

Über den Compton-Effekt am gebundenen K-Elektron

Autor(en): **Lambert, M. / Müller, R. / Lang, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **39 (1966)**

Heft 4

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113690>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über den Compton-Effekt am gebundenen K-Elektron

von **M. Lambert**

Laboratorium für Hochenergiephysik, ETH

und **R. Müller, J. Lang, R. Bösch** und **W. Wölfli**

Laboratorium für Kernphysik, ETH

(22. III. 66)

Abstract. The differential cross section for (incoherent) scattering of γ -rays by the bound K-electrons has been calculated using the form factor approximation. Numerical values are given for $Z = 13, 29, 50, 79, 92, E_\gamma = 164, 328, 662, 1332, 2620$ kev, and $\theta_{\gamma'} = 30^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

Bei der Messung von Wirkungsquerschnitten der elastischen Streuung von γ -Quanten, sei es für die Bestimmung des Rayleigheffektes, des Delbrückeffektes oder sei es zur Messung von Niveaubreiten mit Kernresonanzstreuung, tritt der hochenergetische Anteil der inkohärenten Streuung von γ -Quanten am Elektron (Compton-Effekt) stets sehr störend in Erscheinung und muss in geeigneter Weise berücksichtigt werden. Das Ziel dieser Arbeit ist, diesen hochenergetischen Anteil der Compton-Streuung, der hauptsächlich von der Streuung an gebundenen K-Elektronen herührt, abzuschätzen.

Den Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung von γ -Quanten an gebundenen Elektronen erhält man durch Einsetzen der Diracschen Wellenfunktionen für den Grundzustand ψ_0 und den Kontinuumszustand ψ_f in

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{k'}{k} \left| \mathbf{e} \mathbf{e}' \int d^3r \exp(i \Delta \mathbf{k} \mathbf{r}) \psi_f \psi_0 \right|^2 \quad (1)$$

k und k' sind die Wellenzahlen der einfallenden und der gestreuten Wellen, \mathbf{e} und \mathbf{e}' ihre Polarisationsvektoren. Vernachlässigt wird bei dieser Rechnung die Bindung im Zwischenzustand (Formfaktornäherung). Für ψ_f müssten im Prinzip auch höhere gebundene Zustände eingesetzt werden, was zu diskreten k' -Werten führen würde.

Für den Anteil der K-Elektronen erhält man (RANDES [1]¹⁾; vgl. auch STANDING und JOVANOVICH [2], wo einige Fehler der ursprünglichen Randlesschen Arbeit erwähnt werden) in Einheiten $m = c = \hbar = 1$ folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \frac{(1 + \gamma_0) (2 Z \alpha)^{2\gamma_0+1}}{\pi \Gamma(2\gamma_0+1)} \frac{k'}{k} \\ &\times \dot{p} (W + 1) e^{\pi Z \alpha W / \dot{p}} \sum_{\substack{\kappa = -\infty \\ \kappa \neq 0}}^{+\infty} \frac{|\kappa| |\Gamma(\gamma_\kappa + 1 + i Z \alpha W / \dot{p})|^2}{|\Gamma(2\gamma_\kappa + 1)|^2} (2 \dot{p})^{2\gamma_\kappa - 2} I_\kappa^2 \\ I_\kappa &= \int_0^\infty dr r^{\gamma_0 + \gamma_\kappa} e^{-Z \alpha r} j_l(\Delta k r) \left(1 - i \sqrt{\frac{1 - \gamma_0}{1 + \gamma_0} \frac{W - 1}{W + 1}} \right) \\ &\times e^{i\beta\kappa} e^{-i\dot{p}r} {}_1F_1(\gamma_\kappa + 1 + i Z \alpha W / \dot{p}; 2\gamma_\kappa + 1; 2i\dot{p}r) + \text{conj. compl.} \end{aligned} \quad (2)$$

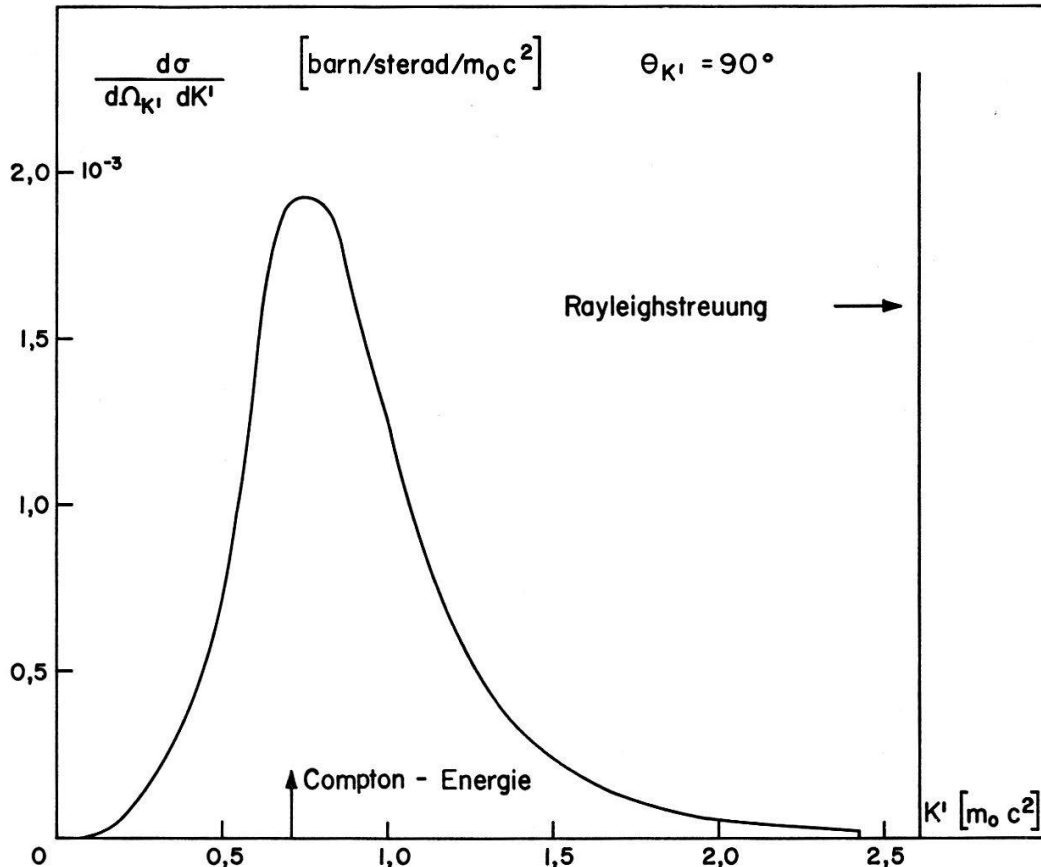
¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 360.

Für $\kappa > 0$ ist $l = \kappa$ und $\beta_\kappa = 1/2 [\arctg(Z \alpha W / \phi \gamma_\kappa) - \arctg(Z \alpha / \phi \kappa)] + \pi/2$ und für $\kappa < 0$ $l = -1 - \kappa$ und $\beta_\kappa = 1/2 [\arctg(Z \alpha W / \phi \gamma_\kappa) - \arctg(Z \alpha / \phi \kappa)]$ zu setzen. Ferner bedeuten

$$\phi = \sqrt{(k - k' + \gamma_0)^2 - 1} = \text{Impuls des Rückstosselektrons}$$

$$W = \sqrt{\phi^2 + 1} = \text{Energie des Rückstosselektrons}$$

$$\Delta k = k - k' = \text{Änderung des Wellenvektors.}$$



Figur 1

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten Streuung von γ -Strahlen der Energie $k = 2,607 m_0 c^2$ an den beiden K -Elektronen von Gold ($Z = 79$) für einen Streuwinkel $\Theta_{K'} = 90^\circ$. Der Wirkungsquerschnitt für die Rayleigh-Streuung beträgt (bei $k = 2,56 m_0 c^2$) nach BROWN [6] $48 \mu\text{barn/sterad}$ und nach der Formfaktornäherung $105 \mu\text{barn/sterad}$.

Ausserdem wurden die Abkürzungen

$$\gamma_0 = \sqrt{1 - Z^2 \alpha^2} \quad \text{und} \quad \gamma_\kappa = \sqrt{\kappa^2 - Z^2 \alpha^2}$$

verwendet. ${}_1F_1$ ist die konfluente hypergeometrische Funktion und $j_l(\Delta k r)$ die sphärische Besselfunktion l -ter Ordnung. Setzt man für die letztere

$$j_l(\Delta k r) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^l H_l^j \Delta k^{-j-1} r^{-j-1} e^{i \Delta k r} i^{j-l-1} + \text{conj. compl.}$$

$$H_l^j = \prod_{\mu=1}^j \frac{(l+\mu)(l-\mu+1)}{2\mu} \quad (3)$$

ein, so können die Integrale ausgeführt werden (siehe Nr. (17), p. 219 in ERDÉLY et al. [3]; die Bedingung, dass der Realteil des Exponenten von r grösser als 1 sein muss, führt auf $Z\alpha < \sqrt{3}/2$ und ist für alle stabilen Kerne erfüllt). Das Konvergenzverhalten der Reihenentwicklung für die hypergeometrische Funktion kann verbessert werden, wenn auf diejenigen Terme, welche im Exponenten die Differenz $i p r - i \Delta k r$ enthalten, vor der Integration die Kummersche Transformation [4] angewandt wird. I_x kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 I_x = & \frac{1}{2} \sum_{j=0}^l H_l^j \Delta k^{-j-1} \Gamma(\gamma_0 + \gamma_x - j) i^{j-l-1} (Z\alpha - i(\Delta k + p))^{j-\gamma_0-\gamma_x} \\
 & \times \left\{ \left(1 + i \sqrt{\frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} \frac{W-1}{W+1}} \right) e^{-i\beta_x} \right. \\
 & \times {}_2F_1 \left(\gamma_x + 1 - i Z \alpha W/p, \gamma_0 + \gamma_x - j; 2\gamma_x + 1; \frac{2p}{\Delta k + p + i Z \alpha} \right) \\
 & + \left(1 - i \sqrt{\frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} \frac{W-1}{W+1}} \right) e^{i\beta_x} \\
 & \left. \times {}_2F_1 \left(\gamma_x - i Z \alpha W/p, \gamma_0 + \gamma_x - j; 2\gamma_x + 1; \frac{2p}{\Delta k + p + i Z \alpha} \right) \right\} + \text{conj. compl.} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Die Reihenentwicklung für die hypergeometrische Funktion

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\prod_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)} \right] z^m$$

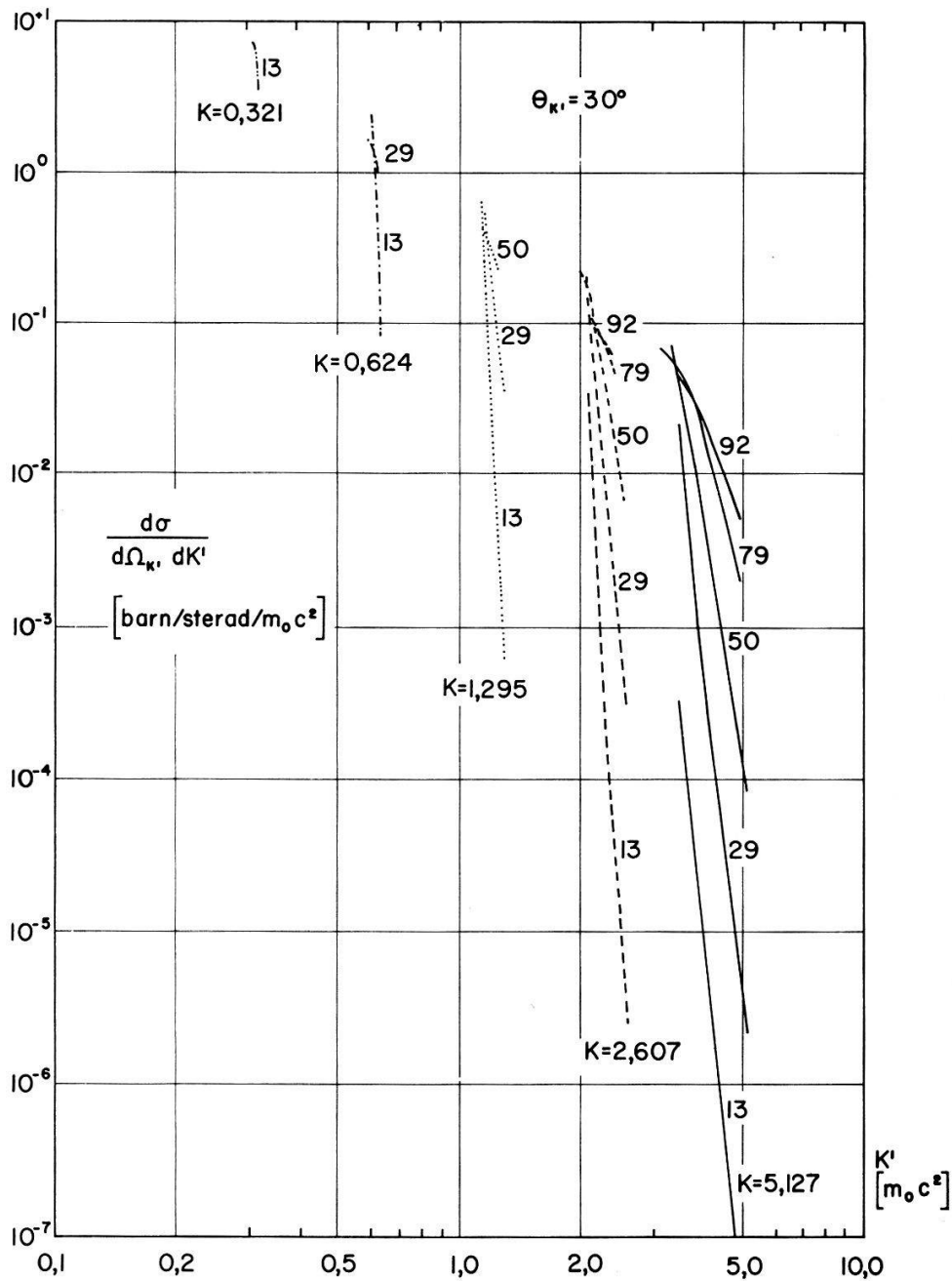
ist brauchbar, solange $|z| < 1$. Für grössere z existieren Formeln für die analytische Fortsetzung. Geeignet sind die Entwicklungen um $z = 1$ (siehe [4]):

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, z) = & \Gamma(\gamma) \left\{ \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z) \right. \\
 & \left. + \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta; 1-z) \right\}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Gammafunktion können, je nach Bereich, verschiedene Näherungspolynome oder asymptotische Entwicklungen verwendet werden [5].

Das Resultat einer Rechnung für $Z = 79$ (Gold) bei einer γ -Energie von 1,332 MeV und für einen Streuwinkel von 90° zeigt die Figur 1. Wegen der hohen Bindungsenergie der K -Elektronen ist die Compton-Streulinie stark verbreitert. Der daraus ermittelte integrale Wirkungsquerschnitt beträgt $1,24 \cdot 10^{-26}$ cm²/sterad (gegenüber $1,72 \cdot 10^{-26}$ cm²/sterad nach der Formel von Klein-Nishina, die wegen der starken Bindung der K -Elektronen allerdings zu grosse Werte liefert). Die Anteile der übrigen Elektronen ergeben sehr viel schmalere Linien und tragen zum Gesamtwirkungsquerschnitt nur in der Umgebung der der Streuung an freien Elektronen entsprechenden Rückstossenergie wesentlich bei. Beschränkt man sich auf den (interessanten) oberen Teil des Spektrums, so genügt die Berücksichtigung der K -Elektronen.

Beträchtliche Fehler bringt bei hohen γ -Energien die Vernachlässigung der Bindung im Zwischenzustand. Diese Annahme, die auch bei der Berechnung der kohärenten Rayleigh-Streuung gemacht wird und dort als Formfaktornäherung bezeichnet wird, liefert nur für sehr kleine Impulsänderungen $\Delta k \ll Z\alpha$ brauchbare Resultate.



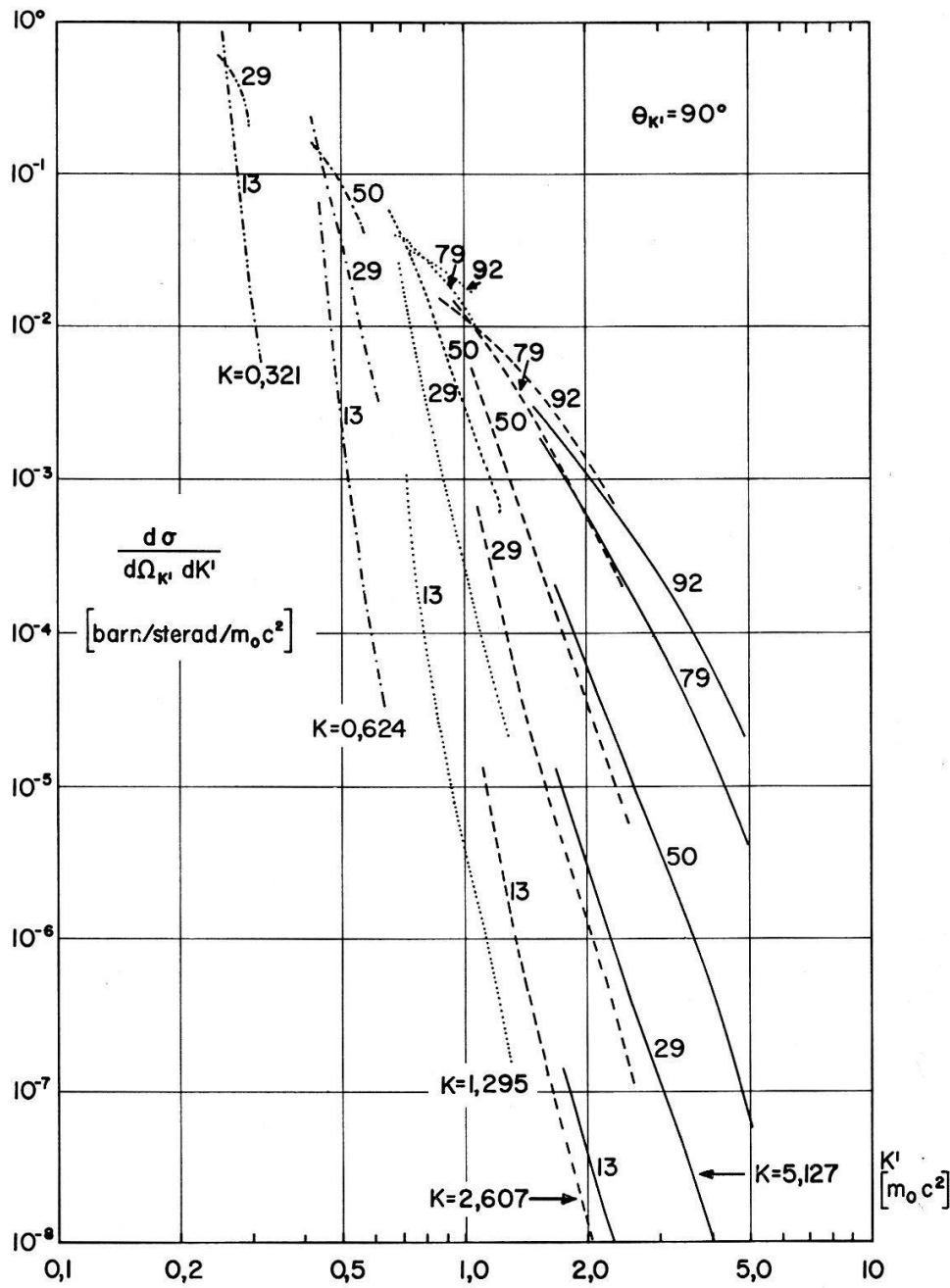
Figur 2

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten γ -Streuung an Atomen mit $Z = 13, 29, 50, 79$ und 92 für einen Streuwinkel $\Theta_{k'} = 30^\circ$. γ -Energien: $-\cdot-\cdot-\cdot k = 0,321 \text{ mc}^2$, $-\cdot-\cdot-\cdot k = 0,624 \text{ mc}^2$, $\dots\dots k = 1,295 \text{ mc}^2$, $--- k = 2,607 \text{ mc}^2$, $— k = 5,127 \text{ mc}^2$.

RANDLES gibt jedoch Argumente dafür, dass das Verhältnis von kohärenter zu inkohärenter Streuung ungefähr richtig wiedergegeben wird, wenn in beiden Fällen die Formfaktornäherung verwendet wird. Die nach (2) berechneten Werte können somit dadurch korrigiert werden, dass sie mit dem Verhältnis von exaktem zu in Formfaktornäherung berechnetem Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \left| \frac{2 Z \alpha \sin [2 \gamma_0 \arctg (\Delta k / 2 Z \alpha)]}{\gamma_0 \Delta k \{1 + \Delta k / 2 Z \alpha\}} \right|^2 \tag{7}$$

multipliziert werden. Gute Rechnungen für die Rayleigh-Streuung liegen nur für $Z = 79$ vor [6]. Die Brauchbarkeit der Formfaktornäherung kann bis etwa $\Delta k \approx Z \alpha$

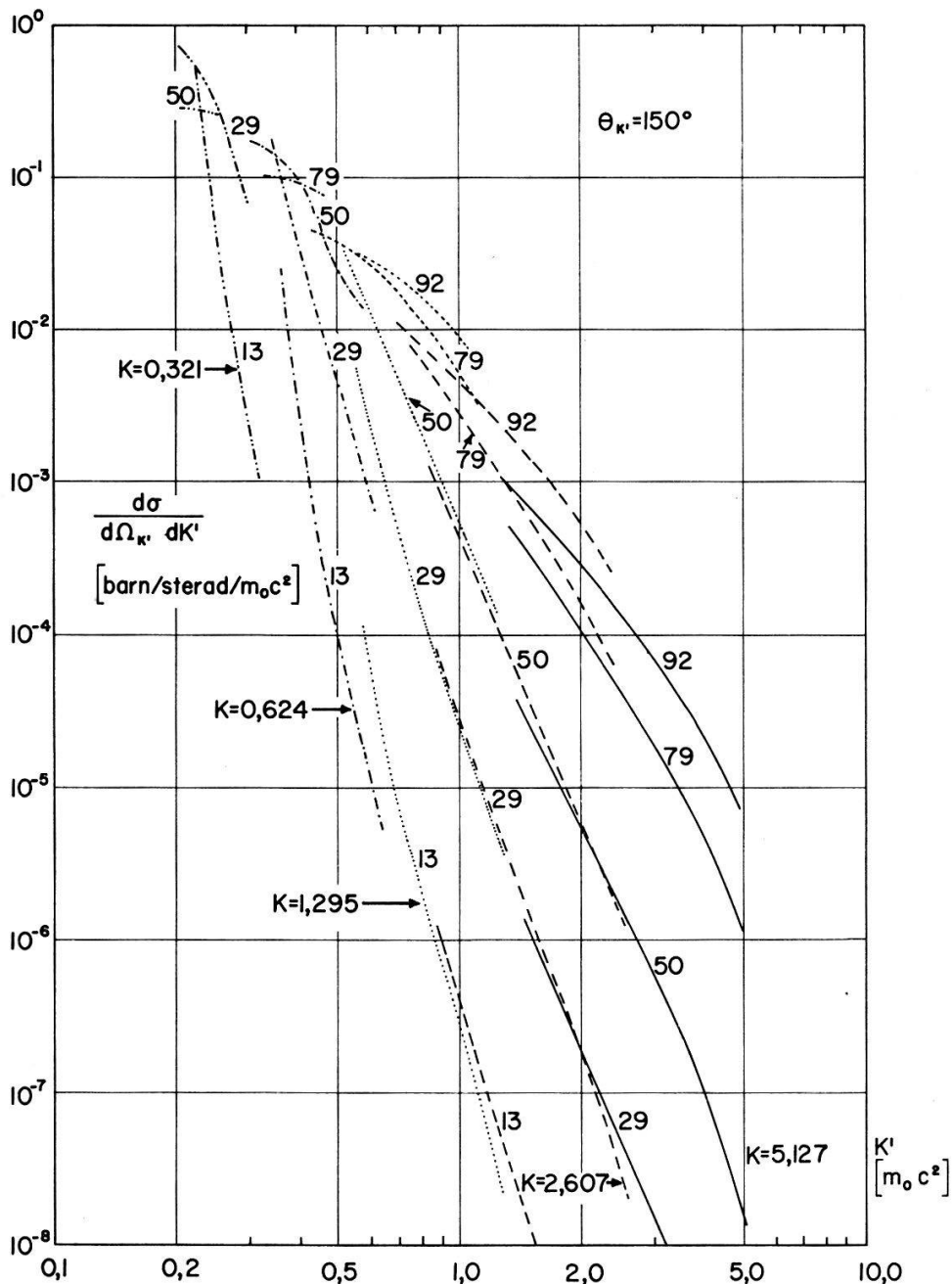


Figur 3

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten γ -Streuung an Atomen mit $Z = 13, 29, 50, 79$ und 92 für einen Streuwinkel $\theta_{K'} = 90^\circ$. γ -Energien: $\dots\dots k = 0,321 \text{ mc}^2$, $\dots\dots k = 0,624 \text{ mc}^2$, $\dots\dots k = 1,295 \text{ mc}^2$, $\dots\dots k = 2,607 \text{ mc}^2$, $\dots\dots k = 5,127 \text{ mc}^2$.

ausgedehnt werden durch Einfügen eines Korrekturfaktors $f(r)$ in der zu (1) analogen Formel, wobei $f(r) = 1$ zu setzen ist für den Anteil ohne Polarisationsänderung und $f(r) = 1/(E + Z\alpha/r)$ für den Anteil mit Polarisationsänderung (vgl. BROWN and MAYERS [6]). Für $\Delta k \gg Z\alpha$ wird der zweite Anteil am besten überhaupt vernachlässigt, während der erste immer noch nach der Formfaktornäherung berechnet werden kann.

Für eine Reihe von Z und verschiedene γ -Energien sind in den Figuren 2 bis 4 die Resultate für den oberen Teil des Spektrums, wo die K -Elektronen den Hauptbeitrag liefern, zusammengestellt. Die Genauigkeit der numerischen Rechnungen, die auf einer CDC-1604A durchgeführt wurden, ist im allgemeinen besser als 5%.



Figur 4

Differentieller Wirkungsquerschnitt der inkohärenten γ -Streuung an Atomen mit $Z = 13, 29, 50, 79$ und 92 für einen Streuwinkel $\Theta_{k'} = 150^\circ$. γ -Energien: $-\dots-k = 0,321 \text{ mc}^2$, $-\dots-k = 0,624 \text{ mc}^2$, $\dots k = 1,295 \text{ mc}^2$, $--- k = 2,607 \text{ mc}^2$, $— k = 5,127 \text{ mc}^2$.

Literatur

[1] J. RANGLES, Proc. Phys. Soc. (London) *A 70*, 337 (1957).
 [2] K. G. STANDING and J. V. JOVANOVICH, Can. J. Phys. *40*, 622 (1962).
 [3] ERDÉLY, MAGNUS, OBERHETTINGER, and TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1.
 [4] ERDÉLY, MAGNUS, OBERHETTINGER, and TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1.
 [5] HASTINGS, *Approximations for Digital Computers*.
 [6] S. BRENNER, G. E. BROWN, and J. B. WOODWARD, Proc. Roy. Soc. (London) *227*, 58 (1955);
 G. E. BROWN and D. F. MAYERS, Proc. Roy. Soc. (London) *234*, 387 (1956); G. E. BROWN and
 D. F. MAYERS, Proc. Roy. Soc. (London) *242*, 89 (1957); H. CORNILLE and M. CHAPDELAIN,
 Nuovo Cimento *14*, 1386 (1959).