**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta
**Band:** 38 (1965)
**Heft:** I

**Artikel:** Supraconductivité et observabilité des potentiels électromagnétiques
**Autor:** Rothen, F. / Gruber, C. / Rivier, D.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-113580

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 11.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Supraconductivité et observabilité des potentiels électromagnétiques*)

par **F. Rothen, C. Gruber** et **D. Rivier**
Laboratoire de Physique de l'Université, Lausanne

(30 IX 64)

*Abstract.* An elementary model for the superconductor is proposed which uses a Lorentz-invariant scalar function derived from the relativistic form of London equations. Uniformity of this wave function gives the quantization of an invariant quantity, *the generalized fluxoid*, of which the usual fluxoid and "the periodical action" are two special forms. The quantization of the period of the supercurrents of Josephson is shown to be a particular consequence of the latter. In the light of the proposed model, the connection is discussed between the observability of the vector and scalar electromagnetic potentials on one hand, and of the quantization of the fluxoid and of the period of Josephson's supercurrents on the other hand.

## 1. Introduction

La mise en évidence expérimentale de la quantification du fluxoïde attaché à un cylindre creux supraconducteur [8], [9], [10], [15] [18] a attiré l'attention sur le lien qui devait exister entre ce phénomène et ce qu'il est convenu d'appeler avec AHARONOV et BOHM [7] «l'observabilité du potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$», c'est-à-dire son action directe sur un paquet d'ondes matérielles chargées.

Or, en même temps qu'ils suggéraient une expérience pour mettre en évidence l'observabilité de ce potentiel vecteur, AHARONOV et BOHM ont aussi proposé un dispositif qui permettrait en principe d'«observer» de façon analogue le potentiel scalaire $U$, c'est-à-dire son action directe sur un paquet d'ondes matérielles chargées.

Dans ces conditions, il est naturel de penser que l'unicité du quadrivecteur potentiel électromagnétique $A^\mu \equiv (\boldsymbol{A}, U)$ doit entraîner l'existence d'un phénomène caractéristique du supraconducteur dont le lien à l'observabilité du potentiel scalaire $U$ doit correspondre exactement à celui qui joint la quantification du fluxoïde à l'observabilité du potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$.

Le but du présent mémoire est notamment de montrer que ce phénomène existe et qu'il n'est autre que la quantification de «l'action périodique» liée aux phénomènes périodiques dans les supraconducteurs. Un aspect particulier de cette quantification est celle de la période d'oscillation des supracourants de JOSEPHSON [16], courants alternatifs dus à l'effet tunnel entre deux supraconducteurs en équilibre et séparés par un film diélectrique. Prévu en 1962 par JOSEPHSON à partir de la théorie de BOGOLJUBOFF [6], cet effet a été indirectement observé par SHAPIRO [19] une année plus tard.

*) Mémoire dédié au professeur ERNST CARL GERHARDT STUECKELBERG, à l'occasion de son soixantième anniversaire.

## 2. Le choix du modèle relativiste pour le supraconducteur

Suivant le modèle choisi pour décrire le supraconducteur, la quantification du fluxoïde apparaît comme une conséquence plus ou moins convaincante de principes fondamentaux de la physique. Une première méthode décrit le système fourni par le supraconducteur au moyen d'une fonction d'onde scalaire à une «particule», identifiée par ONSAGER[12]) avec une paire de COOPER[5]), ce qui revient à considérer le fluide supraconducteur comme un ensemble de particules de Bose chargées dont on néglige l'interaction détaillée. Une seconde méthode utilise la théorie semi-phénoménologique de GINZBURG et LANDAU[4]) où le système supraconducteur est décrit à l'aide d'une «pseudo-fonction d'onde» scalaire dont le carré du module est interprété comme le paramètre d'ordre caractéristique de la transition de la phase normale à la phase supraconductrice. La nécessité, dans ce qui suit, de décrire des processus non stationnaires exclut ici l'emploi du formalisme de GINZBURG et LANDAU.

Par contre, le cadre manifestement relativiste dans lequel s'inscrit toute synthèse des potentiels électromagnétiques vecteur et scalaire conduit naturellement à présenter les raisonnements sous une forme explicitement covariante: c'est ainsi que la description ici adéquate du système de supraconducteurs est obtenue à partir de la généralisation relativiste que LONDON a lui-même donnée de ses équations macroscopiques[3]).

## 3. La généralisation relativiste des équations de LONDON

Dans son exposé général de la supraconductivité LONDON, après avoir proposé, puis illustré les équations fondamentales*)

$$\operatorname{rot}(\Lambda \boldsymbol{j}\, s) + \frac{1}{c}\boldsymbol{B} = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \boldsymbol{j}\, s) - \boldsymbol{E} = 0\,, \tag{1}$$

qui portent son nom, les a comparées aux équations de mouvement d'un ensemble de particules chargées sans viscosité, plongées dans un champ électromagnétique extérieur. Ces dernières équations ont été données d'abord dans l'écriture conventionnelle de l'hydrodynamique, puis sous une forme explicitement covariante relativiste. LONDON alors a démontré que les équations de mouvement relativistes d'un ensemble de particules chargées sans viscosité admet des solutions vérifiant des équations qui, pour la limite de vitesses petites par rapport à celle de la lumière, coïncident avec les équations (1).

Plus précisément, si $A^\mu \equiv (\boldsymbol{A}, U)$ est le quadrivecteur potentiel fonction du quadrivecteur évènement $x^\mu \equiv (\boldsymbol{x}, \mathrm{ct})$ avec $\mu = 1, 2, 3, 4$ et si $d\tau = (dx^\mu\, dx_\mu)^{1/2}/c$ est l'élément de temps propre avec $dx^\mu\, dx_\mu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ où le tenseur métrique est donné par $g_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$, $g_{ii} = -1$ pour $i = 1, 2, 3$ et $g_{44} = +1$, l'équation de mouvement d'une particule chargée peut s'écrire

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e^*}{m^*\, c}\, B^{\mu\nu}\, u_\nu \tag{2}$$

*) Dans les équations (1), $\boldsymbol{j}^s$ est la densité de supracourant et $\Lambda$ la constante du supraconducteur. C'est le système d'unités de GAUSS qui est utilisé.

où nous avons introduit la quadrivitesse

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \left( \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; ; \; \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right),$$

satisfaisant à l'identité

$$u^\mu \, u_\mu = c^2 \tag{3}$$

et le champ électromagnétique $B^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ avec

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \, \partial_\nu \text{ et } \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} .$$

Dans (2) interviennent aussi la masse $m^*$ et la charge $e^*$ de la particule de vitesse $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$. En combinant (2) et (3), on peut écrire l'équation de mouvement sous la forme équivalente

$$u^\nu \left[ \partial_\nu \, u_\mu - \partial_\mu \, u_\nu + \frac{e^*}{m^* \, c} \, (\partial_\nu \, A_\mu - \partial_\mu \, A_\nu) \right] = 0$$

équation qui est notamment satisfaite si

$$\partial^\nu \left[ u^\mu + \frac{e^*}{m^* \, c} \, A^\mu \right] - \partial^\mu \left[ u^\nu + \frac{e^*}{m^* \, c} \, A^\nu \right] = 0 \, . \tag{4}$$

Ecrites de façon conventionnelle, ces équations deviennent

$$\operatorname{rot} \left( \frac{m^* \, c}{e^*} \, \boldsymbol{v} \right) + \boldsymbol{B} = 0$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left\{ \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right] \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m^* \, c}{e^*} \, \boldsymbol{v} \right) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \frac{m^* \, c}{e^*} \, v^2 \right\} - \boldsymbol{E} = 0 \, , \tag{5}$$

ce qui pour $v/c \ll 1$ donne bien les équations de London (1), à condition de poser $\boldsymbol{j}^s = m^* \, c/e^* \, \Lambda \, \boldsymbol{v}$, et pour autant que le terme grad $(m^* \, c/2 \, e^* \, v^2) \equiv$ grad $(e^* \, \Lambda^2/2 \, m^* \, c) \, | \, \boldsymbol{j}^s \, |^2$ soit négligeable par rapport aux autres termes. Il est possible de donner aux équations (4) une forme encore plus simple en introduisant le quadrivecteur *momentoïde classique*

$$p^c_\mu = m^* \, u_\mu + \frac{e^*}{c} \, A_\mu \, . \tag{6}$$

Les équations (4), qui peuvent s'écrire

$$\partial_\mu \, p^c_\nu - \partial_\nu \, p^c_\mu = 0 \tag{4a}$$

sont alors équivalentes à *l'existence* d'une fonction scalaire de l'espace-temps $S^c(x^\mu)$ telle que

$$p^c_\mu \, (x^\nu) = - \, \partial_\mu \, S^c(x^\nu) \, . \tag{7}$$

Cette fonction $S^c(x^\mu)$ n'est autre que l'action hamiltonienne du système constitué par une particule de masse $m^*$ et de charge $e^*$ dans le champ électromagnétique extérieur $B^{\mu\nu}$. L'intérêt des équations (2) à (7) pour la supraconductivité réside en ceci que, le champ électromagnétique $B^{\mu\nu}$ étant donné, les relations (6) définissent par l'intermédiaire de la quadrivitesse $u^\mu(x^\nu)$ *un champ de vitesses*. Les équations de mouvement (2) comme leur forme particulière (4) peuvent alors s'interpréter comme celles d'un

fluide électriquement chargé, non visqueux, à la fois incompressible et homogène, c'est-à-dire de masse et de charge spécifiques constantes, et dont les forces de pression sont négligeables face aux forces exercées par le champ électromagnétique extérieur $B^{\mu\nu}$.

Quant à la relation (7), elle peut être intégrée pour donner explicitement la fonction

$$S^c_{\gamma_0}(x^\mu) = -\int_{\gamma_0} dx^\nu \, p^c_\nu \,, \tag{8}$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe de l'espace-temps $\gamma_0$ $(0 \to X)$ allant d'une origine (arbitraire) 0 à un point quelconque $X$ et passant entièrement à l'intérieur du domaine de validité des équations (4), appelé «domaine $(\mathfrak{D})$» dans ce qui suit. Considérant deux points $X_i(x^\mu_i)$ et $X_f(x^\mu_f)$ de ce domaine $(\mathfrak{D})$, reliés à l'origine 0 chacun par une courbe $\gamma^i_0$ $(0 \to X_i)$ et $\gamma^f_0$ $(0 \to X_f)$ appartenant à $(\mathfrak{D})$, il est possible d'évaluer la différence

$$\Delta_\gamma S^c(i \to f) = S^c_{\gamma^f_0}(x^\mu_f) - S^c_{\gamma^i_0}(x^\mu_i) = -\int_\gamma dx^\nu \, p^c_\nu \tag{9}$$

où la courbe $\gamma$ $(i \to f)$ est constituée de la courbe $\gamma^i_0$ parcourue du point $X_i$ à l'origine 0 et de la courbe $\gamma_0$ parcourue de cette origine 0 au point $X_f$, selon la figure 1:

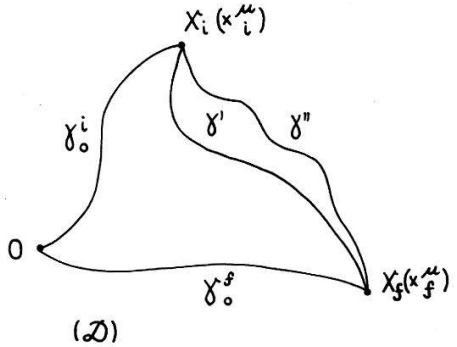


Fig. 1

La différence $\Delta_\gamma S^c$ $(i \to f)$ ne dépend que des points initial $X_i$ et final $X_f$ (et se trouve donc avoir la même valeur) pour toutes les courbes $\gamma, \gamma', \ldots$ pouvant se déformer de façon continue les unes dans les autres tout en restant dans le domaine $(\mathfrak{D})$. Ce qui revient à dire que la fonction $S^c_{\gamma_0}(x^\mu)$ est uniforme si le domaine $(\mathfrak{D})$ est simplement connexe et qu'elle est multiforme si ce domaine est multiplement connexe.

Si les deux points $X_i$ et $X_f$ coïncident, l'intégrale le long de la courbe *fermée* $\gamma$ (située entièrement dans le domaine $(\mathfrak{D})$)

$$\Delta_\gamma S^c(\circlearrowleft) = -\oint_\gamma dx^\mu \, p^c_\mu \tag{10}$$

est un invariant caractéristique de la région de l'espace-temps embrassée par la courbe $\gamma$. Si cette courbe peut être réduite à un point de façon continue en restant dans le domaine $(\mathfrak{D})$, alors l'invariant est nul. Dans le cas contraire, $\Delta_\gamma S^c(\circlearrowleft)$ a en général une valeur différente de zéro. Toutefois, en vertu des équations (4), cette valeur

est la même pour toute courbe $\gamma$ appartenant à une même famille de lignes fermées continûment déformables les unes dans les autres sans sortir du domaine ($\mathfrak{D}$). En effet, si $\gamma'$ est une courbe fermée obtenue à partir de $\gamma$ par le déplacement $\delta x^\nu(x^\mu)$, on a

$$\delta \Delta_\gamma S^c(\circlearrowleft) = \Delta_{\gamma'} S^c(\circlearrowleft) - \Delta_\gamma S^c(\circlearrowleft) = -\oint_\gamma dx^\mu \, \delta x^\nu \, \partial_\nu p_\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\delta\Sigma} d\sigma^{\mu\nu} \left[\partial_\mu p_\nu - \partial_\nu p_\mu\right] = 0 \,, \tag{11}$$

$\delta\Sigma$ étant le «ruban» limité par les 2 courbes $\gamma'$ et $\gamma$, et $d\sigma^{\mu\nu} = dx^\mu \, \delta x^\nu - dx^\nu \, \delta x^\mu$ l'élément de surface sur celui-là. Deux cas particuliers méritent ici attention.

Si la ligne fermée $\gamma$ est une courbe $C$ fixe dans *l'espace*, sur laquelle $dx^\mu \equiv (d\boldsymbol{x}, 0)$, l'invariant (10) se réduit à

$$\Delta_c S^c(\circlearrowleft) = \oint_c d\boldsymbol{x} \, \boldsymbol{p} \tag{12}$$

et la relation (11) affirme notamment qu'il ne varie pas au cours du temps.

$$\frac{\delta}{\delta t} \Delta_c S(\circlearrowleft) = 0 \,. \tag{13}$$

Si d'autre part, le mouvement est *périodique* de période $c\,T = X^4$, la portion $\Gamma$ de l'axe des temps allant du temps $t_0$ (arbitraire) au temps $t_0 + T$ est l'équivalent d'une courbe *fermée*. L'invariant (10) s'écrit

$$\Delta_\Gamma S^c(T) = -c \int_{t^0}^{t^0+T} dt \, p_4(\boldsymbol{x}, t) = -c \oint_T dt \, p_4 \,. \tag{14}$$

La relation (11) – ou les équations (4) – entraîne notamment

$$\frac{\delta}{\delta x^i} \Delta_\Gamma S^c(T) = 0 \,. \tag{15}$$

L'application de ces résultats aux supraconducteurs n'est valable que dans la mesure où sont remplies les conditions suivantes:

1. La densité de supracourant $\boldsymbol{j}^s$ est liée à la vitesse $\boldsymbol{v}^s$ des porteurs de charge supraconducteurs par la relation

$$\boldsymbol{j}^s = \frac{m^* c}{e^* \Lambda} \boldsymbol{v}^s \,, \tag{16}$$

où il est entendu que le coefficient $m^* c / e^* \Lambda$ est une *constante dans tout le domaine* $\mathfrak{D}$.

2. L'inégalité

$$\left| \operatorname{grad} \frac{e^* \Lambda}{2 m^* c} |\gamma^s|^2 \right| \ll \left| \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{j}^s \right| \tag{17}$$

est vérifiée dans tout le domaine ($\mathfrak{D}$).

La première condition (14) entraîne pour le nombre $n^s$ de porteurs de charges supraconducteurs par unité de volume la propriété d'être *constant dans tout le domaine* ($\mathfrak{D}$.)

En effet (16) donne:

$$n^s = \frac{m^* c}{(e^*)^2 \Lambda}. \tag{18}$$

Ainsi, le modèle relativiste proposé considère bien le fluide supraconducteur comme à la fois non visqueux, incompressible et *homogène*.

Quant à la seconde condition (17), LONDON a déjà montré qu'elle était toujours vérifiée en pratique[3]).

Compte tenu de ces limitations, le modèle classique relativiste du supraconducteur permet notamment de prévoir pour lui les deux propriétés suivantes: d'une part la conservation du *fluxoïde* attaché à une cavité du supraconducteur et d'autre part la constance dans tout le supraconducteur de «*l'action périodique*», c'est-à-dire, pour les régimes périodiques, la constance de la moyenne de la densité d'énergie prise sur une période.

En effet, la forme particulière de l'invariant (10) attaché à la région embrassée par la courbe $C$ peut s'écrire

$$\Delta_c S^c(\bigcirc) = \oint_c \boldsymbol{dx} \left( \frac{m^* \boldsymbol{v}^s}{\sqrt{1 - v^{s2}/c^2}} + \frac{e^*}{c} \boldsymbol{A} \right) = \frac{e^*}{c} \oint_c \boldsymbol{dx} \left( \frac{\Lambda \boldsymbol{j}^s}{\sqrt{1 - (e^* \Lambda / m^* c^2)^2 \, |\boldsymbol{j}^s|^2}} + \boldsymbol{A} \right). \tag{19}$$

Dans la limite non relativiste $v^s \ll c$, cet invariant se confond donc, au facteur $e^*/c$ près, avec le fluxoïde

$$\phi_c = \oint_c \boldsymbol{dx} \, (\Lambda \, \boldsymbol{j}^s + \boldsymbol{A}) \tag{20}$$

attaché à une ou plusieurs cavités embrassées par la courbe $C$ dans un supraconducteur multiplement connexe. La relation (13) démontre la conservation du fluxoïde au cours du temps, et nous appelons *fluxoïde généralisé* l'invariant

$$\phi_\gamma^c = \frac{c}{e^*} \Delta_\gamma S^c(\bigcirc). \tag{21}$$

D'autre part, dans le cas d'un mouvement *périodique*, et en tenant compte de la constance du nombre $n^s$ de porteurs de charge supraconducteurs par unité de volume, la forme particulière (14) de l'invariant peut s'écrire aussi

$$\mathfrak{A}_T^c \equiv \Delta_\Gamma S^c(T) = - \oint_T dt \left( \frac{m^* c}{\sqrt{1 - (e^* \Lambda / m^* c^2)^2 \, |\boldsymbol{j}^s|^2}} + e^* U \right) = \frac{T}{n^s} \langle H \rangle_T, \tag{22}$$

où $\langle H \rangle_T$ désigne la moyenne – prise sur une période $T$ – de la densité d'énergie (cinétique et électromagnétique) du fluide supraconducteur. La relation (15) démontre alors l'unicité de cette valeur moyenne à travers tout le supraconducteur. Dans le cas particulier du régime stationaire, cette unicité se confond avec celle de la «constante de BERNOULLI» généralisée, caractéristique des écoulements irrotationnels au sens de (4a). Nous appelons «*action périodique*» $\mathfrak{A}_T$ l'invariant (22).

Une dernière remarque concernant la jauge électromagnétique est nécessaire. A un changement de cette dernière correspond l'addition à la fonction $S^c(\boldsymbol{x}, t)$ d'une fonction arbitraire *uniforme* $W(\boldsymbol{x}, t)$. Cette transformation laisse toutefois inchangé le scalaire $\Delta_\gamma S^c(\bigcirc)$ (10), qui se trouve être ainsi invariant à la fois par rapport à une transformation de Lorentz et par rapport à une transformation de jauge.

En ce qui concerne les expressions particulières (19) et (22) de cet invariant $\Delta_\gamma S^c$ ( ), il est manifeste que le fluxoïde est lui-même invariant par rapport à une transformation de jauge quelconque. Quant à l'action périodique, elle n'est au contraire invariante que dans un groupe de jauge restreint dont la fonction arbitraire $W(\boldsymbol{x}, t)$ doit satisfaire à la condition de périodicité

$$W(\boldsymbol{x}, t + T) - W(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

nécessaire pour bien conférer à la portion $\Gamma$ de l'axe des temps la propriété d'être équivalente à une courbe fermée de l'espace-temps.

## 4. Le modèle relativiste quantique du supraconducteur et la quantification du fluxoïde généralisé

La quantification de la théorie relativiste du supraconducteur donnée plus haut s'obtient formellement par l'introduction d'une fonction d'onde *scalaire* $\psi(x^\nu)$ satisfaisant à l'équation relativiste de Klein-Gordon

$$\left\{\left(\frac{\hbar}{i}\,\partial_\mu + \frac{e^*}{c}\,A_\mu\right)\left(\frac{\hbar}{i}\,\partial^\mu + \frac{e^*}{c}\,A^\mu\right) - m^{*2}\,c^2\right\}\psi(x^\nu) = 0 \tag{23}$$

décrivant une particule de charge $e^*$ et de masse $m^*$ dans un champ électromagnétique dérivant du potentiel $A^\mu = (\boldsymbol{A}, U)$. Le quadrivecteur densité de *courant de charge* $j^\mu$ satisfaisant à l'équation de continuité $\partial_\mu j^\mu = 0$ est, bien sûr, donné par

$$j^Q_\mu = \frac{\hbar\, e^*}{2\, m^*}\, i\,(\psi^*\,\partial_\mu\psi - \partial_\mu\psi^*\psi) - \frac{e^{*2}}{m^*\,c}\,|\,\psi\,|^2\,A_\mu\,. \tag{23a}$$

Si l'on pose (ce qui est suggéré par les propriétés du modèle classique)

$$\psi(x^\nu) \equiv |\,\psi(x^\nu)\,|\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,S^Q(x^\nu)\right) \tag{24}$$

et si, en parfait accord avec (6), l'on définit le quadrivecteur *momentoïde quantique* $p^Q_\mu(x^\nu)$ par

$$p^Q_\mu = \frac{m^*}{e^*\,|\,\psi\,|^2}\,j^Q_\mu + \frac{e^*}{c}\,A_\mu\,, \tag{25}$$

on a en toute généralité

$$p^Q_\mu(x^\nu) = -\,\partial_\mu\,S^Q(x^\nu)\,. \tag{26}$$

Les équations (25) et (26), qui sont les correspondants quantiques de (6) et (7), peuvent s'intégrer semblablement pour donner explicitement la fonction quantique

$$S^Q_\gamma(x^\mu) = -\int_{\gamma_0} dx^\nu\,p^Q_\nu\,, \tag{27}$$

où $\gamma_0$ est défini comme en (8).

Mais dans ce modèle quantique, comme le montre la relation (24), la fonction $S^Q(x^\nu)/\hbar$ jouit de la propriété caractéristique d'être la phase de la fonction $\psi(x^\nu)$. De ce fait, $S^Q(x^\nu)$ est soumise à une condition supplémentaire, conséquence de *l'uniformité* de cette fonction d'onde scalaire $\psi(x^\nu)$ [1]: la variation $\Delta_\gamma S^Q(\ )/\hbar$ le long d'une courbe *fermée* $\gamma$ du domaine $(\mathfrak{D})$ doit être un multiple entier de $2\pi$. D'où la relation

$$\Delta_\gamma S^Q(\ ) = 2\pi\,n\,\hbar = n\,h \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{28}$$

Compte-tenu de (21), cette relation démontre la *quantification des valeurs du fluxoïde généralisé* $\phi_\gamma^Q$ attaché à la courbe fermée de l'espace-temps $\gamma$ selon

$$\phi_\gamma^Q = \frac{c}{e^*} \Delta_\gamma S^Q(\circlearrowleft) = n \frac{c\,h}{e^*} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{29}$$

Cette propriété apparaît ainsi comme une conséquence directe de la quantification du modèle relativiste de LONDON pour le supraconducteur.

## 5. La quantification du fluxoïde et sa mise en évidence expérimentale

Considérons le cas particulier où la courbe $\gamma$ se réduit à une courbe $C$ de l'espace entourant une ou plusieurs cavités dans un supraconducteur multiplement connexe se trouvant dans un état stationnaire. Dans la limite non relativiste, les relations (20) et (29) donnent simplement

$$\phi_c^Q = \frac{c}{e^*} \oint_c \boldsymbol{dx}\, \boldsymbol{p}^Q = n \frac{h\,c}{e^*} . \tag{30}$$

Lorsque la courbe $C$ se trouve suffisamment à l'intérieur du supraconducteur le courant $\boldsymbol{j}^s$ s'annule et le fluxoïde

$$\phi_c^Q = \oint_c \boldsymbol{dx}\, \boldsymbol{A} = \int_{\Sigma c} d\boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{B} , \tag{31}$$

se réduit au flux d'induction magnétique à travers une surface $\Sigma_c$ s'appuyant sur le contour $C$.

Après les expériences de DEAVER et FAIRBANKS[9]) d'une part et de DOLL et NÄBAUER[10]) d'autre part, celles de LITTLE et PARKS[17]) ont clairement mis en évidence le mécanisme par lequel se trouve assurée la quantification du fluxoïde à l'intérieur d'un cylindre creux supraconducteur. Etant donné une valeur initiale (quantifiée) du flux $\phi_c$ à l'intérieur de ce cylindre, une variation continue du champ $\boldsymbol{B}$ provoque dans le supraconducteur l'apparition d'un supracourant persistant dont l'intensité assure précisément la quantification du flux $\phi_c$. Ce courant entraîne une variation de la température de transition $T_c^j$ du supraconducteur qui permet alors indirectement d'en déceler l'existence. C'est ainsi que les expériences de LITTLE et PARKS vérifient la quantification du flux magnétique $\phi_c$ par la mise en évidence d'une dépendance périodique de la température de transition $T_c$ en fonction de ce flux $\phi_c$, la période étant $h\,c/e^*$.

## 6. Les quantifications de l'action périodique et de la période des supracourants alternatifs de JOSEPHSON; leur mise en évidence expérimentale

Considérons maintenant l'autre cas particulier où le supraconducteur est le siège de phénomènes périodiques et où la courbe se réduit à un segment $\Gamma$ de l'axe des temps d'une longueur égale à la *période* $T$. L'application de la relation (28) à l'invariant qui traduit ici la *périodicité* de la fonction d'onde donne *la quantification de l'action périodique.*

$$\mathfrak{A}_T^Q = \Delta_\Gamma S^Q(T) = -\oint_T dt \left( \frac{m^*\,c}{\sqrt{1-(e^*\,\Lambda/m^*\,c^2)^2\,|\boldsymbol{j}^{S^Q}|^2}} + e^*\,U \right) = n\,h . \tag{32}$$

Il n'est pas évident qu'on puisse observer cette quantification dans un seul supraconducteur. Mais il est simple de la mettre en évidence dans un système formé de deux supraconducteurs séparés par un film diélectrique, tel que JOSEPHSON l'a imaginé pour déceler les supracourants par effet tunnel qui portent son nom[16]).

Considérons, à l'aide de la figure 2 les deux supraconducteurs 1 et 2 portés l'un au potentiel $U_1(x^\nu)$, l'autre au potentiel $U_2(x^\nu)$ et soit $P_1$ un point du supraconducteur

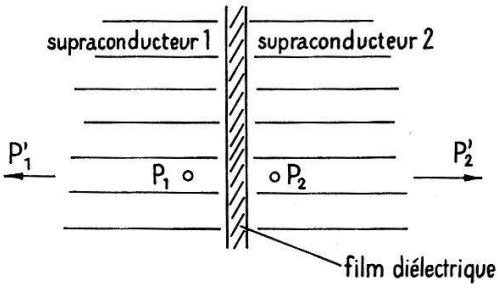


Fig. 2

1 et $P_2$ un point du supraconducteur 2. La barrière diélectrique étant d'abord supposée très large, les 2 systèmes 1 et 2 sont indépendants, et peuvent être le siège de phénomènes périodiques indépendants aussi, de périodes $T_1$ et $T_2$ respectivement. On aura alors selon (32)

$$\mathfrak{A}_{T_1}^{Q_1} = \Delta_{\Gamma_1} S^Q(T_1) = n_1 h \qquad \mathfrak{A}_{T_2}^{Q_2} = \Delta_{\Gamma_2} S^Q(T_2) = n_2 h \,, \tag{33}$$

où $\mathfrak{A}_{T_1}^{Q_1}$ et $\mathfrak{A}_{T_2}^{Q_2}$ sont les actions périodiques quantifiées de chaque système. Passons alors au cas où la barrière diélectrique se réduit à un film suffisamment mince pour que les deux systèmes n'en forment plus qu'un seul: l'occurrence de phénomènes périodiques implique alors l'existence d'une seule période commune $T$. Par soustraction, on tire alors de (33)

$$\mathfrak{A}_T^{Q_2} - \mathfrak{A}_T^{Q_1} = n\, h. \qquad n = n_2 - n_1 \tag{34}$$

Du fait de l'invariance de $\mathfrak{A}_T^{Q_2}$ et $\mathfrak{A}_T^{Q_1}$ vis à vis d'un déplacement dans les supraconducteurs des points $P_2$ et $P_1$, il est possible d'évaluer ces actions périodiques pour des points $P_2'$ et $P_1'$ assez éloignés de la barrière pour que la densité de courant $\boldsymbol{j}$ y soit nulle. Alors la relation (34) devient simplement

$$e^* \oint_T dt\, \Delta U = n\, h \,, \tag{35}$$

où $\Delta U = U_1 - U_2$ est la différence de potentiel scalaire entre les supraconducteurs.

Dans le cas particulier où cette différence de potentiel $\Delta U$ est constante, la relation (33) se réduit à

$$T\, \Delta U = n \frac{h}{e^*} \,. \tag{36}$$

La période $T$ des phénomènes périodiques éventuellement présents dans le système formé par les deux supraconducteurs séparés par le film diélectrique se trouve donc

être quantifiée. C'est notamment le cas pour les supracourants alternatifs de paires de COOPER passant d'un supraconducteur à l'autre par effet tunnel, courants prévus par JOSEPHSON[16]) et qui ont été indirectement observés par SHAPIRO[19]) lorsque le système est irradié par des ondes électromagnétiques de fréquence de l'ordre de $10^{10}$ Hz.

## 7. L'observabilité des potentiels au moyen de systèmes supraconducteurs

Dans leur mémoire de 1959[7]), AHARONOV et BOHM ont mis en évidence le fait qu'un potentiel scalaire $U$ ou un potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ peuvent influencer la phase de la fonction d'onde décrivant un système de particules chargées, même en des systèmes où les champs électromagnétiques $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ et le champ matériel $\psi$ satisfont de façon suffisamment stricte aux conditions $\boldsymbol{E}\,\psi \equiv 0$ ou $\boldsymbol{B}\,\psi \equiv 0$.

AHARONOV et BOHM ont suggéré les expériences d'interférences qui devaient permettre de confirmer leurs assertions. En ce qui concerne le *potentiel vecteur* d'abord, ces auteurs ont notamment montré que si la figure d'interférence $I$ était fonction de ce potentiel $\boldsymbol{A}$, c'était par l'intermédiaire de la quantité $\phi_{\mathfrak{L}} = \oint_{\mathfrak{L}} \boldsymbol{dx}\,\boldsymbol{A}$ prise le long du contour $\mathfrak{L}$ formé des 2 chemins $MNI$ et $MRI$ suivis par les paquets d'ondes matérielles qui interfèrent en $I$ et le long desquels la condition $\boldsymbol{B}\,\psi \equiv 0$ doit être satisfaite (voir figure 3). En outre, la figure d'interférence $I$ varie de façon périodique avec la quantité $\phi_{\mathfrak{L}}$, la période étant égale à $\varphi = c\,h/e$ où $e$ est la charge des particules. Or, si l'on répète cette expérience en plaçant le solénoïde qui crée le champ $\boldsymbol{B}$ à l'intérieur d'un cylindre supraconducteur – lui-même embrassé par le contour fermé $\mathfrak{L}$ et d'épaisseur

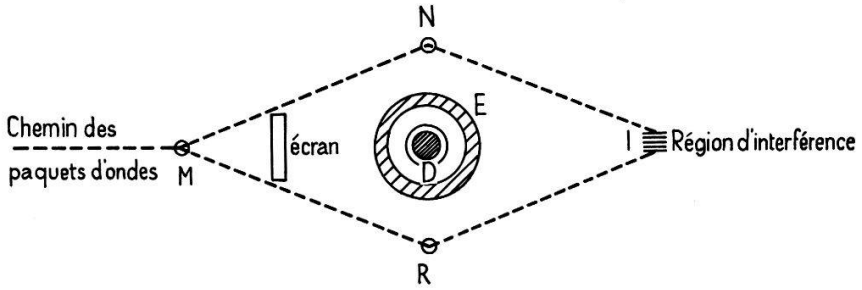


Fig. 3

Schéma d'une expérience où la quantification du fluxoïde d'un supraconducteur empêche l'observation de l'action du potentiel-vecteur sur la figure d'interférence $I$ de deux paquets cohérents d'ondes matérielles chargées. $M$, $N$ et $R$ sont les appareils destinés à règler les chemins des paquets. $D$: solénoïde. $E$: cylindre supraconducteur entourant le solénoïde. Quelle que soit la valeur quantifiée du flux à l'intérieur de $D$, la figure d'interférence est la même.

largement supérieure à la profondeur de pénétration, – on s'aperçoit premièrement que $\phi_{\mathfrak{L}}$ se réduit alors au fluxoide attaché à la cavité intérieure au cylindre supraconducteur et secondement que *la condition de quantification du fluxoïde, donnée ici par*

$$\phi_{\mathfrak{L}} = n\,\frac{c\,h}{e^*} \tag{37}$$

*est précisément, au facteur $e/e^*$ près, la condition pour que la figure d'interférence $I$ reste invariable* *).

Il est possible d'imaginer une expérience de principe tout à fait analogue pour *le potentiel scalaire $U$*. En effet, AHARANOV et BOHM ont proposé un montage où la figure d'interférence $J$ des deux paquets d'ondes matérielles – ayant suivi des chemins différents, mais le long desquels la condition $\boldsymbol{E}\,\psi \equiv 0$ est satisfaite – est fonction de la quantité $Z_\tau = \int_{t^0}^{t^0+\tau} dt\,\Delta U$, où $\tau$ est la durée pendant laquelle il existe la différence de potentiel $\Delta U$ entre les deux cages conductrices $G_1$ et $G_2$ à travers lesquelles passent les trajets suivis par les paquets d'ondes matérielles (voir figure 4). Là aussi, la figure d'interférence $J$ varie de façon périodique avec la quantité $Z_\tau$, la période étant égale à $Z = h/e$. On peut alors compléter le dispositif d'AHARONOV-BOHM en mettant le conducteur $G_1$ en contact avec le supraconducteur 1 et le conducteur $G_2$ en contact avec le supraconducteur 2, cela de telle façon que la différence de potentiel $\Delta U$ soit constante de $t^0$ à $t^0 + \tau$ et que la durée $\tau$ des contacts coïncide avec la période $T$ d'oscillation des supracourants de JOSEPHSON entre les supraconducteurs.

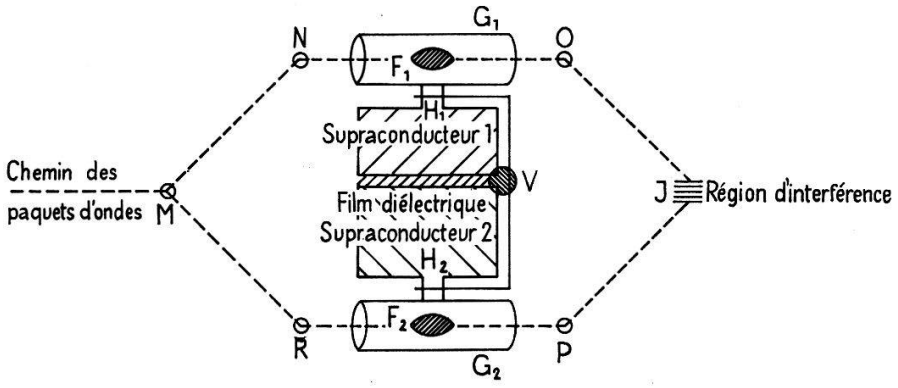


Fig. 4

Schéma d'une expérience où l'effet tunnel de JOSEPHSON entre deux supraconducteurs empêche l'observation de l'action du potentiel scalaire sur la figure d'interférence $J$ de deux paquets cohérents d'ondes matérielles chargées. $M$, $N$, $O$, $R$ et $P$ sont les appareils destinés à régler les chemins des paquets d'ondes. $G_1$, $G_2$: cages conductrices. $F_1$, $F_2$: paquets d'onde localisés. $H_1$, $H_2$: contacts métalliques entre $G_1$ et le supraconducteur 1 et $G_2$ et le supraconducteur 2. $V$: mécanisme réglant la durée des contacts $H_1$ et $H_2$ sur la période des supracourants de Josephson. Quelle que soit la différence de potentiel périodique entre les supraconducteurs, la figure d'interférence est la même.

*La condition de quantification de l'action périodique*, qui s'écrit

$$Z_T = T\,\Delta U = n\,\frac{h}{e^*} \tag{38}$$

*) Il faut remarquer que la charge $e$ des particules décrites par les paquets d'ondes interférant en $I$ (ou en $J$) n'est pas, selon les idées actuellement reçues, identique à la charge $e^*$ des porteurs de charges des supercourants, qui vaudrait $2\,e$. Fait remarquable, cette différence n'est peut-être pas ici sans influence, le quantum $c\,h/e^*$ (ou $h/e^*$) étant exactement la *moitié* de la période $\varphi = c\,h/e$ (ou $z = h/e$).

est, au facteur $e/e^*$ près ici aussi, *précisément celle qui rend la figure d'interférence $J$ indépendante d'une variation de la différence de potentiel $\Delta U$*)*.

La quantification du fluxoïde d'une part et de l'action périodique d'autre part, sont en définitive des propriétés caractéristiques des supraconducteurs qui, de façon tout à fait parallèle, peuvent rendre illusoire ce que l'on appelle l'observabilité du potentiel vecteur d'un côté, du potentiel scalaire de l'autre, à condition de faire intervenir de manière judicieuse les supraconducteurs dans l'expérience.

## 8. Conclusion

Bien que le modèle relativiste quantique du supraconducteur proposé ici soit hautement idéalisé et qu'il soit insuffisant à bien des égards, notamment pour décrire les phénomènes mettant en jeu des énergies de surface, il paraît instructif à plus d'un titre. En premier lieu, il permet de prévoir de façon élémentaire, en les reliant entre elles, la quantification du fluxoïde et celle de l'action périodique, et notamment la valeur quantifiée de période des supracourants de JOSEPHSON. En second lieu, il met en évidence le lien existant entre ces phénomènes caractéristiques du supraconducteur et ce que l'on appelle l'observabilité des potentiels électromagnétiques. Enfin, et en accord avec la théorie de GINZBURG et LANDAU, le modèle proposé semble mettre clairement en évidence le rôle prépondérant joué par *la phase* de la fonction d'onde dans l'étude des propriétés électromagnétiques des supraconducteurs, particularité vraisemblablement liée au fait que le module de cette fonction varie très peu à *l'intérieur* de tels systèmes.

## Bibliographie


1) W. PAULI, Helv. Phys. Acta *12*, 147 (1939).
2) W. EHRENBERGER et R. E. SIDAY, Proc. Phys. Soc. [B] *62*, 8 (1949).
3) F. LONDON, *Superfluids* (John Wiley and Sons, Inc., New-York 1950), Vol. 1.
4) V. L. GINZBURG et L. D. LANDAU, J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR) *20*, 1064 (1950).
5) L. N. COOPER, Phys. Rev. *104*, 1189 (1956).
6) N. N. BOGOLIUBOV, J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR) *34*, 58 (1958).
7) Y. AHARONOV et D. BOHM, Phys. Rev. *115*, 485 (1959).
8) R. G. CHAMBERS, Phys. Rev. Lett. *5*, 3 (1960).
9) B. S. DEAVER et W. M. FAIRBANKS, Phys. Rev. Letters *7*, 43 (1961).
10) R. DOLL et M. NÄBAUER, Phys. Rev. Letters *7*, 51 (1961).
11) N. BYERS et C. N. YANG, Phys. Rev. Letters *7*, 46 (1961).
12) L. ONSAGER, Phys. Rev. Letters *7*, 50 (1961).
13) J. BARDEEN, Phys. Rev. Letters *7*, 162 (1961).
14) J. B. KELLER et B. ZUMINO, Phys. Rev. Letters *7*, 164 (1961).
15) H. BOERSCH, H. HAMISCH, K. GROHMANN et D. WOHLLEBEN, Z. Phys. *165*, 79 (1961).
16) B. D. JOSEPHSON, Phys. Letters *1*, 251 (1962).
17) W. A. LITTLE et R. D. PARKS, Phys. Rev. Letters *9*, 9 (1962).
18) H. BOERSCH, H. HAMISCH et K. GROHMANN, Z. Phys. *169*, 263 (1962).
19) S. SHAPIRO, Phys. Rev. Letters *11*, 80 (1963).
20) R. A. FERREL et R. E. PRANGE, Phys. Rev. Letters *10*, 479 (1963).
21) B. D. JOSEPHSON, Rev. Mod. Phys. *36*, 216 (1964).


*) Voir note page 135.