) deux fois $T$:

$$\{T\}'' \subset \{T\}'.$$

Cette relation signifie que $\{T\}''$ est abélienne, autrement dit nous avons le

*Lemme 1*

Un opérateur linéaire et fermé est (hyperfortement) permutable à lui-même si et seulement s'il est normal.

Nous pourrons donc donner au § 5 un exemple d'opérateur qui ne soit pas (hyperfortement) permutable à lui-même. La permutabilité hyperforte jouit des propriétés suivantes (chaque fois que $R_1 R_2$ et $R_1 + R_2$ sont définis):

*Lemme 2*

(a) $T \smile\!\!\!\smile I$, $I$ étant l'identité,
(b) $T \smile\!\!\!\smile R_1$, $T \smile\!\!\!\smile R_2$ entraînent $T \smile\!\!\!\smile (R_1 + R_2)$,
(c) $T \smile\!\!\!\smile R_1$, $T \smile\!\!\!\smile R_2$ entraînent $T \smile\!\!\!\smile R_1 R_2$,
(d) si $T^{-1}$ existe, $T \smile\!\!\!\smile R$ entraîne $T^{-1} \smile\!\!\!\smile R$.
(e) $T \smile\!\!\!\smile R$ entraîne $T^* \smile\!\!\!\smile R$, $T \smile\!\!\!\smile R^*$ et $T^* \smile\!\!\!\smile R^*$.

---

*) Si $T_2$ n'est pas fermé, $\{T_2\}'$ n'est pas une algèbre de VON NEUMANN, il faudrait alors écrire $\{T_1\}'' \subset \{T_2\}'''$.

**) Pour une discussion des propriétés élémentaires des algèbres de VON NEUMANN, voir par exemple ref. [3]).

(a) est évident puisque $I$ est contenu dans toute algèbre de VON NEUMANN.

(b) et (c) se montrent en observant que

$$\{R_1\}'' \subset \{T\}', \{R_2\}'' \subset \{T\}'$$

donc que

$$\{R_1, R_2\}'' \subset \{T\}'$$

mais

$$\{R_1, R_2\}'' \supset \{R_1 + R_2\}'' \quad \text{et} \quad \{R_1, R_2\}'' \supset \{R_1 R_2\}'' .$$

(d) provient du fait que si $T^{-1}$ existe,

$$\{T\}' = \{T^{-1}\}' \quad \text{(cf. § 2 propriété c))} .$$

(e) se montre en remarquant que suivant notre définition

$$\{T\}'' = \{T^*\}'' .$$

Il serait très utile pour les applications d'avoir une relation comme (d) ou (e) du § 2. Nous allons démontrer le

*Théorème 1*

Si $\{A_n\}$ est un ensemble d'opérateurs fermés, tels que $A_n \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} A$ (fermé), et tels que les $A_n$ et $A$ aient un domaine commun $D$ qui soit dense dans $\mathfrak{H}$, alors $A_n \smile R$, $\forall\, n$, $R$ fermé, implique $A \smile R$.

Le démonstration de ce théorème est immédiate si l'on a le lemme suivant:

*Lemme 3*

Soient $\{A_n\}$, $A$ comme dans le théorème 1. Alors $A_n \, \eta \, \mathfrak{A}$ ($A_n$ affiliée à l'algèbre de VON NEUMANN $\mathfrak{A}$) implique $A \, \eta \, \mathfrak{A}$.

En effet, nous avons par hypothèse $\{A_n\}'' \subset \{R\}'$. Par conséquent $A_n \, \eta \, \{R\}'$; $A \, \eta \, \{R\}'$ signifie $\{A\}'' \subset \{R\}'$.

Il ne nous reste donc qu'à effectuer la

*Démonstration du lemme 3*

Prouver le lemme 3 revient à montrer, que sous les hypothèses considérées, $A_n \smile B$ implique $A \smile B$ où $B$ est un opérateur borné.

$A_n \smile B$ signifie $BA_n \subseteq A_n B$. Donc il existe un domaine $D_1$ tel que $BD_1 \subseteq D$ (et $D_1 \supseteq D$, en général). Posant $D_2 = D_1 \cap D$ nous aurons $BD_2 \subseteq D$.

Soient $f, g \leqslant D_2$

$$|(f, (BA - AB)\, g)| \leqslant |(f, (BA - BA_n)\, g)| + |(f, (AB - A_n B)\, g)|$$
$$|(B^* f, (A - A_n)\, g)| + |(f, (A - A_n)\, B\, g)| .$$

Les 2 expressions du membre de droite sont bien définie, comme il résulte de la discussion sur les domaines; fixons un $\varepsilon > 0$, $f$ et $g$. Il existe un $m$ tel que $|(B^* f, (A - A_m) g| < \varepsilon/2$ et un $n$ tel que $|(f, (A - A_n) B g)| < \varepsilon/2$. Par conséquent, $|(f, (BA - AB) g)|$ est plus petit que tout nombre positif pour tout $f$ et $g \in D_2$, donc, comme $D_2$ est dense dans $(BA - AB) \subset 0$, ce qui prouve le lemme.

Très souvent en physique, nous n'avons pas à considérer seulement la permutabilité de 2 opérateurs, mais de 2 ensembles d'opérateurs. En général il s'agit d'*-ensemble, c'est-à-dire d'ensembles stables par rapport à l'adjonction. La seule «pathologie» (lemme 1) que nous ayons rencontrée jusqu'à présent avec la permutabilité hyperforte est liée au fait que nous prenons des algèbres de von Neumann, qui sont des *-ensembles, alors que $\{T\}$ n'est pas un *-ensemble en général.

On peut définir pour 2 ensembles $\gamma_1$ et $\gamma_2$ d'opérateurs fermés leur permutabilité par

$$\{\gamma_1\}'' \subset \{\gamma_2\}' \tag{11}$$

et on peut se demander si cette définition est équivalente à la définition (3) généralisée:

$$A \smile B \text{ (au sens (3))} \quad \forall A \in \gamma_1 \,, \ B \in \gamma_2 \tag{12}$$

si les ensembles $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont des *-ensembles (ce qui est souvent le cas en physique).

Montrer que (11) implique (12) revient à démontrer le

*Lemme 4*

$T_1 \underset{\smile}{\smile} T_2$ implique $T_1 \smile T_2$, $T_1 \smile T_2^*$ au sens (3).

Comme $T_1 \underset{\smile}{\smile} T_2$ implique $T_1 \underset{\smile}{\smile} T_2^*$, il suffit de montrer que nous avons $T_1 \smile T_2$.

Ecrivons la décomposition polaire de $T_1$ et $T_2$.

$T_i = \Omega_i B_i$; clairement $\Omega_1 \smile \Omega_2$; $\Omega_1$ est permutable aux projecteurs spectraux de $B_2$, donc à $B_2$, $\Omega_1 \smile B_2$ et de même $\Omega_2 \smile B_1$. De plus les projecteurs spectraux de $B_1$ et ceux de $B_2$ sont permutables, donc $B_1 \smile B_2$. A présent

$$T_1 T_2 = \Omega_1 B_1 \Omega_2 B_2 \supseteq \Omega_1 \Omega_2 B_1 B_2 \,,$$

$$T_2 T_1 = \Omega_2 B_2 \Omega_1 B_1 \supseteq \Omega_2 \Omega_1 B_2 B_1 \,,$$

c'est-à-dire $T_1 T_2 = T_2 T_1$ sur un domaine dense, le domaine de l'opérateur auto-adjoint $B_1 B_2 = B_2 B_1$, donc $T_1 \smile T_2$ au sens (3).

Il est possible de démontrer la réciproque du lemme 4 pour le cas particulier suivant:

*Lemme 5*

Si $A$ est un opérateur borné, $T$ un opérateur fermé, et si $A \smile T$, $A \smile T^*$ alors $A \underset{\smile}{\smile} T$.

Nous ferons la démonstration pour le cas où $A = U$, opérateur unitaire. Soit $T = \Omega B$, la décomposition polaire de $T$; $U \Omega U^{-1} U B U^{-1}$ est la décomposition polaire de $U T U^{-1} = T$. Comme $T^* \smile U$, $T \smile U$, $U B U^{-1} = B$ étant donnée l'unicité de la décomposition polaire, nous devons aussi avoir $U \smile \Omega$, et de même $U^* \smile \Omega$, donc $U \smile \Omega^*$. Mais $\{T\}'' = \{\Omega, \Omega^*, B\}''$, par conséquent $U \in \{T\}'$, $\{U\}'' \subset \{T\}'$, $U \underset{\smile}{\smile} T$.

Mais la réciproque du lemme 4 n'est pas valable de manière générale. En effet NELSON[5]) a donné un exemple qui satisfait aux conditions suivantes:

Il existe 2 opérateurs symétriques $A$ et $B$ tels que leur fermetures $\bar{A}$ et $\bar{B}$ soient auto-adjointes et ayant un domaine commun dense et invariant $D$ tel que pour tout $\psi \in D$, $AB\,\psi = BA\,\psi$, mais tels que les projecteurs spectraux de $\bar{A}$ ne soient pas permutables aux projecteurs spectraux de $\bar{B}$. $A$ et $B$ sont déjà essentiellement auto-adjoints sur $D$.

Par conséquent, même pour les opérateurs auto-adjoints, la permutabilité hyperforte est strictement plus forte que la permutabilité au sens usuel (3). Pour les opérateurs auto-adjoints, la permutabilité hyperforte est la même que la permutabilité au sens (5).

## § 5. Exemples

Nous allons donner un exemple très simple d'un opérateur qui est fortement permutable à lui même, mais pas hyperfortement.

Choisissons une base $\{e_i\}$ dans $\mathfrak{H}$. Soit $W$ l'opérateur défini par

$$W\,e_i = e_{i+1}\,,$$

$$W^*\,e_i = e_{i-1} \quad i \geqslant 2\,,$$

$$W^*\,e_1 = 0\,,$$

$W^*W = I$ et $WW^* = P = I - P_1$, où $P_1$ est le projecteur sur $e_1$.

La décomposition polaire de $W$ est $W = WI$ ($= PW$). Selon la définition (8), (mais pas selon la définition (8bis)) $W$ est fortement permutable à lui-même, puisque $WI$, mais pas hyperfortement puisque $W$ n'est pas permutable à $W^*$ et que $W$ et $W^*$ appartiennent à l'algèbre de VON NEUMANN engendrée par $W$.

Nous allons encore donner un exemple d'opérateur permutable à lui-même au sens ordinaire, mais pas fortement. Soit $H$:

$$H\,e_i = \frac{1}{i}\,e_i$$

$H$ est borné, défini sur tout $\mathfrak{H}$. Soit $T = WH$; clairement $W$ n'est pas permutable à $H$, donc $T$ n'est pas fortement permutable à lui-même. Mais $T^2$ est parfaitement défini:

$$T^2 = WHWH\,, \quad T^2\,e_i = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{i+1}\,e_{i+2}\,.$$

Donc $T$ est permutable à lui-même au sens usuel.

## § 6. Addenda

Après la rédaction de ce travail, il nous a été indiqué par le professeur R. JOST que M. H. STONE[6]) avait donné une définition analogue à notre permutabilité hyperforte.

La définition de Stone est la suivante: $A$ est permutable à $B$ si l'algèbre de von Neumann engendrée par $A$ et $B$ est abélienne:

$$\{A, B\}' \supset \{A, B\}'' \quad (\text{Stone}) . \tag{14}$$

Il est facile de voir que la définition (14) de Stone implique la nôtre:

$$\{A\}' \supset \{A, B\}' \supset \{A, B\}'' \supset \{B\}''$$

d'où $\{A\}' \supset \{B\}''$ qui est la définition (10). Cependant on a également

$$\{A\}' \supset \{A, B\}' \supset \{A, B\}'' \supset \{A\}''$$

d'où $\{A\}' \supset \{A\}''$, autrement dit au sens de Stone, une condition nécessaire pour que deux opérateurs soient permutables est qu'il soient normaux (cf. Stone, l.c., théorème 20). Il s'agit d'une condition qui n'est pas nécessaire pour la définition (10), comme on peut le voir aisément à l'aide de l'exemple suivant:

$$\begin{aligned}
&V e_i = e_i \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad V e_i = e_{i+1} \quad i = n, \ldots ;\\
&V^* e_i = e_i \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad V^* e_i = e_{i-1} \quad i = n+1, \ldots ;\\
&V^* e_n = 0 ,
\end{aligned}$$

$V^*V = I$ et $VV^* = I - P_n$ où $P_n$ est le projecteur sur $e_n$. Clairement $V$ n'est pas normal, mais par exemple $P_1 V$ (si $n \geqslant 2$). La définition de Stone est donc strictement plus forte que la permutabilité hyperforte. Toutefois, les 2 définitions sont équivalentes dans le cas des opérateurs normaux et l'on peut donc aussi considérer notre définition comme une extension de celle de Stone.

## § 7. Remerciements

Nous tenons à remercier MM. les professeurs J. M. Jauch, R. Jost et E. C. G. Stueckelberg pour plusieurs discussions sur ce sujet.

## Références

[1] R. Haag and B. Schroer, J. Mat. Phys. *3*, 248 (1962).
[2] E. C. G. Sudarshan and K. Bardakci, J. Mat. Phys. *2*, 767 (1961).
[3] M. Guenin and B. Misra, Nuovo Cim. *30*, 1272 (1963).
[4] H. Araki, *Vorlesungen* (ETH, Zürich 1961).
[5] E. Nelson, Ann. Math. *70*, 572 (cf. p. 606) (1959).
[6] M. H. Stone, J. Indian Math. Soc. *15*, 155 (1951).
[7] F. Riesz et B. S. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Paris 1952), cf. § 116.
[8] J. von Neumann, Math. Ann. *102*, 49 (1929), Anhang III, Collected Works vol. II p. 137.
[9] A. Devinatz, A. E. Nussbaum and J. von Neumann, Collected Works of J. von Neumann, Vol. IV, p. 381.