Reflexions sur les systèmes sphériques autogravitants

Autor(en): **Bouvier, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **38 (1965)**

Heft I

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-113571

Reflexions sur les systèmes sphériques autogravitants

par **Pierre Bouvier**

(12 VI 64)

Avant-propos. Les pages qui suivent ont trait à des domaines fort éloignés de ceux qui absorbaient mon attention à l'époque où j'eus le privilège d'être l'élève de E. STUECKELBERG. Elles n'en constituent pas moins un très modeste hommage rendu ici pour son soixantième anniversaire au maître éminent qui m'a enseigné avec constance l'art difficile entre tous de ne jamais s'estimer entièrement satisfait de soi.

1. Introduction

Les recherches effectuées à l'Observatoire de Genève depuis quelques années ont pour objet principal la structure de la Galaxie, étudiée du double point de vue de la photométrie polychromatique et de la dynamique des systèmes stellaires.

Parmi la grande variété d'objets que renferme la Galaxie, certains aggrégats ou amas d'étoiles retiennent particulièrement notre attention; il s'agit de systèmes approximativement autogravitants dont la signification cosmogonique revêt une grande importance. La force prédominante ici est l'attraction gravitationnelle mutuelle des étoiles de l'amas laquelle tend, en vertu de sa nature isotrope, à conférer à l'amas une symétrie sphérique dans l'espace.

2. Systèmes sphériques stationnaires

Envisageons donc un système sphérique caractérisé, à toute distance r de son centre, par un potentiel

$$U = U(r, t) .$$

Supposons que l'on puisse définir en tout point une fonction de distribution

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, m, t)$$

telle que $f\, d^3\, r\, d^3\, v\, dm$ représente, à l'instant t, le nombre d'étoiles de masse comprise entre m et $m + dm$ ayant leurs coordonnées de position contenues dans un volume infinitésimal d^3r centré sur le point $\boldsymbol{r}$ et leurs coordonnées de vitesse situées dans un volume infiniment petit d^3v entourant le point $\boldsymbol{v}$ de l'espace des vitesses. L'intégrale

$$\int\int\int f\, d^3r\, d^3v\, dm$$

étendue à tout le domaine des sept variables, est égale au nombre total d'étoiles du système à l'instant t. La description du système à l'aide d'une fonction de distribution ou de probabilité n'est pas entièrement justifiée; il faut que le système soit suffisamment dense, mais du même coup l'effet des rencontres entre étoiles passant l'une près de l'autre se superposera de manière importante au champ global de gravitation dérivé de $U(r, t)$. Or il n'apparaît pas possible d'inclure de façon rigoureuse l'effet des rencontres dans la description statistique qui pourra cependant conserver sa validité sur des durées brèves vis-à-vis de l'échelle de temps de l'évolution du système.

En plaçant au centre C du système considéré l'origine d'un référentiel arbitrairement orienté, nous aurons pour les coordonnées du point $\boldsymbol{r} : r, \theta, \varphi$ et nous noterons les composantes de $\boldsymbol{v} : v_r, v_\theta, v_\varphi$; par conséquent

$$d^3r = r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\ ,$$

$$d^3v = dv_r\, dv_\theta\, dv_\varphi\ .$$

La symétrie sphérique exige que la densité de masse

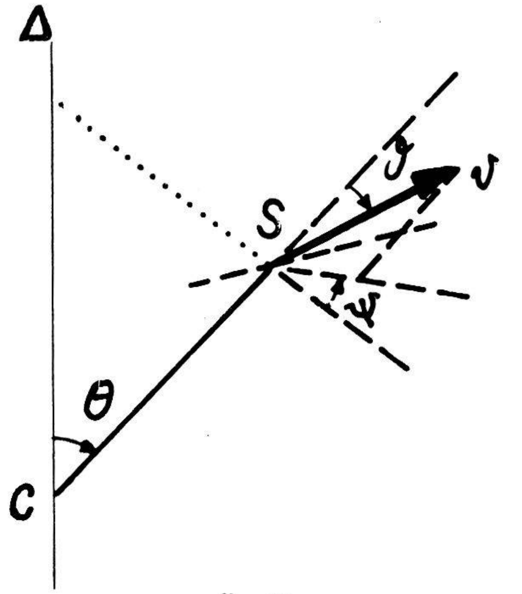
$$\varrho = \int\int m\, f\, d^3v\ dm$$

déduite de $U(r, t)$ par l'équation de Poisson ne dépende que de r et de t de sorte que f doit être indépendante de θ et de φ.

Désignons en outre par v, ϑ, ψ les coordonnées polaires de la vitesse $\boldsymbol{v}$ d'une étoile quelconque S dans un référentiel centré sur le point r, θ, φ et axé sur la direction CS (figure). Nous aurons

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} &&= v \cos\vartheta\ , \\ v_\theta &= r\,\dot{\theta} &&= v \sin\vartheta \cos\psi\ , \\ v_\varphi &= r \sin\theta\, \dot{\varphi} &&= v \sin\vartheta \sin\psi \end{aligned}$$

où l'origine des azimuts ψ est déterminée par le plan qui contient l'angle θ.



figure

Envisageons maintenant un système en état stationnaire où l'on peut négliger l'effet des rencontres entre étoiles; chaque étoile se meut alors sous l'action du potentiel dû à l'ensemble des autres étoiles du système et la fonction $f(r, v_r, v_\theta, v_\varphi, m)$ vérifiera l'équation de Liouville

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left\{ \frac{1}{r} (v_\theta^2 + v_\varphi^2) - \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta}$$
$$- \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} + \frac{v_\varphi}{r} \cot\theta \left(v_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\theta} - v_\theta \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \right) = 0 , \tag{1}$$

quelle que soit la masse m. Il en ira de même pour la fonction

$$F (r, v_r, v_\theta, v_\varphi) = \int m f \, dm$$

indépendante des masses (CAMM[1])).

Par ailleurs si nous voulons que l'équation de Liouville soit satisfaite quelle que soit l'orientation du système de coordonnées, les fonctions f et F ne dépendront alors de v_θ et v_φ que par la combinaison

$$v_t = \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2} = v \sin\vartheta$$

(SHIVESWARKAR[2])). Nous voyons donc que f et F sont indépendantes de ψ, c'est à dire de l'orientation de l'orbite dans l'espace.

3. Quantité totale de rotation

La quantité totale de rotation G_Δ (ou moment angulaire résultant) du système est nulle autour de toute direction Δ passant par C; en effet, pour une étoile de masse m passant au point r, θ, φ le moment angulaire orbital par rapport à la direction Δ définie par $\theta = 0$ a pour valeur (figure 1)

$$A_\Delta = m \, r \, v \sin\theta \sin\vartheta \sin\psi ,$$

par suite

$$G_\Delta = \int\int\int A_\Delta f \, d^3r \, d^3v \, dm .$$

La nullité de G_Δ est une condition nécessaire pour que f soit indépendante de ψ, elle n'est toutefois pas suffisante. Afin de préciser ce point, nous admettrons sans perte de généralité que $f(r, v, \vartheta, \psi, m)$, qui correspond*) à $f(r, v_r, v_\theta, v_\varphi, m)$, est développable en série de FOURIER selon ψ:

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\,\psi + b_k \sin k\,\psi) ,$$

où a_0 et tous les a_k, b_k sont des fonctions de r, v, ϑ, m.

Or les coefficients a_0 et b_1 sont liés respectivement à la densité de masse $\varrho(r)$ et à la quantité totale de rotation G car

*) Le même symbole f est utilisé ici conformément à un usage courant en statistique.

$$\varrho(r) = 2\,\pi \int\int\int a_0\,(r,\,v,\,\vartheta,\,m)\;m\,v^2\,dv\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,dm$$

et

$$G_\Delta = \pi^3 \int\int\int\int b_1\,(r,\,v,\,\vartheta,\,m)\;m\,r^3\,v^3\,\sin^2\vartheta\,dr\,dv\,d\vartheta\,dm\;.$$

a_0 ne doit donc pas être identiquement nul. D'autre part si G_Δ est nul quelle que soit la direction Δ alors b_1 est identiquement nul.

Repérons maintenant les coordonnées à partir d'une direction Δ'; au point r, θ', φ', la vitesse de l'orbite sera donnée par v, ϑ, ψ' où l'origine des ψ' est fixée par le plan (CS, Δ'). La série de Fourier pour f se notera

$$f = a_0' + \sum_1^\infty (a_k' \cos k\,\psi' + b_k' \sin k\,\psi')$$

où

$$\psi' = \psi - \alpha\;,$$

si α désigne l'angle des plans (CS, Δ) et (CS, Δ'). $\varrho(r)$ étant indépendant de toute direction Δ, il en découle

$$a_0 = a_0'$$

Quant aux coefficients a_k', b_k' $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, ils s'expriment en les a_k, b_k au moyen de la matrice de représentation

$$\begin{pmatrix} \cos k\,\alpha & \sin k\,\alpha \\ -\sin k\,\alpha & \cos k\,\alpha \end{pmatrix}$$

du groupe des rotations autour de l'axe CS. Comme on sait, cette matrice est réductible aux deux valeurs

$$e^{\mp i k \alpha}\;,$$

qui constituent, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, les parties irréductibles unidimensionnelles de la représentation de degré infini dont les fonctions f de carré sommable sont le substratum.

En particulier pour $k = 1$,

$$a_1' = a_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha\;,$$
$$b_1' = -a_1 \sin\alpha + b_1 \cos\alpha$$

et si G_Δ est nul autour de toute direction Δ, b_1 et b_1' sont identiquement nuls d'où

$$a_1' = a_1 \cos\alpha\;,\quad 0 = a_1 \sin\alpha\;.$$

Ceci étant vérifié quel que soit α, il en résulte que a_1 et a_1' sont nuls; par contre les coefficients a_k, b_k pour $k > 1$ sont en général différent de zéro.

4. Intégrales premières

Cela précisé, f dépend donc de trois variables r, v_r, v_t ou r, v, ϑ (en plus de m); les équations de mouvement d'une étoile, qui forment le système différentiel associé a l'équation aux dérivées partielles (1), admettent les deux intégrales premières de l'énergie totale

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m U(r)$$

et du moment angulaire par rapport au centre, de grandeur

$$A = m r v \sin\vartheta$$

et nous savons que f ne dépend des coordonnées r, v, ϑ que comme fonction de E et A; il en est de même pour F si E et A sont évalués par unité de masse.

A une distance r donnée, passons des variables v, ϑ aux variables E, A définies plus haut avec $m = 1$; $F(r, v, \vartheta)$ se transforme en $g(E, A)$ et à la suite d'un calcul élémentaire la densité revêt l'expression

$$\varrho(r) = \frac{4\pi}{r} \int_U^{E_\infty} dE \int_0^{A_m} g(E, A) \frac{A\, dA}{\sqrt{A_m^2 - A^2}}, \tag{2}$$

où A_m est la valeur maximum de A à E fixe:

$$A_m^2 = 2 r^2 (E - U) .$$

Si le système évolue peu à peu sous l'effet, négligé jusqu'ici, des rencontres entre étoiles de l'amas, g dépend aussi de t et les intégrales premières E et A sont des fonctions lentement variables du temps; le système est devenu quasi stationnaire et à un instant t, la densité est toujours obtenue par l'expression (2). E_∞ est l'énergie d'évasion, à prendre finie si la masse totale du système doit rester finie (KURTH[3])).

Chercher les diverses distributions $g(E, A)$ qui correspondent à une certaine loi $\varrho(r)$ de la densité revient à résoudre l'équation intégrale (2) pour $g(E, A)$.

Nous avons proposé à cet effet [4]) une méthode basée sur un développement en série de g selon les puissances de A^2

$$g(E, A) = g_0(E) + A^2 g_1(E) + A^4 g_2(E) + \dots \tag{3}$$

série dont il faudra garantir à la fois la convergence uniforme et le caractère défini positif de la somme $g(E, A)$ en tant que fonction de distribution.

Le cas particulier où seul est retenu le terme $g_0(E)$ dans (3) correspond à une distribution isotrope des vitesses.

Dans le cas général où la série (3) est supposée convergente, il apparait possible d'établir, au voisinage du centre $r = 0$ du système une correspondance biunivoque entre (3) et un développment

$$\varrho(r) = \varrho_0(U) + r^2 \varrho_1(U) + r^4 \varrho_2(U) + \dots$$

d'ailleurs purement formel puisque U dépend de r. C'est à partir du choix des coefficients $\varrho_n(U)$ qu'il est alors possible de déduire les distributions $g(E, A)$ correspondant à la densité $\varrho(r)$; nous n'entrerons pas ici dans le détail de la méthode qui a été discutée ailleurs [4] [5] [6].

De manière générale, il faudrait pouvoir évaluer la somme de la série (3) et vérifier qu'elle est finie et positive; dans ce but, il convient de déduire successivement les divers coefficients $g_i(E)$ à partir de g_0. Dans un cas au moins, cette déduction se révèle aisée à savoir lorsque l'on peut écrire.

$$g_n(E) = \frac{1}{n!} \left(\frac{k}{2}\right)^n \frac{d^n g_0}{dE^n} . \qquad (k, \text{const.})$$

On retombe alors sur la distribution ellipsoïdale

$$g(E, A) = g_0 \, (E + k\, A^2) .$$

D'autre part, en ne retenant qu'un nombre fini de termes de (3), on évite la difficulté de convergence et l'on peut, jusqu'à un certain point, classer les distributions $g(E, A)$ d'après les signes des $g_i(E)$. Tandis que le terme $g_0(E)$ est nécessairement positif quel que soit $E < E_\infty$, les signes des cofficients $g_i(E)$ pour $i > 0$ apparaissent liés aux divers genres d'anisotropie de la distribution des vitesses relatives aux étoiles d'énergie totale comprise entre E et $E + dE$.

Bibliographie

[1]) Camm, G. L., Mon. Not. R.A.S. *112*, 155 (1952).
[2]) Shiveswarkar, S. W., Mon. Not. R.A.S. *96*, 751 (1936).
[3]) Kurth, R., Astron. Nachr. *282* 97 (1955).
[4]) Bouvier, P., Pub. Obs. Genève A*63* (1963); *ibid.* A*65* (1963); *ibid.* A*69*, sous presse.