

# Nouvelles formes des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré. I

Autor(en): **Guillot, J.C. / Petit, J.L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **39 (1966)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113686>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Nouvelles formes des représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré

### I

par **J. C. Guillot**<sup>1)</sup> et **J. L. Petit**<sup>1)</sup>

Institut de Physique Théorique, Université de Genève, Suisse

(29 I 66)

*Abstract.* In this paper we study different forms of representations of the Poincaré group and establish their interrelations. Starting with the induced representations by Mackey, we construct explicitly the isomorphisms to the forms preferred by physicist defined on the space of functions on a homogeneous space. As a particular case we find the representations of Wigner and specify the arbitrary parameters involved. We then give different possible forms of representations defined on either the Poincaré group or the Lorentz group. Finally, we specify the different conventions which are used for different physical situations.

### I. Introduction

WIGNER, dans son célèbre article [1]<sup>2)</sup>, a classé toutes les représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré ou groupe de Lorentz inhomogène. Elles sont repérées par deux nombres: la masse et le spin. La manière dont ces représentations sont réalisées est importante, par exemple dans les problèmes de cinématique relativiste, car on sait qu'une particule libre de masse  $m$  et de spin  $j$  se transforme suivant une représentation irréductible repérée par  $m$  et  $j$ . WIGNER considéra une réalisation particulière dans un espace d'Hilbert de fonctions définies sur l'hyperboloïde de masse  $p^2 = m^2$ , à valeur dans l'espace de spin. Une autre réalisation s'exprime à l'aide de fonctions d'ondes tensorielles ou spinorielles satisfaisant des équations d'onde (par exemple l'équation de Dirac et l'équation de Klein-Gordon). MACKEY [2] a ensuite généralisé à une grande classe de groupes la théorie de WIGNER en définissant la notion de représentations induites et nous nous proposons, à l'aide de cette théorie, d'étudier une nouvelle forme des représentations irréductibles du groupe de Poincaré réalisée dans un espace d'Hilbert de fonction définies sur le groupe. Plus précisément les fonctions sont définies soit sur le groupe de Poincaré soit sur le groupe de Lorentz.

Cette forme nouvelle présente un certain nombre d'avantages. D'abord elle fait jouer un rôle plus «dynamique» au spin, ce qui fournirait peut-être une introduction naturelle à la théorie des pôles de REGGE: cette idée a été développée par F. LURÇAT [3]. Ensuite elle permet d'effectuer des opérations mathématiques caractéristiques des fonctions définies sur un groupe. Ainsi WIGNER [12], pour traiter un problème de diffusion multiple, considère une équation définie non dans l'espace des états de la particule mais sur un groupe pour obtenir une équation comportant un produit de

---

<sup>1)</sup> Boursiers O.T.A.N.

<sup>2)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 299.

convolution. De plus TOLLER [13] définit les amplitudes de diffusion sur un groupe afin de pouvoir faire de l'analyse harmonique sur ce groupe et généraliser ainsi les développements en ondes partielles. Enfin signalons que MOUSSA et STORA [14] considèrent les représentations définies sur le groupe de Poincaré lorsqu'ils décomposent les produits tensoriels des représentations irréductibles de ce groupe.

Nous commençons par donner un résumé de la théorie des représentations induites basé sur plusieurs exposés auxquels nous renvoyons pour une étude mathématiquement plus détaillée, [2, 15–18]. Néanmoins notre exposé diffère des précédents par le fait que le groupe opère à gauche sur l'hyperboloïde ( $p^\mu \rightarrow A^\mu p^\nu$ ), convention choisie habituellement par les physiciens et surtout par la forme générale des isomorphismes entre les représentations équivalentes. Nous donnons la définition de MACKEY des représentations induites. Nous montrons ensuite explicitement l'isomorphisme qui lie la forme des représentations sur le groupe à celle des représentations sur l'hyperboloïde, ainsi que la liaison avec la forme canonique de WIGNER. Nous avons insisté sur les arbitraires dont dépend l'écriture des représentations unitaires irréductibles, arbitraires dont certains correspondent à une convention physique comme, par exemple, le choix d'une base pour l'ensemble des états d'une particule. Enfin, dans le cas du groupe de Poincaré nous avons explicité les différentes conventions possibles pour les masses positives et les masses nulles.

### Remerciements

Nous remercions le professeur JAUCH pour son accueil à l'Institut de Genève et pour son intérêt soutenu pour ce travail.

Nous remercions aussi le professeur LURÇAT pour de fructueuses discussions sur les fonctions sur le groupe et nos collègues de l'Institut, particulièrement le D<sup>r</sup> PIRON, ainsi que le D<sup>r</sup> P. HILLION et Mme. M. LITTAYE.

### II. Notations

Nous allons donner quelques formules utiles pour la suite. (Pour plus de détails, cf. [6]). Nous nous plaçons dans le système d'unités où  $\hbar = c = 1$ .

La métrique employée est

$$g^{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu; \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = +1$$

et nous posons

$$V^\mu = (\nu^0; \boldsymbol{\nu}); \quad V_\mu = (\nu_0; -\boldsymbol{\nu})$$

La représentation utilisée pour les matrices de PAULI est:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi au quadri-vecteur  $p^\mu$  nous associons la matrice hermitienne  $\underset{\sim}{p}$  définie par

$$\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{p}_\mu \tau^\mu = \begin{pmatrix} p^0 - p^3; & - (p^1 - i p^2) \\ - (p^1 + i p^2); & p^0 + p^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{I-1})$$

Donnons maintenant quelques propriétés des rotations et des transformations de Lorentz pures.

*Rotations:* Nous noterons  $R(\mathbf{n}; \theta)$  une rotation d'axe  $\mathbf{n}$  et d'angle  $\theta$  quand elle agit dans l'espace de MINKOWSKI et  $A(\mathbf{n}; \theta)$  une matrice  $2 \times 2$  qui lui correspond dans l'homomorphisme entre le groupe de Lorentz et  $SL(2; \mathbf{C})$ .

$$A(\mathbf{n}; \theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} n^3; & -i \sin \frac{\theta}{2} (n^1 - i n^2) \\ -i \sin \frac{\theta}{2} (n^1 + i n^2); & \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} n^3 \end{pmatrix}$$

$$= \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})$$

$$\mathbf{x}' = \cos \theta \mathbf{x} + (1 - \cos \theta) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n} + \sin \theta (\mathbf{n} \wedge \mathbf{x})$$

$$x'^0 = x^0$$

La formule donnant le conjugué d'une rotation est:

$$R(\mathbf{n}; \theta) R(\mathbf{n}_1; \theta_1) R^{-1}(\mathbf{n}; \theta) = R(R(\mathbf{n}; \theta) \mathbf{n}_1; \theta_1)$$

*Lorentz pure:* Nous noterons  $L(\chi; \mathbf{m})$  la transformation de Lorentz pure d'axe  $\mathbf{m}$  et de vitesse  $v = \text{th } \chi$  dans l'espace de Minkowski et  $A(\chi; \mathbf{m})$  une matrice  $2 \times 2$  qui lui correspond dans  $SL(2; \mathbf{C})$ .

$$A(\chi; \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} \text{ch } \frac{\chi}{2} - \text{sh } \frac{\chi}{2} m^3; & -\text{sh } \frac{\chi}{2} (m^1 - i m^2) \\ -\text{sh } \frac{\chi}{2} (m^1 + i m^2); & \text{ch } \frac{\chi}{2} + \text{sh } \frac{\chi}{2} m^3 \end{pmatrix} = \text{ch } \frac{\chi}{2} - \text{sh } \frac{\chi}{2} (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau})$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - (1 - \text{ch } \chi) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} + x^0 \text{sh } \chi \mathbf{m}$$

$$x'^0 = \text{ch } \chi x^0 + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}) \text{sh } \chi.$$

Nous utiliserons aussi les formules suivantes:

$$A(\mathbf{n}; \theta) A(\chi; \mathbf{m}) = A(\chi; R(\mathbf{n}; \theta) \mathbf{m}) A(\mathbf{n}; \theta)$$

$$A(\chi; \mathbf{m}) A(\mathbf{n}; \theta) = A(\mathbf{n}; \theta) A(\chi; R^{-1}(\mathbf{n}; \theta) \mathbf{m}) \quad (\text{I-2})$$

Donnons maintenant quelques définitions pour les opérateurs de l'algèbre de Lie. Si  $L$  est une rotation infinitésimale de paramètres  $(\mathbf{n}; \theta)$ , on posera:

$$U(L) = 1 - i \theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$$

si  $L'$  est une Lorentz pure infinitésimale de paramètres  $(\chi; \mathbf{m})$ :

$$U(L') = 1 - i \chi \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}$$

Si  $a$  est une translation infinitésimale de paramètres  $a^\alpha$ :

$$U(a) = 1 + i P^\alpha a_\alpha$$

Définissons maintenant l'opérateur «de spin» introduit par Pauli

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} P_\nu M_{\rho\lambda}$$

où nous avons posé

$$N^k = M^{k0} \quad J^i = M^{kl}$$

ce qui nous donne en explicitant

$$W^0 = P \cdot J \quad W = P^0 J - P \wedge N$$

Les opérateurs  $S^k$  sont les générateurs des transformations infinitésimales de la représentation  $D^{(j)}$  du groupe des rotations.

Si  $R^k$  est une rotation infinitésimale d'angle  $\theta$  autour du  $k^{\text{ième}}$  axe, nous avons:

$$D^{(j)}(R^k) = 1 - i \theta S^k.$$

Donnons pour finir une relation utile liant les matrices  $D^{(j)}$  et les opérateurs  $S^k$ .

$$\sum_{-j \leq b, c \leq +j} D_{ab}^{(j)}(R) S_{bc}^k D_{cd}^{(j)}(R^{-1}) = \sum_{l=1}^3 (R^{-1})^{kl} S_{ad}^l. \quad (\text{I-2bis})$$

### III. Résumé de la théorie de Wigner-Mackey

#### A. Notion de représentations induites

*Quelques rappels concernant les groupes localement compacts*

##### a) Mesure de Haar invariante à gauche sur $G$

Les groupes que nous considérons par la suite seront tous des groupes de Lie, donc à fortiori des groupes localement compacts; ils sont caractérisés par l'existence d'une mesure positive, non nulle et invariante à gauche, définie sur les boréliens de  $G$ . En fait, cette mesure n'est pas caractérisée uniquement, et deux mesures invariantes à gauche sont proportionnelles. Il existe aussi des mesures invariantes à droite. On fera le choix d'une mesure invariante à gauche (qu'on appellera alors mesure de Haar invariante à gauche, soit  $dg$ ).

On a donc:

$$\int_G f(g_0 g) dg = \int_G f(g) dg \quad \forall g_0 \in G.$$

Mais  $dg$  n'est pas en général invariante à droite et on a par définition de  $\Delta_G(g)$

$$\int_G f(g g_0^{-1}) dg = \Delta_G(g_0) \int_G f(g) dg.$$

Cette égalité peut s'écrire plus symboliquement

$$d(g g_0) = \Delta_G(g_0) dg$$

$\Delta_G(g_0)$  est la fonction modulaire de  $G$  qui vérifie:

$$\Delta_G(g_1) \Delta_G(g_2) = \Delta_G(g_1 g_2) \quad \# (\Delta_G(g_0) \in R^+)$$

Si  $g \rightarrow f(g)$  est sommable,  $g \rightarrow f(g^{-1})$  l'est aussi et on a :

$$\int_{\tilde{G}} f(g^{-1}) dg = \int_{\tilde{G}} f(g) \Delta_G(g^{-1}) dg$$

qu'on peut aussi écrire :

$$d(g^{-1}) = \Delta_G(g)^{-1} dg.$$

Si  $\Delta \equiv 1$ , c'est-à-dire si  $dg$  est invariante à droite et à gauche, le groupe est dit unimodulaire. Comme exemples il y a les groupes discrets, abéliens, compacts, les groupes de Lie semi-simples. En particulier le groupe de Lorentz et le groupe des rotations sont des groupes unimodulaires.

### b) Notion d'espace homogène

Soit  $G$  un groupe topologique,  $\Gamma$  un sous-groupe fermé contenu dans  $G$ ; l'espace homogène  $X = G/\Gamma$ , ensemble des classes à droite modulo  $\Gamma$ , est muni de la topologie quotient (i.e.  $U \subset X$  est ouvert si et seulement si  $\pi^{-1}(U)$  est ouvert dans  $G$ ).  $\pi$  est l'application canonique qui à  $g$  associe sa classe d'équivalence  $g\Gamma$  qu'on notera aussi  $x$ .

Le système  $(G, \Gamma, X)$  est muni des propriétés suivantes :

A)  $X$  est un espace topologique sur lequel « $G$  opère à gauche», c'est-à-dire qu'à  $g \in G$ , on fait correspondre un automorphisme de  $X$  sur lui-même noté  $g x$  où  $g(x)$  tel que

$$g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)(x)$$

et  $(x, g) \rightarrow g x$  soit continue.

B)  $G$  opère transitivement sur  $X$ , c'est-à-dire, quels que soient  $x_1$  et  $x_2 \in X$  il existe au moins un élément  $g \in G$ , tel que

$$x_2 = g x_1$$

C) Il existe au moins un  $x_0 \in X$  dont le stabilisateur (c'est-à-dire le sous-groupe de  $G$  tel que  $g x_0 = x_0$ ) soit  $\Gamma$ .

Il suffit de faire opérer  $G$  par translation à gauche :  $g_0 \Gamma \xrightarrow{g} (g g_0) \Gamma$  et de prendre pour  $x_0$  la classe de l'identité pour vérifier trivialement A, B, C.

La réciproque est très importante : Si  $G, \Gamma$  et  $X$  vérifient A, B, C, il est clair qu'on peut définir un isomorphisme canonique  $\Phi$  de  $G/\Gamma$  sur  $X$  tel que

$$\Phi(\pi(g)) = g x_0$$

Ceci signifie que  $g \in x$  est équivalent à  $g_0 x_0 = x$ .  $\Phi$  est continu, lorsque  $G/\Gamma$  est muni de la topologie quotient.

En particulier si  $G$  et  $X$  sont localement compacts et si  $G$  est séparable,  $\Phi$  est alors un homéomorphisme de  $G/\Gamma$  sur  $X$ . On sera toujours dans ce cas par la suite.

*Remarques :* I. Si  $G, \Gamma, X$  vérifient les 3 conditions A, B, C;  $G, g\Gamma g^{-1}, X$  les vérifient aussi et  $X$  est alors isomorphe à  $G/g\Gamma g^{-1}$ . Nous voyons donc que pour déterminer cet isomorphisme, nous avons le libre choix du point  $x_0$  et de son stabilisateur, car par suite de la condition B, les stabilisateurs de deux points distincts sont deux sous-groupes conjugués, donc isomorphes.

II.  $G$  n'opère pas toujours transitivement, dans ce cas on considère la partition de  $X$  en classes d'intransitivité ou orbites. Une orbite est l'ensemble des éléments de la forme  $g x$  pour  $g$  parcourant  $G$ ,  $x$  étant un élément fixe de  $X$ .

c) *Mesure quasi-invariante sur un espace homogène*

Si  $X$  est un espace homogène, on définit le translaté à gauche d'un sous-ensemble  $A$  par  $g \in G$ , comme l'ensemble des éléments  $g x$  où  $x \in A$  et on le note  $g A$ . On supposera désormais  $X$  et  $G$  localement compacts et séparables.

Soit  $d\mu(x)$  une mesure positive sur  $X$ , la mesure  $d\mu(g x)$  sera définie par:  $\int_X f(x) d\mu(g x) = \int_X f(g^{-1} x) d\mu(x)$  pour toute fonction continue à support compact.

En général, il n'existe pas de mesures invariantes sur  $X$ , aussi est-on contraint d'introduire la notion de mesure quasi-invariante par  $G$  définie sur  $X$ : une mesure positive  $d\mu(x)$  sur  $X$  est dite quasi-invariante si elle est non nulle et si  $d\mu(g x)$  est équivalente à  $d\mu(x)$  pour tout  $g \in G$ .  $d\mu(g x)$  et  $d\mu(x)$  ont les mêmes ensembles de mesure nulle, ou ce qui revient au même, il existe une fonction  $f(x) \geq 0$ , localement sommable par rapport à  $d\mu(x)$ , différente de zéro  $d\mu(x)$ -presque partout et telle que

$$d\mu(g x) = f(x) d\mu(x).$$

Le théorème suivant nous permet de déterminer les mesures quasi-invariantes:

*Théorème:*  $G$  étant un groupe localement compact séparable,  $\Gamma$  un sous-groupe fermé de  $G$  et  $X = G/\Gamma$ , il existe sur  $X$  des mesures quasi-invariantes. Deux mesures quasi-invariantes sont équivalentes et on les obtient toutes de la manière suivante: soit  $\varrho(g)$  une fonction définie sur  $G$ , borélienne, strictement positive, localement sommable et vérifiant pour tout  $\gamma \in \Gamma$

$$\varrho(g \gamma) = \frac{\Delta_\Gamma(\gamma)}{\Delta_G(\gamma)} \varrho(g)$$

où  $\Delta_G$  et  $\Delta_\Gamma$  sont les fonctions modulaires des groupes  $G$  et  $\Gamma$ . A  $\varrho(g)$  est associée une mesure quasi-invariante et une seule  $d\mu(x)$  sur  $X$  définie par:

$$\int_G f(g) \varrho(g) dg = \int_X d\mu(x) \int_\Gamma f(g \gamma) d\gamma$$

et vérifiant:

$$d\mu(g' x) = \frac{\varrho(g' g)}{\varrho(g)} d\mu(x)$$

où  $g$  appartient à la classe  $x$ .

*Remarque:* Tout élément  $g$  peut s'écrire  $g = A \cdot \gamma$  avec  $\gamma \in \Gamma$  et la solution générale de l'équation fonctionnelle définissant  $\varrho$  est:

$$\varrho(g) = \frac{\Delta_\Gamma(\gamma)}{\Delta_G(\gamma)} \varrho(A).$$

Il peut néanmoins exister des mesures invariantes sur certains espaces homogènes et le corollaire suivant précise les conditions de l'existence de telle mesures.

*Corollaire:* Pour qu'il existe sur  $X$  une mesure invariante, il faut et il suffit que  $\Delta_{\Gamma}(\gamma) = \Delta_G(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Cette mesure est unique à une constante près. Dans ce cas, on peut prendre  $\varrho \equiv 1$ .

*Remarque:* Dans le cas des groupes de Poincaré et de Galilée, nous aurons toujours une mesure invariante sur  $G/\Gamma$  car  $G$  et  $\Gamma$  seront des groupes unimodulaires; ainsi la fonction  $\varrho(g)$  n'apparaîtra jamais. Par contre, cette fonction peut apparaître dans des cas très importants, comme celui, par exemple, de la série fondamentale du groupe de Lorentz.

### B. Représentation unitaire induite

Soient  $G$  un groupe localement compact séparable,  $\Gamma$  un sous-groupe fermé et  $\gamma \rightarrow L(\gamma)$  une représentation unitaire de  $\Gamma$  dans un espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}$  séparable.

Considérons l'ensemble des fonctions  $f(g)$  définies sur  $G$ , à valeurs dans  $\mathfrak{H}$  vérifiant les conditions suivantes:

- 1) Pour tout  $v \in \mathfrak{H}$ , la fonction  $g \rightarrow \langle f(g), v \rangle$  est mesurable pour  $d\mu$ ;
- 2)  $f(g\gamma) = L^{-1}(\gamma) f(g)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $g \in G$ ; (I-3)
- 3)  $\int_{G/\Gamma} \|f(g)\|^2 d\mu(x) < +\infty$  où  $d\mu(x)$  est une mesure quasi-invariante; on démontre

très aisément à l'aide de la condition (I-3)2) que  $\|f(g)\|^2$  est une fonction de classe. On montre que l'ensemble de ces fonctions muni d'une structure d'espace vectoriel évidente est un espace d'Hilbert (donc complet) pour le produit scalaire suivant:

$$\langle\langle f_1, f_2 \rangle\rangle = \int_{G/\Gamma} \langle f_1(g), f_2(g) \rangle d\mu(x).$$

*Remarque:* En fait, les éléments de l'espace d'Hilbert sont les classes d'équivalence de fonctions presque partout égales: on note cet espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}_G^L$ .

On définit une représentation unitaire de  $G$  dans  $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_G^L)$  de la manière suivante: à  $g_0 \in G$ , on fait correspondre  ${}_G U^L(g_0)$  transformation qui à tout élément  $f \in \mathfrak{H}_G^L$  fait correspondre:  $\{ {}_G U^L(g_0) f \} (g) = \varrho(g)^{-1/2} \varrho(g_0^{-1}g)^{1/2} f(g_0^{-1}g)$  où  $\varrho(g)$  est la fonction associée à la mesure  $d\mu$ . On vérifie immédiatement que  ${}_G U^L(g_0) f \in \mathfrak{H}_G^L$  et que la transformation ainsi définie est bien unitaire. Cette représentation qu'on note  ${}_G U^L$  est appelée la représentation induite à  $G$  par  $L$ .

Cette forme des représentations induites n'est pas habituelle aux physiciens. Nous allons étudier maintenant en détail l'isomorphisme qui permet de revenir à la représentation définie «sur les fonctions d'onde» c'est-à-dire sur les fonctions définies sur un espace homogène qui est, dans le cas du groupe de Poincaré, l'hyperboloïde de masse  $p^2 = m^2$ .

Pour cela, considérons l'espace  $L^2_\mu(G/\Gamma; \mathfrak{H})$  c'est-à-dire l'ensemble des fonctions définies sur  $G/\Gamma$ , à valeurs dans  $\mathfrak{H}$  et vérifiant:

$$\int_{G/\Gamma} \|F(x)\|^2 d\mu(x) < +\infty.$$

L'isomorphisme de  $\mathfrak{H}_G^L$  sur  $L^2_\mu(G/\Gamma; \mathfrak{H})$  se construit de la manière suivante: soit  $g \rightarrow B(g)$  une fonction définie sur  $G$  à valeurs dans les opérateurs unitaires de  $\mathfrak{H}$ , vérifiant la relation  $B(g\gamma) = L^{-1}(\gamma) B(g)$  (I-4) pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $g \in G$ .

Si  $F \in L^2_\mu(G/\Gamma; \mathfrak{H})$  la fonction  $f(g)$  définie par  $f(g) = B(g) F(x)$  appartient à  $\mathfrak{H}_G^L$  comme on peut le vérifier,  $B(g)$  étant unitaire ( $g$  appartient à la classe  $x$ ).



De plus, cette correspondance est une isométrie, car

$$\int_{G/\Gamma} || \mathbf{F}(x) ||^2 d\mu(x) = \int_{G/\tilde{L}} || \mathbf{f}(g) ||^2 d\mu(x).$$

Réciproquement, si  $\mathbf{f} \in \mathfrak{S}_G^L$ , la fonction  $\mathbf{F}$  définie par

$$\mathbf{F}(x) = B(g)^{-1} \mathbf{f}(g)$$

est bien une fonction de classe et elle appartient à  $L^2_\mu(G/\Gamma; \mathfrak{S})$ . Ainsi, on a défini un isomorphisme entre  $\mathfrak{S}_G^L$  et  $L^2_\mu(G/\Gamma; \mathfrak{S})$ , le transformé de  ${}_G U^L(g_0)$  par cet isomorphisme est l'opérateur obtenu par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(x) & \xrightarrow{B(g)} & B(g) \mathbf{F}(x) \\ \downarrow & & \downarrow {}_G U^L(g_0) \\ \varrho(g)^{-1/2} \varrho(g_0^{-1} g)^{1/2} B(g)^{-1} B(g_0^{-1} g) \mathbf{F}(g_0^{-1} x) & \xleftarrow{B(g)^{-1}} & \varrho(g)^{-1/2} \varrho(g_0^{-1} g)^{1/2} B(g_0^{-1} g) \mathbf{F}(g_0^{-1} x) \end{array}$$

La représentation induite s'écrit donc dans l'espace  $L^2_\mu(G/\Gamma; \mathfrak{S})$

$$({}_G U^L(g_0) \mathbf{F})(x) = \varrho(g)^{-1/2} \varrho(g_0^{-1} g)^{1/2} B(g)^{-1} B(g_0^{-1} g) \mathbf{F}(g_0^{-1} x). \tag{I-5}$$

Cette formule devient dans le cas d'une mesure invariante ( $\varrho \equiv 1$ ):

$$({}_G U^L(g_0) \mathbf{F})(x) = B(g)^{-1} B(g_0^{-1} g) \mathbf{F}(g_0^{-1} x). \tag{I-6}$$

C'est sous cette forme que se présentent ordinairement les représentations unitaires du groupe de Poincaré. C'est aussi cette forme qui apparaît dans les applications du théorème fondamental concernant les systèmes d'imprimitivité. Nous nous limiterons désormais au cas où sur  $X$  peut être définie une mesure invariante, c'est-à-dire que la fonction  $\varrho(g)$  sera désormais constante et normalisée à l'unité. Evidemment les formules que nous écrivons ne seront que des cas particuliers d'un cas général qu'on pourra aisément déterminer en se référant aux textes cités dans l'introduction.

### Choix de la fonction $B(g)$

On peut très facilement préciser la forme de la fonction  $B(g)$  vérifiant la condition :

$$B(g \gamma) = L^{-1}(\gamma) B(g); \quad \gamma \in \Gamma$$

En effet, il suffit de remarquer que, par suite de cette condition, la valeur de la fonction  $B(g)$  pour  $g \in x$  est déterminée pour tous les éléments d'une classe d'équivalence lorsqu'on connaît sa valeur pour un élément de la classe.

Plus précisément soit  $x_0 \in G/\Gamma$  le point stabilisé (i.e. la classe de l'identité). Notons  $A_x$  un élément du groupe qui à  $x_0$  fait correspondre  $x$ . En général, il y en a une infinité, car tout élément de la classe possède cette propriété. Supposons donc que pour tout  $x$  nous ayons fait un choix  $A_x$ . Alors tout élément  $g \in x$  s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$g = A_x (A_x^{-1} g).$$

Or  $A_x^{-1} g$  est un élément du stabilisateur, donc

$$B(g) = L^{-1} (A_x^{-1} g) B(A_x) = L(g^{-1} A_x) B(A_x).$$

La forme générale de la représentation induite est donc

$$F(x) \rightarrow B^{-1}(A_x) L(A_x^{-1} g_0 A_{g_0^{-1}x}) B(A_{g_0^{-1}x}) F(g_0^{-1} x) \quad (\text{I-7})$$

On vérifie immédiatement que  $A_x^{-1} g_0 A_{g_0^{-1}x}$  est un élément du stabilisateur de  $x_0$ .

Aussi l'écriture de cette forme de représentation induite dépend de deux arbitraires:

1) Le choix d'un élément  $A_x$ , qui est un représentant de chaque classe d'équivalence.

2) Le choix de la fonction  $B(g)$  ou ce qui revient au même, de la valeur de  $B(g)$  pour le représentant choisi dans chaque classe d'équivalence. Dans tous les cas physiques, le choix de  $A_x$  est équivalent au choix d'un axe de quantification pour le spin et ce choix fait, on considère une fonction  $B(g)$  telle que

$$B(A_x) = 1 \text{ pour tout } x$$

La représentation prend alors la forme plus simple

$$F(x) \rightarrow L(A_x^{-1} g_0 A_{g_0^{-1}x}) F(g_0^{-1} x). \quad (\text{I-8})$$

C'est la forme de WIGNER ou forme standard associée au choix de  $A_x$ , qui n'est qu'une particularisation de la forme générale.

Deux choix différents de fonctions  $B(g)$  se traduisent par des représentations unitairement équivalentes puisqu'une fois  $A_x$  fixé, toutes les représentations sont équivalentes à la forme standard.

A cause de la condition (I-4), la représentation (I-6) est indépendante du représentant choisi, soit de  $A_x$ , pourvu que l'on conserve la même fonction  $B(g)$ . Mais si l'on veut conserver la forme standard, il est évident que l'on modifie la fonction  $B(g)$ , lorsqu'on passe de  ${}^1A_x$  à  ${}^2A_x$  et le passage d'une forme à l'autre se traduit par l'isomorphisme suivant:

$$F(x) \rightarrow L^{-1}({}^1A_x^{-1} {}^2A_x) F(x). \quad (\text{I-9})$$

et la représentation passe de la forme

$$\{ {}_G U^L(g_0) F \} (x) = L({}^1A_x^{-1} g_0 {}^1A_{g_0^{-1}x}) F(g_0^{-1} x)$$

à la forme

$$\{ {}_G U^L(g_0) F \} (x) = L({}^2A_x^{-1} g_0 {}^2A_{g_0^{-1}x}) F(g_0^{-1} x).$$

### C. Système d'imprimitivité

Il est nécessaire d'avoir un critère qui permette de savoir si une représentation unitaire est induite ou si elle est équivalente à une représentation induite. La notion de système d'imprimitivité et le théorème fondamental de Machey répondent à un tel besoin. Mais auparavant, il nous faut rappeler la notion de *mesure spectrale*:

Soit  $X$  un espace topologique localement compact. Une mesure spectrale sur  $X$  associe à tout ensemble borélien  $E \subset X$  un sous-espace hilbertien d'un espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}$  noté  $P(E)$  ou encore le projecteur orthogonal sur le sous-espace (on confondra les deux notions) avec les propriétés suivantes:

- 1)  $P(X) = I$ .
- 2) Si  $E_1, \dots, E_n, \dots$  sont disjoints deux à deux,  $P(E_1), \dots, P(E_n), \dots$  sont orthogonaux et on a

$$P\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n P(E_n).$$

Si  $E_1, E_2$  sont deux boréliens quelconques, on a donc

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2) \text{ et } P(\emptyset) = 0$$

où  $\emptyset$  est l'ensemble vide.

Ceci est le point de vue ensembliste. Le point de vue fonctionnel est le suivant: Soient  $x$  et  $y$  des éléments de  $\mathfrak{H}$ , on définit une mesure bornée  $\mu_{x,y}$  sur  $X$  en posant

$$\mu_{x,y}(E) = \langle P(E) x, y \rangle$$

pour tout borélien  $E \subset X$ ; une telle mesure se prolonge aux fonctions boréliennes complexes bornées sur  $X$ , ensemble qu'on notera  $B(X)$ ; on a évidemment

$$|\mu_{x,y}(E)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Pour toute fonction  $f \in B(X)$ ,  $\mu_{x,y}(f) = \int_X f(z) d\mu_{x,y}(z)$  définit une forme sesquilineaire en  $x$  et  $y$  et bornée:

$$|\mu_{x,y}(f)| \leq \|f\|_\infty \|x\| \|y\|.$$

Il existe donc un opérateur linéaire continu  $P(f)$  défini sur tout  $\mathfrak{H}$  tel que

$$\langle P(f) x, y \rangle = \mu_{x,y}(f)$$

L'application  $f \rightarrow P(f)$  est linéaire et diminue les normes; elle est multiplicative, c'est-à-dire que

$$P(fg) = P(f) P(g)$$

et

$$P(\bar{f}) = P^\dagger(f)$$

### *Notion de système d'imprimitivité*

Soient  $G$  un groupe,  $U$  une représentation unitaire de  $G$  dans un espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}$ . Un système d'imprimitivité de  $U$  est constitué par le couple  $(X, P)$  formé par un espace localement compact  $X$  sur lequel  $G$  opère et d'une mesure spectrale  $P$  définie sur  $X$ , à valeurs dans  $L(\mathfrak{H})$  telle que:

$$U(g) P(E) U(g)^{-1} = P(g E) \tag{I-10}$$

pour tout  $g \in G$  et tout borélien  $E$ .  $X$  est la base du système d'imprimitivité.

### *Equivalence*

Si  $U'$  est une autre représentation unitaire de  $G$  dans un espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}'$  et si  $(X, P')$  est un système d'imprimitivité de  $U'$ , la paire  $(U, P)$  est dite équivalente à la paire  $(U', P')$  s'il existe un isomorphisme  $\Phi$  de  $\mathfrak{H}$  sur  $\mathfrak{H}'$  transformant  $U$  en  $U'$  et  $P$  en  $P'$ , soit :

$$U'(g) = \Phi U(g) \Phi^{-1} \quad P'(E) = \Phi P(E) \Phi^{-1}.$$

#### *Système d'imprimitivité canonique associé à une représentation induite*

Soient  $G$  un groupe localement compact séparable,  $\Gamma$  un sous-groupe fermé de  $G$ ,  $L$  une représentation unitaire de  $\Gamma$  dans  $\mathfrak{H}$  et  ${}_G U^L$  la représentation induite à  $G$ ,  $\mathfrak{H}_G^L$  étant l'espace d'Hilbert de cette représentation. On associe à  ${}_G U^L$  un système d'imprimitivité basé sur  $X = G/\Gamma$  en faisant correspondre à tout borélien de  $G/\Gamma$  le projecteur  $P(E)$  défini par  $f(g) \in \mathfrak{H}_G^L \xrightarrow{P(E)} P(E) f(g) = \psi_E(x) f(g)$  où  $\psi_E(x)$  est la fonction caractéristique de  $E$ . On vérifie immédiatement l'égalité (I-10) pour  $U = {}_G U^L$  et  $P(E) = \psi_E(x)$ . C'est le système d'imprimitivité canonique associé à  ${}_G U^L$ . Or G. MACKEY a montré que réciproquement, toute représentation unitaire de  $G$  possédant un système d'imprimitivité basé sur  $X = G/\Gamma$  sur lequel  $G$  opère transitivement est équivalente à une représentation de la forme  ${}_G U^L$  où  $L$  est une représentation unitaire de  $\Gamma$ .

Plus précisément on a le théorème fondamental suivant :

*Théorème:* Soit  $G$  un groupe localement compact séparable et  $\Gamma$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Soit  $U$  une représentation unitaire de  $G$  et  $P'$  une mesure spectrale basée sur  $X = G/\Gamma$ , telle que  $(P', X)$  soit un système d'imprimitivité pour  $U$ ,  $G$  opérant transitivement sur  $X$ .

Il existe alors une représentation unitaire  $L$  de  $\Gamma$ , telle que la paire  $(P', U)$  soit équivalente à la paire  $(P, {}_G U^L)$  où  $P$  est la mesure spectrale du système d'imprimitivité canonique de  ${}_G U^L$ .

Si  $L_1$  et  $L_2$  sont deux représentations unitaires de  $\Gamma$  et  $P_1, P_2$ , les mesures spectrales des systèmes d'imprimitivité canoniques de  ${}_G U^{L_1}$  et  ${}_G U^{L_2}$ , les paires  $(P_1, {}_G U^{L_1})$  et  $(P_2, {}_G U^{L_2})$  sont équivalentes, si et seulement si  $L_1$  et  $L_2$  sont équivalentes.

#### **D. Représentations unitaires irréductibles des groupes possédant un sous-groupe abélien distingué**

Nous allons considérer maintenant les groupes possédant un sous-groupe abélien distingué et esquisser la théorie qui permet de montrer que toutes leurs représentations unitaires irréductibles sont des représentations induites. Soient donc  $G$  un groupe localement compact séparable et  $H$  un sous-groupe abélien distingué et fermé de  $G$ . Nous allons auparavant rappeler quelques résultats concernant les groupes abéliens localement compacts.

On entend par caractère d'un groupe abélien  $H$  localement compact, toute fonction continue  $\hat{h}$ , définie sur  $H$  à valeurs dans les nombres complexes de module 1 et telle que

$$\hat{h}(h_1 h_2) = \hat{h}(h_1) \hat{h}(h_2).$$

L'ensemble des caractères d'un groupe, appelé le dual de  $H$  et qu'on notera  $\hat{H}$ , est un groupe qu'on peut rendre localement compact. Le dual de  $\hat{H}$  s'identifie à  $H$  (i.e.  $\hat{\hat{H}} = H$ ). On écrit  $\hat{h}(h) = \langle \hat{h}, h \rangle$  pour respecter la symétrie entre  $H$  et  $\hat{H}$ .

En particulier, si  $H$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , il en est de même pour  $\hat{H}$ , et si  $h = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\hat{h} = (y_1, \dots, y_n)$  on a

$$\langle \hat{h}, h \rangle = \exp i \{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n\}.$$

Le théorème concernant les représentations unitaires des groupes abéliens est le suivant:

*Théorème:* Toute représentation unitaire  $U$  de  $H$  dans un espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}$  est définie par une mesure spectrale  $P$  sur  $\hat{H}$  à valeur dans  $\mathfrak{H}$  de la manière suivante:  $U(h) = P(\hat{h})$ .

$P(\hat{h})$  est unitaire, car  $|\hat{h}| = 1$ . Ceci signifie que  $U(h)$  est l'opérateur correspondant par  $P$  à la fonction de  $\hat{h} \rightarrow \langle \hat{h}, h \rangle$ . Plus explicitement, si on désigne par  $\mu_{x,y}$  la mesure  $\mu_{x,y}(E) = \langle P(E) x, y \rangle$ , on a

$$\langle U(h) x, y \rangle = \int_{\hat{H}} \langle \hat{h}, h \rangle d\mu_{x,y}(\hat{h}). \quad (\text{I-11})$$

A toute représentation unitaire de  $G$  est associé un système d'imprimitivité basé sur  $\hat{H}$

Rappelons qu'un système d'imprimitivité est constitué d'un espace homogène sur lequel  $G$  opère et d'une mesure spectrale basée sur cet espace homogène.

- 1)  $G$  opère dans  $\hat{H}$  de la manière suivante:  $\hat{h} \rightarrow g \hat{h}$  avec  $\langle g^{-1} \hat{h}, h \rangle = \langle \hat{h}, g h g^{-1} \rangle$  (I-12) et là intervient l'hypothèse fondamentale que  $H$  est distingué. (Remarque:  $H$  opère trivialement dans  $\hat{H}$ ).
- 2) En tenant compte du théorème précédent qui nous fournit une mesure spectrale  $P$  en restreignant la représentation  $U$  à  $H$ , on vérifie immédiatement que

$$U(g) P(E) U(g)^{-1} = P(g E).$$

Mais on ne peut pas nécessairement identifier  $U$  à une représentation induite, puisque le groupe  $G$  n'opère pas transitivement sur  $\hat{H}$ . Ceci nous amène à considérer de plus près les orbites de  $\hat{H}$  sur lesquelles, par définition,  $G$  opère transitivement. La théorie qui va suivre ne s'applique pas à tous les groupes possédant un sous-groupe abélien distingué; il est nécessaire que celui-ci «opère régulièrement dans  $\hat{H}$ » condition supplémentaire sur les parties boréliennes de  $\hat{H}$  vérifiée par le groupe de Galilée et le groupe de Poincaré comme l'a montré G. MACKAY.

Donnons maintenant un résultat très important:

Si  $U$  est irréductible,  $P$  est «portée» par une orbite, c'est-à-dire que tout se passe comme si, vis-à-vis de la mesure spectrale,  $\hat{H}$  se réduit à cette orbite qu'on notera  $\Omega_U$ .

Maintenant, que du point de vue de la théorie de la mesure,  $\hat{H}$  se réduit à une orbite et que  $G$  opère transitivement sur  $\Omega_U$  on peut appliquer le théorème de G. MACKEY.

Ainsi si  $\hat{h}_0 \in \Omega_U$  et si  $\Gamma$  est le stabilisateur de  $\hat{h}_0$ ,  $\Omega_U$  est isomorphe à  $G/\Gamma$ .  $P$  peut être considéré comme une mesure spectrale sur  $\Omega_U$  et on a alors un système d'imprimitivité basé sur un espace homogène. Le théorème fondamental de G. MACKEY nous apprend que  $(U, P)$  est isomorphe à  $({}_G U^L, P')$  pour une représentation  $L$  de  $\Gamma$ ,  $P'$  étant la mesure spectrale canonique associée à  ${}_G U^L$ . Comme  $U$  est irréductible, il en est de même pour  $L$ .

La représentation  $L$  n'est pas quelconque et on peut préciser sa restriction à  $H$  qui doit être:

$$L(h) = \langle \hat{h}_0, h \rangle \quad (\text{I-13})$$

ce qu'on traduit en disant que la restriction de  $L$  à  $H$  est un multiple de  $\hat{h}_0$ .

Evidemment la réciproque nous intéresse beaucoup pour la construction des représentations irréductibles.

*Théorème:* Si  $\Omega$  est une orbite de  $\hat{H}$ ,  $\hat{h}_0 \in \Omega$  et  $\Gamma$  le stabilisateur de  $\hat{h}_0$ , pour toute représentation irréductible  $L$  de  $\Gamma$  dont la restrictive à  $H$  est un multiple de  $\hat{h}_0$ ,  ${}_G U^L$  est irréductible et l'orbite correspondante  $\Omega_{G U^L} = \Omega$ .

Nous allons considérer maintenant le cas plus particulier d'un produit semi-direct d'un sous-groupe abélien distingué et d'un sous-groupe fermé  $K$ . Donc, par définition, tout élément de  $G$  peut s'écrire d'une façon et d'une seule sous la forme  $h \cdot k$  avec  $h \in H$  et  $k \in K$ .

Comme  $H$  opère identiquement dans  $\hat{H}$ , l'action de  $G$  sur  $\hat{H}$  se réduit à celle de  $K$ . Le stabilisateur de  $\hat{h}_0$  est donc de la forme  $H \Gamma_1$ ,  $\Gamma_1$  étant un sous-groupe fermé de  $K$ . De plus les représentations unitaires de  $\Gamma$  dont la restriction à  $H$  est un multiple de  $\hat{h}_0$  sont déterminées par les représentations unitaires de  $\Gamma_1$ , c'est-à-dire ont la forme suivante

$$L(\gamma) = \langle \hat{h}_0, h \rangle L_1(\gamma_1) \quad (\text{I-13})\text{bis}$$

où  $\gamma = h \gamma_1$  ( $\gamma_1 \in \Gamma_1$ ) et  $L_1$  est une représentation unitaire de  $\Gamma_1$ . Donnons quelques remarques qui nous aideront à préciser la forme de la représentation

- 1)  $\Omega \simeq H K / H \Gamma_1 \simeq K / \Gamma_1$ ;
- 2) Une mesure  $\mu$  définie sur  $\Omega$ , invariante par  $K$  l'est aussi par  $G = H K$  puisque  $H$  opère trivialement sur  $\Omega$ .
- 3) Si on connaît la fonction  $B(k)$  pour le groupe  $K$ , elle est déterminée pour tout élément du groupe. En effet:

$$B(g) = B(h k) = B(k k^{-1} h k) = L(k^{-1} h^{-1} k) B(k) = \langle k \hat{h}_0, h^{-1} \rangle B(k)$$

la fonction  $B(k)$  vérifiant la relation:

$$B(k \gamma_1) = L^{-1}(\gamma_1) B(k) \quad \forall \gamma_1 \in \Gamma_1$$

Ces remarques permettent de ramener le problème de la construction de la représentation induite au problème correspondant sur la « partie homogène »  $K$ , c'est-à-dire de lier  ${}_G U^L$  à  ${}_K U^{L_1}$ . En effet, par définition de la représentation induite, nous avons :

$$\{ {}_G U^L(g_0) \mathbf{F} \} (\hat{h}) = B(g)^{-1} B(g_0^{-1} g) \mathbf{F}(g_0^{-1} \hat{h})$$

où

$$g \hat{h}_0 = \hat{h}.$$

Donc en posant  $g = h k$ ,  $k \in K$  et  $g_0 = h_0 k_0$ , de l'égalité  $g \hat{h}_0 = k \hat{h}_0 = \hat{h}$  nous tirons

$$\begin{aligned} \{ {}_G U^L(g_0) \mathbf{F} \} (\hat{h}) &= B(k)^{-1} B(k_0^{-1} h_0^{-1} k) \mathbf{F}(k_0^{-1} \hat{h}), \\ &= \langle \hat{h}, h_0 \rangle B(k)^{-1} B(k_0^{-1} k) \mathbf{F}(k_0^{-1} \hat{h}), \\ &= \langle \hat{h}, h_0 \rangle ({}_K U^{L_1}(k_0) \mathbf{F}) (\hat{h}). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la formule importante suivante :

$$({}_G U^L(g_0) \mathbf{F}) (\hat{h}) = \langle \hat{h}, h_0 \rangle ({}_K U^{L_1}(k_0) \mathbf{F}) (\hat{h})$$

avec

$$g_0 = h_0 k_0.$$

On voit que pour écrire les représentations unitaires irréductibles d'un groupe possédant un sous-groupe abélien distingué, il est nécessaire de suivre les étapes suivantes :

- 1) Chercher toutes les orbites de  $\hat{H}$ .
- 2) Pour chaque orbite, faire un choix du point stabilisé et déterminer le stabilisateur correspondant.
- 3) Ensuite déterminer les représentations irréductibles du stabilisateur dont la restriction  $H$  est la forme (I-13).
- 4) Induire ces représentations au groupe  $G$ .

Mais au lieu de réaliser les représentations irréductibles dans l'espace  $L^2_\mu(G/\Gamma, \mathfrak{S})$ , on peut revenir à la première forme et les réaliser dans l'espace  $\mathfrak{S}_G^L$  auquel cas elles s'écrivent très simplement

$$\mathbf{f}(g) \xrightarrow{g_0} \{ {}_G U^L(g_0) \mathbf{f} \} (g) = \mathbf{f}(g_0^{-1} g).$$

Mais dans le cas d'un produit semi-direct, le comportement de la fonction  $\mathbf{f}(g)$  est connu dès que l'on connaît cette fonction sur le groupe  $K$  par suite de la condition imposée à ces fonctions, en effet :

$$\mathbf{f}(g) = \mathbf{f}(h k) = \mathbf{f}(k k^{-1} h k) = L(k^{-1} h^{-1} k) \mathbf{f}(k) = \langle k \hat{h}_0, h^{-1} \rangle \mathbf{f}(k)$$

évidemment  $\mathbf{f}(k k_1) = L_1^{-1}(k_1) \mathbf{f}(k)$ .

Ceci nous amène à nous restreindre à l'espace  $\mathfrak{S}_K^{L_1}$  au lieu de considérer  $\mathfrak{S}_G^L$ .

Montrons en effet qu'il existe une correspondance biunivoque entre les représentations  ${}_G U^L$  et  ${}_K U^{L_1}$  : dans  $\mathfrak{S}_G^L$ , la représentation s'écrit  $\mathbf{f}(g) \rightarrow \mathbf{f}(g_0^{-1} g)$ . Si on veut

considérer  $\mathfrak{S}_K^{L_1}$  on doit faire apparaître le comportement des fonctions  $f$  sur la partie homogène  $K$  en s'aidant de la condition, soit plus précisément :

$$\begin{aligned} \langle k \hat{h}_0, h^{-1} \rangle f(k) &\xrightarrow{g_0 = h_0 k_0} f(k_0^{-1} h_0^{-1} h k) = f(k_0^{-1} k k^{-1} h_0^{-1} h k) \\ &= \langle k \hat{h}_0, h_0 h^{-1} \rangle f(k_0^{-1} k) = \langle k \hat{h}_0, h^{-1} \rangle \langle k \hat{h}_0, h_0 \rangle f(k_0^{-1} k). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que la fonction  $f(k)$  se transforme de la manière suivante :

$$f(k) \xrightarrow{g_0 = h_0 k_0} \langle k \hat{h}_0, h_0 \rangle f(k_0^{-1} k)$$

qui n'est autre que la forme de la représentation  ${}_K U^{L_1}$ . Ainsi l'isomorphisme entre  ${}_G U^L$  et  ${}_K U^{L_1}$  s'écrit-il :

$$f(k) \rightarrow f(g) = \langle k \hat{h}_0, h^{-1} \rangle f(k) \quad f(g) \rightarrow f(k) = \langle k \hat{h}_0, h \rangle f(g). \quad (\text{I-15})$$

### E. Le groupe de Poincaré

Le groupe de Lorentz  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble des transformations linéaires réelles qui laissent invariante la forme bilinéaire de  $\mathbb{R}^4$

$$x y = x^0 y^0 - \mathbf{x} \mathbf{y}$$

qu'on notera

$$y = \Lambda x \text{ ou } y^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu.$$

On se limite aux transformations de déterminant égal à 1 et telles que  $\Lambda_0^0 \geq 1$ , c'est-à-dire à la composante connexe du groupe. Le groupe de Lorentz inhomogène ou groupe de Poincaré, que nous noterons  $G$ , est formé des transformations  $y^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu$  et il est muni de la loi de composition suivante :

$$(a; \Lambda) (a'; \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda \Lambda').$$

C'est le produit semi-direct du groupe de Lorentz restreint par un sous-groupe abélien distingué à 4 paramètres  $H$ .

$$G = H \times \mathcal{Q}.$$

Dans le cadre de la mécanique quantique, la nécessité d'obtenir des représentations projectives, c'est-à-dire avec «facteur», nous oblige à considérer non le groupe de Poincaré lui-même, mais son recouvrement universel qu'on appellera encore groupe de Poincaré. Ce groupe n'est autre que le produit semi-direct du recouvrement universel du groupe de Lorentz, soit  $SL(2, \mathbb{C})$  par  $H$ , le sous-groupe abélien distingué des translations de l'espace-temps.

Le dual de  $H$  est constitué par l'ensemble des vecteurs  $p$  de  $\mathbb{R}^4$  munis du produit scalaire,

$$p p' = p^0 p'^0 - \mathbf{p} \mathbf{p}'$$

et

$$\langle \hat{h}, h \rangle = e^{i p a}.$$



Le groupe des translations de l'espace opère trivialement dans  $\hat{H}$ ; seul  $SL(2, \mathbf{C})$  opère de la manière suivante:

A  $\not{p}$  on associe la matrice  $2 \times 2$  hermitienne

$$\begin{pmatrix} \not{p}^0 - \not{p}^3; & -(\not{p}^1 - i \not{p}^2) \\ -(\not{p}^1 + i \not{p}^2); & \not{p}^0 + \not{p}^3 \end{pmatrix}.$$

Si  $A \in SL(2, \mathbf{C})$ ,  $A \not{p}$  est le vecteur correspondant à la matrice hermitienne

$$A \begin{pmatrix} \not{p}^0 - \not{p}^3; & -(\not{p}^1 - i \not{p}^2) \\ -(\not{p}^1 + i \not{p}^2); & \not{p}^0 + \not{p}^3 \end{pmatrix} A^\dagger$$

où  $A^\dagger$  désigne la matrice adjointe (transposée, conjuguée).

Les orbites de  $\hat{H}$  et les stabilisateurs correspondants, déterminés à un isomorphisme près, sont bien connus, (cf. par ex. [1]). Nous ne considérerons que les orbites  $P^2 \geq 0$  et nous commencerons par étudier l'orbite  $P^2 = m^2$  ( $m^2 > 0$ );  $P^0 > 0$ . Le stabilisateur de  $(m, 0, 0, 0) = \overset{0}{\not{p}}$  est  $SU(2, \mathbf{C})$  et à chaque représentation irréductible unitaire de  $SU(2, \mathbf{C})$  indexée par un entier ou demi-entier  $j$ , est associée une représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré qu'on notera  $[m, j]$ . On désignera  $D^{(j)}$  la représentation unitaire de  $SU(2, \mathbf{C})$  qui opère dans un espace  $\mathfrak{H}_{2j+1}$  de dimension  $2j + 1$ . Cette représentation décrit une particule élémentaire de masse  $m$  et de spin  $j$ .

L'orbite  $\not{p}^2 = m^2$  s'identifie au quotient  $SL(2, \mathbf{C})/SU(2, \mathbf{C})$ ; c'est l'hyperboloïde de masse.

La mesure (déterminée à une constante près)  $d^3 \not{p} / \not{p}^0 = d\mu(\not{p})$  est une mesure invariante par  $SL(2, \mathbf{C})$ .

Si l'on écrit les représentations dans l'espace  $L^2_\mu(\Omega(\not{p}^2 = m^2), \mathfrak{H}_{2j+1})$  on doit se donner a priori un champ de transformations de Lorentz qui à tout  $\not{p}$  associe une transformation  $A_{\not{p}}$  telle que  $A_{\not{p}} \overset{0}{\not{p}} = \not{p}$ .

Jusqu'ici deux choix ont été considérés principalement

- 1)  $A_{\not{p}}$  est la transformation de Lorentz pure qui fait passer de  $\overset{0}{\not{p}}$  à  $\not{p}$  ce qui correspond à la base canonique ou au formalisme canonique cf. (6, 11) soit:

$$A_{\not{p}} = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{2m(m + \not{p}^0)}} \quad (\text{I-16})$$

où  $\not{p}$  est défini par (I-1).

- 2)  $A_{\not{p}}$  est le produit d'une transformation de Lorentz pure qui fait passer de  $\overset{0}{\not{p}}$  à  $(\not{p}^0, 0, 0, |\mathbf{p}|)$  et d'une rotation dans le plan  $(0z, \mathbf{p})$  d'angle  $(0z, \mathbf{p})$  qui à  $(\not{p}^0, 0, 0, |\mathbf{p}|)$  fait correspondre le vecteur  $(\not{p}^0, \mathbf{p})$ .

Soit:

$$A_{\not{p}}^H = \frac{1}{\sqrt{2m(m + \not{p}^0)}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (m + \not{p}^0 - \not{p}); & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} (m + \not{p}^0 + \not{p}) \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} (m + \not{p}^0 - \not{p}); & \cos \frac{\theta}{2} (m + \not{p}^0 + \not{p}) \end{pmatrix} \quad (\text{I-17})$$

où  $(\rho, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques de  $\rho$ . Ce choix correspond à la base d'hélicité (cf. [7], [8] et [9]). La forme bien connue des représentations considérées par WIGNER (ou forme standard) est:

$$(U(a, \Lambda) F)(\rho) = e^{i\rho a} D^j(\Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1}\rho}) F(\Lambda^{-1}\rho) \quad (\text{I-18})$$

le  $\Lambda_p$  correspond soit à un choix soit à l'autre. Considérons la représentation dans l'espace  $\mathfrak{S}_\mathbb{R}^{D^j}$  des fonctions  $f(\Lambda)$  définies sur  $SL(2, \mathbb{C})$ , à valeurs dans  $\mathfrak{S}_{2j+1}$  telles que:

$$f(\Lambda A) = D^j(A^{-1}) f(\Lambda) \quad \forall A \in SU(2, \mathbb{C}) \quad (\text{I-19})$$

Sur un tel espace, la représentation s'écrit:

$$(U(a_0, \Lambda_0) f)(\Lambda) = e^{ia_0 \Lambda \overset{0}{\rho}} f(\Lambda_0^{-1} \Lambda). \quad (\text{I-20})$$

Si on considère maintenant les fonctions  $f(a, \Lambda)$  définies sur  $G$ , à valeurs dans  $\mathfrak{S}_{2j+1}$  et telles que:

$$f((a, \Lambda)(a', A)) = e^{-ia' \overset{0}{\rho}} D^j(A^{-1}) f(a, \Lambda) \quad (\text{I-21})$$

(cf. (I-3) et (I-13) bis) la représentation s'écrit alors simplement:

$$(U(a_0, \Lambda_0) f)(a, \Lambda) = f[(a_0, \Lambda_0)^{-1}(a, \Lambda)]. \quad (\text{I-22})$$

Explicitons les isomorphismes dans ce cas: on passe de (I-18) à (I-20) par

$$f(\Lambda) = D^j(\Lambda^{-1} \Lambda_p) F(\rho)$$

où  $\Lambda$  appartient à la classe  $\overset{0}{\rho}$  (i.e.  $\Lambda \overset{0}{\rho} = \rho$ ) et de (I-20) à (I-18) par

$$F(\rho) = D^j(\Lambda_p^{-1} \Lambda) f(\Lambda)$$

on passe de (I-20) à (I-22) par

$$f(a, \Lambda) = e^{-ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} f(\Lambda)$$

et de (I-22) à (I-20) par

$$f(\Lambda) = e^{ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} f(a, \Lambda).$$

Si  $Q_\rho$  est un opérateur quelconque opérant dans  $L_\mu^2(\Omega(\rho^2 = m^2); \mathfrak{S}_{2j+1})$ .

Si  $Q_\Lambda$  est un opérateur quelconque opérant dans  $\mathfrak{S}_\mathbb{R}^{D^j}$ .

Si  $Q_{0,\Lambda}$  est un opérateur quelconque opérant dans  $\mathfrak{S}_G^{D^j}$ .

On a ainsi les correspondances suivantes entre opérateurs qui nous seront très utiles par la suite:

$$\begin{aligned} Q_\rho &= D^{(j)-1}(\Lambda^{-1} \Lambda_p) Q_\Lambda D^{(j)}(\Lambda^{-1} \Lambda_p) \quad \text{où } \Lambda \overset{0}{\rho} = \rho \\ Q_\Lambda &= D^{(j)-1}(\Lambda_p^{-1} \Lambda) Q_\rho D^{(j)}(\Lambda_p^{-1} \Lambda); \quad Q_{a,\Lambda} = e^{-ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} Q_\Lambda e^{ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} \\ Q_\Lambda &= e^{ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} Q_{a,\Lambda} e^{-ia \cdot \overset{0}{\rho}}; \quad Q_{a,\Lambda} = e^{-ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} D^{(j)-1}(\Lambda_p^{-1} \Lambda) Q_\rho D^{(j)}(\Lambda_p^{-1} \Lambda) e^{ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} \\ Q_\rho &= e^{ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}} D^{(j)-1}(\Lambda^{-1} \Lambda_p) Q_{a,\Lambda} D^{(j)}(\Lambda^{-1} \Lambda_p) e^{-ia \cdot \Lambda \overset{0}{\rho}}. \end{aligned} \quad (\text{I-23})$$

Notons que, dans les formes (I-20) et (I-22) la masse apparaît par l'intermédiaire de  $p^2 = m^2$  et de la condition imposée.

*Remarque:* Nous appellerons formalisme canonique la forme standard associée au premier choix de  $A_p$  et formalisme d'hélicité celle associée au second choix.

L'orbite correspondant au cas  $m = 0$  est le cône époiné ( $p^2 = 0; p \neq 0; p_0 > 0$ ). On choisit comme point stabilisé, le point  $\overset{0}{p} = (1, 0, 0, 1)$  (c'est-à-dire la matrice hermitienne  $\overset{0}{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ). Le stabilisateur associé est le groupe spinoriel correspondant à  $E_2$ : le groupe des déplacements du plan. Dans la deuxième partie, nous considérerons en détail les représentations de ce groupe. Rappelons seulement ici qu'il en existe deux types: le premier qu'on notera  $U^j$  est indexé par un nombre  $j$  entier ou demi-entier positif, négatif ou nul, et le second  $U^{(\varepsilon, r)}$  par un nombre réel  $r > 0$  et par  $\varepsilon = \pm 1$  ( $\varepsilon = \pm 1$  sert à distinguer les représentations «single-valued» des représentations «double-valued»). Le premier type permet de décrire les particules de masses nulles et de spin fini. Le second type donne les représentations dites à «spin continu».

Comme dans le cas des masses positives, nous avons deux choix pour la transformation  $A_p$  amenant le point stabilisé  $\overset{0}{p}$  sur  $p$ .

1) Le choix fait par A. S. WIGHTMAN (cf. [1]).

$$A_p^1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p^0 + p^3}} ; & -\frac{p^1 - i p^2}{\sqrt{2} \sqrt{p^0 + p^3}} \\ 0 ; & \frac{\sqrt{p^0 + p^3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{I-24})$$

2)

$$A_p^2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} p^{-1/2} ; & -\sin \frac{\theta}{2} (p)^{1/2} e^{-i\varphi} \\ \sin p^{-1/2} e^{i\varphi} ; & \cos \frac{\theta}{2} p^{+1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{I-25})$$

où  $(p, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques de  $\mathbf{p}$ . Cette transformation n'est rien d'autre que le produit d'une transformation de Lorentz pure qui fait passer de  $(1, 0, 0, 1)$  à  $(p, 0, 0, p)$  soit  $L_p$ :

$$L_p = \begin{pmatrix} p^{-1/2} & 0 \\ 0 & p^{+1/2} \end{pmatrix}$$

suivie d'une rotation d'axe  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{p}$  (où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire de 0 z) et d'angle  $\theta$ . C'est la généralisation de la transformation de M. JACOB et G. C. WICK, au cas des masses nulles. A noter que la transformation  $A_p$  n'a pas besoin d'être définie sur tout l'hyperboloïde et qu'elle peut être non définie sur un ensemble de mesure nulle.

Si l'on induit  $U^j$ , l'espace d'Hilbert de la représentation est formé des fonctions définies sur le cône, à valeurs scalaires et telles que:

$$\int \frac{d^3 p}{p} |\mathbf{F}(p)|^2 < +\infty$$

et la représentation du groupe de Poincaré s'écrira simplement:

$$\{U(a, A) \mathbf{F}\}(p) = e^{i p a} U^j(A_p^{-1} A A_{A^{-1}p}) \mathbf{F}(A^{-1} p). \quad (\text{I-26})$$

Par contre si l'on induit la représentation  $U^{(\varepsilon, r)}$  avec  $r > 0$ , l'espace d'Hilbert de la représentation est l'ensemble des fonctions définies sur le cône, à valeurs dans l'espace d'Hilbert de la représentation induite (qui n'est plus un espace de dimension finie), et telles que:

$$\int \frac{d^3 p}{p} \| \mathbf{F}(p) \|_{\mathfrak{H}}^2 < + \infty$$

où  $\mathfrak{H}$  est l'espace d'Hilbert des fonctions périodiques, telles que:

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < + \infty.$$

La forme de la représentation est alors:

$$\{U(a, \Lambda) \mathbf{F}\}(p) = (e^{i p a} U^{(\varepsilon, r)} (\Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1} p}) \mathbf{F})(\Lambda^{-1} p). \quad (\text{I-27})$$

La structure des représentations et les isomorphismes entre les différentes formes sont les mêmes que dans le cas des masses positives, à condition de remplacer les représentations  $D^{(i)}$  par les représentations  $U^i$  ou  $U^{(\varepsilon, r)}$  suivant le cas.

Dans la seconde partie, nous allons étudier plus particulièrement la forme (I-20) des représentations du groupe de Poincaré.

### Bibliographie

- [1] E. WIGNER, *Ann. Math.* 40, 149 (1939).  
A. S. WIGHTMAN, *Les Houches, Relations de dispersion et particules élémentaires* (1961).
- [2] G. MACKEY, *Ann. Math.* 55, 101 (1952).
- [3] F. LURÇAT, *Physics* 1, 95 (1964).
- [4] P. A. M. DIRAC, *La théorie quantique des champs* (Solvay meeting 1961), pp. 93 et 167.
- [5] P. A. M. DIRAC, *Rev. Mod. Phys.* 34, 592 (1962).
- [6] A. J. MAC-FARLANE, *JMP* 3, 1116 (1962); *JMP* 4, 490 (1963).
- [7] L. MICHEL et A. S. WIGHTMAN, *Phys. Rev.* 98, 1190 (1955).
- [8] M. JACOB et C. G. WICK, *Ann. Phys.* 7, 404 (1959).
- [9] C. G. WICK, *Ann. Phys.* 7, 65 (1962).
- [10] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthiers-Villars (1957).
- [11] A. CHAKRABARTI, Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay, Mai 1965.
- [12] E. WIGNER, *Phys. Rev.* 94, 17 (1954).
- [13] M. TÖLLER, *Nuo.Cim.* 37, 631 (1965).
- [14] P. MOUSSA et R. STORA, Boulder (1964).
- [15] G. MACKEY, Notes de Chicago (1955).
- [16] Seminaire J. M. JAUCH, CERN (1959).
- [17] G. EMCH, *Helv. phys. Acta* 36, 739 (1963).
- [18] Seminaire GEORGE RIDEAU, Institut Henri Poincaré, Année 1964-1965.