

# Eine Bemerkung zu einem "Letter" von L. O'Raifeartaigh und einer Entgegnung von M. Flato und D. Sternheimer

Autor(en): **Jost, Res**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **39 (1966)**

Heft 4

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113692>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Eine Bemerkung zu einem «Letter» von L. O'RAIFEARTAIGH und einer Entgegnung von M. FLATO und D. STERNHEIMER

von Res Jost

Seminar für Theoretische Physik, ETH

(3. IV. 66)

*Abstract.* A proof of the following theorem is given:

*Theorem:* Let  $\Gamma$  be a continuous unitary representation of a finite connected Lie group  $\mathfrak{G}$  in a Hilbert space  $\mathfrak{H}$ . Let  $\mathfrak{G}$  contain the inhomogeneous Lorentz group as an analytic subgroup. Let finally the spectrum of the energy-momentum vector be contained in  $\{0\} \cup V_+$ . If  $m_1 > 0$  is an isolated eigenvalue of the mass operator then the corresponding eigenspace is invariant under  $\Gamma(\mathfrak{G})$ .

This theorem is a consequence of a more general theorem given in the text.

## 1. Einleitung

Die vorliegende kleine Note entspringt der mehr zufälligen Lektüre des Briefes von M. FLATO und D. STERNHEIMER in Phys. Rev. Letters 15, 934 (1965). In diesem Brief werden mehrere Arbeiten von L. O'RAIFEARTAIGH einer sehr scharfen Kritik unterzogen. Uns interessiert hier die Kritik an O'RAIFEARTAIGH, Phys. Rev. Letters 14, 575 (1965). Da die Autoren keine Gegenbeispiele<sup>1)</sup> geben, nahm es mich wunder, wie weit die interessante Aussage von O'RAIFEARTAIGH mit einfachen Hilfsmitteln aus der Funktionalanalysis zu retten sei. Wie das Weitere zeigt, war ich in dieser Hinsicht nicht sehr erfolgreich. Es gilt der folgende

*Satz:* Sei  $\mathfrak{G}$  eine endliche zusammenhängende Liesche Gruppe, die die inhomogene Lorentzgruppe als analytische Untergruppe enthält. Sei  $\Gamma$  eine stetige unitäre Darstellung von  $\mathfrak{G}$  und  $P$  der Energie-Impulsvektor. Sei das Spektrum von  $P$  in  $\{0\} \cup V_+$  ( $V_+$  der offene Vorkegel) enthalten und sei  $M = \sqrt{(P, P)}$  der Massenoperator. Falls  $M$  den isolierten Eigenwert  $m_1 > 0$  besitzt, dann ist der zugehörige Eigenraum  $\mathfrak{H}_1$  unter  $\mathfrak{G}$  invariant.

Wie man sieht, bleiben alle isolierten Massen, also z. B. die kleinste positive Masse (bei Abwesenheit der Masse 0), unter  $\mathfrak{G}$  entartet.

Der obige Satz scheint mir hinreichend, um Versuche (stabile) Massenmultipletts in eine irreduzible Darstellung einer endlichen Lieschen Gruppe  $\mathfrak{G}$  zusammenzufassen, zum Scheitern zu verurteilen; denn in einer solchen (freilich hypothetischen) Theorie dürfen vermutlich keine Teilchen der Ruhmasse 0 auftreten (da sonst wohl keine positiven Eigenwerte des Massenoperators vorhanden sind); es muss also, soll die Theorie überhaupt eine vernünftige Partikelinterpretation besitzen, eine kleinste

<sup>1)</sup> Am «Colloque sur l'extension du group de Poincaré aux symetries internes des particules elementaires» in Gif sur Yvette haben M. FLATO und D. STERNHEIMER ein Gegenbeispiel zur ursprünglichen Aussage von L. O'Raifeartaigh vorgetragen. Siehe Phys. Rev. Letters, 16, 1185 (1966).

isolierte Masse auftreten, die dann notwendigerweise  $\mathfrak{G}$ -entartet ist. Freilich hat sich das O'RAIFEARTAIGHSche Resultat, unbewiesen wie es ist, bei den Physikern schon durchgesetzt, so dass ich mit meinen mathematischen «Klugscheisseleien» offene Türen einrenne.

Abschliessend möchte ich betonen, dass das ursprüngliche allgemeine O'RAIFEARTAIGHSche Resultat, mathematisch vernünftig präzisiert, sehr wohl richtig sein kann. Ein strenger Beweis, falls er möglich ist, würde aber wohl einen Aufwand bedingen, den ich jetzt nicht aufbringen möchte oder könnte.

Herrn Kollegen WALTER HUNZIKER danke ich für anregende Diskussionen, die sich auch auf die Abfassung der nachfolgenden Ausführungen ausgewirkt haben, herzlich. Ebenso danke ich meinen Freunden in Princeton, dass sie mitgeholfen haben, die Herren FLATO und STERNHEIMER von der Richtigkeit der nachfolgenden Ausführungen zu überzeugen. Mir allein wäre das nicht gelungen.

## 2. Bezeichnungen aus der Gruppentheorie

Sei  $\mathfrak{G}$  eine zusammenhängende Liesche Gruppe,  $\mathfrak{g}$  die (reelle) Liesche Algebra der infinitesimalen Elemente von  $\mathfrak{G}$ . Wir bezeichnen Gruppenelemente mit  $g$ , Elemente aus der Lieschen Algebra mit  $x, y$ .

$\mathfrak{g}$  enthalte als Unteralgebra die Algebra  $\mathfrak{l}$  der infinitesimalen Lorentztransformationen.  $\mathfrak{p}_k$  und  $m_{ik} = -m_{ki}$ ,  $i, k = 0, 1, 2, 3$  bilden die übliche Basis von  $\mathfrak{l}$  mit den Klammersausdrücken  $[\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l] = 0$ ,  $[m_{ik}, \mathfrak{p}_l] = g_{kl} \mathfrak{p}_i - g_{il} \mathfrak{p}_k$

$$[m_{ik}, m_{st}] = g_{ks} m_{it} - g_{kt} m_{is} - g_{is} m_{kt} + g_{it} m_{ks}.$$

Unter der adjungierten Darstellung von  $\mathfrak{g}$  verstehen wir wie üblich die Darstellung von  $\mathfrak{g}$  durch die linearen Transformationen

$$\text{ad } y : x \rightarrow [y, x], \quad (1)$$

unter der adjungierten Darstellung von  $\mathfrak{G}$  die Darstellung von  $\mathfrak{G}$  durch die linearen Transformationen

$$\text{Ad } g : x \rightarrow g x g^{-1} \quad (2)$$

Die O'RAIFEARTAIGHSchen Schlüsse beruhen auf der Feststellung, dass  $\text{ad } (a, \mathfrak{p}) = \text{ad } (\sum a^k \mathfrak{p}_k)$ ,  $a \in R^4$ , nilpotent ist. Es gibt also eine (positive) natürliche Zahl  $N$ , für die

$$[\text{ad } (a, \mathfrak{p})]^N = 0 \quad (3)$$

richtig ist.

Sei  $l_t(y) \in \mathfrak{G}$  die durch  $y \in \mathfrak{g}$  eindeutig bestimmte einparametrische analytische Untergruppe, dann hat man

$$\text{Ad } l_t(y) = e^{t \text{ad } y}. \quad (4)$$

Insbesondere gilt daher

$$\text{Ad } l_t((a, \mathfrak{p})) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{t^\nu}{\nu!} [\text{ad } (a, \mathfrak{p})]^\nu$$

d.h.  $\text{Ad } l_t((a, \mathfrak{p}))$  ist ein reelles Polynom in den 4 Komponenten von  $a$ . Wir schreiben speziell

$$\text{Ad } l_1((a, \mathfrak{p})) = C(a),$$

wobei  $C(a)$  ein Polynom (mit linearen Transformationen als Koeffizienten) höchstens  $(N - 1)$ -sten Grades in  $a$  ist.

### 3. Bezeichnungen aus der Darstellungstheorie

Es sei  $\Gamma$  eine stetige unitäre Darstellung von  $\mathfrak{G}$  über einem Hilbertraum  $\mathfrak{H}$ . Nach dem Stoneschen Satz ist

$$\Gamma(l_t(x)) = e^{itX} \quad (5)$$

mit selbstadjungiertem Operator  $X$ . Wir schreiben  $iX = \Delta(X)$ ,  $x \in \mathfrak{g}$ . Der Definitionsbereich von  $X$  wird mit  $\Delta(X)$  bezeichnet.

Nun sei

$$D = \bigcup_{\substack{f \in \mathcal{D} \\ \varphi \in \mathfrak{H}}} \int f(g) \Gamma(g) dg \varphi, \quad (6)$$

wobei  $\mathcal{D}$  [1]<sup>2)</sup> alle  $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger auf  $\mathfrak{G}$  enthält und  $dg$  das linksinvariante Haarsche Mass auf  $\mathfrak{G}$  ist, der Gårdingsche Bereich [2] von  $\Gamma$ .  $D$  hat die folgenden für uns fundamentalen Eigenschaften:

- I  $D$  ist dicht in  $\mathfrak{H}$ ,
- II  $D$  ist invariant unter  $\Gamma(\mathfrak{G})$ :  $\Gamma(g) D \subset D$ ,
- III  $D$  ist invariant unter  $\Gamma(\mathfrak{g})$ :  $X D \subset D$ ,
- IV die Restriktion  $X_0 = X/D$  von  $X$  auf  $D$  ist wesentlich selbstadjungiert, d. h. es gilt  $X_0^* = X_0^{**} = X$ .

Da IV für uns besonders wichtig ist, will ich hier den einfachen Beweis eines Satzes von E. NELSON reproduzieren, von dem IV eine Folgerung ist.

**Satz** (E. NELSON [3]): Sei  $X$  selbstadjungiert und  $D \subset \Delta(X)$  dicht in  $\mathfrak{H}$  und invariant unter  $e^{itX}$ , dann ist die Restriktion  $X_0 = X/D$  wesentlich selbstadjungiert.

**Beweis:** Wir zeigen, dass die Defektindices von  $X_0^*$  verschwinden. Sei  $\psi \in \Delta(X_0^*)$  und  $X_0^* \psi = z \psi$ ,  $\text{Im } z \neq 0$ . Es gilt für jedes  $\varphi \in D$

$$(X_0^* \psi, e^{itX} \varphi) = z(\psi, e^{itX} \varphi). \quad (7)$$

Weiter ist

$$(X_0^* \psi, e^{itX} \varphi) = (\psi, X e^{itX} \varphi) = -i \frac{d}{dt} (\psi, e^{itX} \varphi) \quad (8)$$

also aus (7) und (8)

$$\frac{d}{dt} (\psi, e^{itX} \varphi) = i z (\psi, e^{itX} \varphi) \quad (9)$$

oder

$$(\psi, e^{itX} \varphi) = K e^{izt}. \quad (10)$$

Nun ist die linke Seite von (10) beschränkt durch  $\|\psi\| \|\varphi\|$ . Die rechte Seite ist dies aber, wegen  $\text{Im } z \neq 0$ , nur, falls  $K = 0$  ist. Also ist  $(\psi, \varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in D$  und daher  $\psi = 0$ .  $X_0^*$  ist daher selbstadjungiert, qed.

<sup>2)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 375.

Wir wollen für unsere Zwecke IV noch anders formulieren und beachten dazu, dass der Graph von  $X_0^{**}$  die Abschliessung des Graphen von  $X_0$  ist [4]. Daher gilt

IV' Sei  $\varphi \in \Delta(X)$ , dann existiert eine Folge  $\{\varphi_k; \varphi_k \in D\}$  so dass  $s - \lim \varphi_k = \varphi$  und  $s - \lim X_0 \varphi_k = X \varphi$ . Falls umgekehrt eine Folge  $\{\varphi_k; \varphi_k \in D\}$  vorliegt, für welche  $s - \lim \varphi_k = \varphi$  und  $s - \lim X_0 \varphi_k = \chi$  existieren, dann ist  $\varphi \in \Delta(X)$  und  $\chi = X \varphi$ .

Für  $\varphi \in D$  gilt nun weiter

$$\Gamma(g) X \Gamma(g^{-1}) \varphi = \text{Ad } g X \varphi \quad (11)$$

und speziell

$$e^{i(a,P)} X e^{-i(a,P)} \varphi = C(a) X \varphi \quad (12)$$

oder

$$X e^{-i(a,P)} \varphi = e^{-i(a,P)} C(a) X \varphi. \quad (13)$$

Dabei bedeutet hier  $\text{Ad } g$  diejenige lineare Transformation der  $X$ , die durch  $\text{Ad } g X \varphi = -i \Gamma(\text{Ad } g x) \varphi$  bestimmt ist.

#### 4. Anwendung von IV' auf (13)

Aus (13) folgt natürlich für eine endliche Menge  $\{a_k\}$  und Konstanten  $\{c_k\}$

$$X \sum_{k=1}^K c_k e^{-i(a_k,P)} \varphi = \sum_{k=1}^K c_k e^{-i(a_k,P)} C(a_k) X \varphi. \quad (14)$$

Unser Ziel ist es, durch Grenzübergang aus dieser Formel mit Hilfe des Prinzips IV' neue Vektoren aus  $\Delta(X)$  zu konstruieren. Seien  $\varphi(a) = e^{-i(a,P)} \varphi$  und  $\psi(a) = e^{-i(a,P)} C(a) X \varphi$ .  $\varphi(a)$  und  $\psi(a)$  sind  $C^\infty$ -Funktionen von  $a$ . Weiter ist  $\varphi(a)$  mit allen Ableitungen beschränkt,  $\psi(a)$  ist mit allen Ableitungen polynomial beschränkt. Sei  $\tilde{f} \in \mathcal{S}(a)^5$ , dann existieren also die beiden Integrale

$$\int \tilde{f}(a) \varphi(a) d^4 a \quad \text{und} \quad \int \tilde{f}(a) \psi(a) d^4 a$$

und sind die Grenzwerte ihrer (endlichen) Riemann-Summen, also Grenzwerte von Summen, wie sie in (14) auftreten. Gemäss IV' gilt daher

$$\int \tilde{f}(a) \varphi(a) d^4 a \in \Delta(X) \quad (15)$$

und

$$X \int \tilde{f}(a) e^{-i(a,P)} d^4 a \varphi = \int \tilde{f}(a) C(a) e^{-i(a,P)} d^4 a X \varphi \quad \tilde{f} \in \mathcal{S}(a). \quad (16)$$

Nun sind aber sowohl der Ausdruck (15) wie auch die rechte Seite von (16) stetige Funktionale von  $\tilde{f}$ , sie sind also (vektorwertige) temperierte Distributionen und lassen sich Fourier-transformieren, d.h. durch

$$f(k) = \int e^{-i(a,k)} \tilde{f}(a) d^4 a \quad (17)$$

ausdrücken. Dies geschieht mit Hilfe der Spektralzerlegung der stetigen unitären abelschen Gruppe  $\{e^{-i(a,P)}\}$

$$e^{-i(a,P)} = \int e^{-i(a,k)} dE(k) \quad (18)$$

in der Form

$$X \int f(k) dE(k) \varphi = \int (C(\nabla) f)(k) dE(k) X \varphi \quad (19)$$

wobei  $\nabla = i \partial/\partial k$  ist. Der Ausdruck  $C(\nabla) f$  ist dabei wie folgt zu verstehen. Man entwickle die lineare Transformation  $C(a)$  nach Potenzen von  $a$  und substituiert für  $a$  den Operator  $\nabla$ . Den entsprechenden Differential-Operator mit linearen Transformationen als Koeffizienten wendet man auf  $f$  an und erhält die lineare Transformation  $C(\nabla) f$ . Hier erweist sich die Tendenz, die Formeln ohne Bezug auf eine Basis zu schreiben, als nicht sehr glücklich: Sei also  $\{e_k\}$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$  und  $i X = \Gamma(\sum \lambda^k e_k)$ , dann lautet (19)

$$-i \Gamma(\sum \lambda^k e_k) f(P) \varphi = \sum_{k,l} (C(\nabla)_i^k f)(P) \lambda^l (-i) \Gamma(e_k) \varphi \quad (20')$$

wobei  $C(a)_i^k$  die Matrixelemente von  $C(a)$  zur Basis  $\{e_k\}$  sind.

Im Sinne der Operatorrechnung kann (19) nämlich auch in der Form

$$X f(P) \varphi = (C(\nabla) f)(P) X \varphi, \quad f \in \mathfrak{S}(k), \quad \varphi \in D \quad (20)$$

geschrieben werden.

Auf (20) wenden wir unser Prinzip IV' weiterhin an, wobei wir den folgenden bekannten Sachverhalt benützen:

Seien die Funktionen  $\{f_n\}$ ,  $n \in Z_+$  stetig und gleichmässig beschränkt und konvergiere für jedes  $k$   $f_n(k) \rightarrow g(k)$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann gilt

$$s - \lim f_n(P) \varphi = g(P) \varphi \quad (21)$$

für alle  $\varphi \in \mathfrak{S}$  [6].

Sei  $g \in O_M$  [7] und sei  $g$  mit all seinen Ableitungen bis zur Ordnung  $N - 1$  beschränkt. Wir behaupten, dass dann auch gilt

$$X g(P) \varphi = (C(\Delta) g)(P) X \varphi. \quad (22)$$

Zum Beweis wählen wir eine Funktion  $\varrho \in \mathcal{D}(k)$  mit den Eigenschaften  $0 \leq \varrho(k) \leq 1$ ,  $\varrho(k) = 1$  für  $\|k\| \leq 1$ ,  $\varrho(k) = 0$  für  $\|k\| \geq 2$  und setzen

$$f_n(k) = g(k) \varrho(k/(n+1)). \quad (23)$$

Offenbar ist  $f_n \in \mathfrak{S}$ . Ausserdem sind alle Ableitungen von  $f_n$  bis zur Ordnung  $N - 1$  gleichmässig beschränkt. Schliesslich gilt für jeden Multiindex  $m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^m f_n(k) = D^m g(k). \quad (24)$$

Es gilt also

$$s - \lim f_n(P) \varphi = g(P) \varphi \quad (25)$$

und

$$s - \lim (C(\nabla) f_n)(P) X \varphi = (C(\nabla) g)(P) X \varphi \quad (26)$$

und schliesslich (22).

Zum Schluss verwenden wir die Eigenschaft III des Gårding-Bereichs. Wir verstehen unter

$$\|P\|^2 = P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = \int \|k\|^2 dE(k). \quad (27)$$

Für jedes  $\varphi_1 \in D$  und jedes  $n \in \mathbb{Z}_+$  existiert  $(1 + \|P\|^2)^n \varphi_1 \in D$  und kann daher an die Stelle von  $\varphi$  in (22) substituiert werden. Dabei entsteht

$$X g(P) (1 + \|P\|^2)^n \varphi_1 = (C(\mathcal{V}) g) (P) X (1 + \|P\|^2)^n \varphi_1 . \quad (28)$$

Sei schliesslich  $h \in O_M$ , dann existiert  $n \in \mathbb{Z}_+$  so, dass

$$g = h / (1 + \|k\|^2)^n \quad (29)$$

mit allen Ableitungen bis zur Ordnung  $N - 1$  beschränkt ist. Substituiert man (29) in (28), so findet man

$$X h(P) \varphi_1 = (C(\mathcal{V}) g) (P) X (1 + \|P\|^2)^n \varphi_1 . \quad (30)$$

Dabei ist  $\text{supp } h = \text{supp } g$ . Damit sind wir vorbereitet auf den

*Satz:* Seien  $h_\alpha \in O_M$  und beschränkt,  $\alpha = 1, 2$  und sei  $\varphi \in D$ , dann ist  $h_\alpha(P) \varphi \in \Delta(X)$  für jedes  $i X \in \Gamma(g)$ . Falls weiter  $\text{supp } h_1 \cap \text{supp } h_2 = \emptyset$  dann gilt

$$h_1(P) X h_2(P) \varphi = h_2(P) X h_1(P) \varphi = 0 . \quad (31)$$

*Beweis:* Es sei  $g_2$  gemäss (29) aus  $h_2$  konstruiert. Offenbar ist dann  $\text{supp } h_1 \cap \text{supp } C(\mathcal{V}) g_2 = \emptyset$ , also ist  $h_1 C(\mathcal{V}) g_2 = 0$  und

$$h_1(P) X h_2(P) \varphi = (h_1 C(\mathcal{V}) g_2) (P) X (1 + \|P\|^2)^n \varphi = 0 .$$

## 5. Anwendung des Satzes

Zur Anwendung der Formel (31) benützen wir die

*Definition:* Zwei abgeschlossene Mengen  $\mathfrak{M}_\alpha \subset R^4$ ,  $\alpha = 1, 2$  heissen  $O_M$ -separiert, falls  $h_\alpha \in O_M$  so existieren, dass

1.  $0 \leq h_\alpha(k) \leq 1$ ,
2.  $h_\alpha(k) = 1$  falls  $k \in \mathfrak{M}_\alpha$ ,
3.  $\text{supp } h_1 \cap \text{supp } h_2 = \emptyset$ .

Nun ergibt (31) leicht den

*Satz:* Falls das Spektrum von  $P$ :  $\text{supp } dE$ , erfüllt  $\text{supp } dE \subset \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$  wobei  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$   $O_M$ -separiert sind, dann gilt für

$$E_\alpha = \int_{\mathfrak{M}_\alpha} dE(k) \quad (32)$$

$$E_\alpha \Gamma(g) = \Gamma(g) E_\alpha \quad (33)$$

für jedes  $g \in \mathfrak{G}$ .

*Beweis:* Seien  $h_\alpha$  die  $O_M$ -Funktionen zu den Mengen  $\mathfrak{M}_\alpha$  gemäss Definition, dann ist

$$E_\alpha = \int h_\alpha(k) dE(k) ,$$

also gilt nach (31)

$$E_1 X E_2 \varphi = E_2 X E_1 \varphi = 0 . \quad (34)$$

Ausserdem aber ist  $E_1 + E_2 = I$ , also

$$E_1 X \varphi = X E_1 \varphi. \quad (35)$$

Sei nun  $\psi \in \Delta(X)$  dann existiert nach IV' eine Folge  $\{\varphi_k, \varphi_k \in D\}$  für die  $\varphi_k \rightarrow \psi$  und  $X \varphi_k \rightarrow X \psi$  also  $E_1 X \varphi_k \rightarrow E_1 X \psi$  und demnach wegen (35) auch  $X E_1 \varphi_k \rightarrow E_1 X \psi$ . Daher ist  $E_1 \psi \in \Delta(X)$  und

$$E_1 X \psi = X E_1 \psi \quad (36)$$

oder

$$E_1 X \subset X E_1. \quad (37)$$

Diese letzte Formel ist aber notwendig und hinreichend dafür, dass  $E_1$  mit jeder Funktion von  $X$  vertauscht [8], dass also

$$E_1 e^{itX} = e^{itX} E_1, \quad t \in R^1 \quad (38)$$

richtig ist. Da  $\mathfrak{G}$  zusammenhängend ist, folgt (33).

Nun setzen wir, weil unser Resultat doch etwas mit Physik zu tun haben sollte, voraus, dass das Spektrum von  $P$  in  $\{0\} \cup V_+$  enthalten sei. Weiter sei

$$M = \sqrt{(P, P)} = \int \sqrt{(k, k)} dE(k) \quad (39)$$

der Massenoperator. Falls  $M$  einen *isolierten Eigenwert*  $m_1 > 0$  besitzt, dann zerfällt das Spektrum von  $P$  in das «Massenhyperboloid»  $\{k; k_0 > 0, (k, k) = m_1^2\}$  und den Rest. Das Massenhyperboloid ist aber, wie man leicht sieht, vom Rest des Spektrums  $O_M$ -separiert. Ist  $\mathfrak{H}_1$  der Eigenraum zu  $m_1$ , dann ist  $\mathfrak{H}_1$  invariant unter  $\Gamma(\mathfrak{G})$ . Eine Massenaufspaltung kann also nicht auftreten. Das ist der Satz, der in der Einleitung zitiert ist.

### Literaturverzeichnis

- [1] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Vol. I & II, Hermann, Paris 1957, 1959.
- [2] L. GÅRDING, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33, 331 (1947).
- [3] E. NELSON, *Lecture Notes*, Princeton University, 1964–1965.
- [4] N. I. ACHIEZER and I. M. GLASMANN, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie Verlag, Berlin 1965, § 46.
- [5] Ref. 1, Vol. II, p. 89.
- [6] Ref. 4, § 74.
- [7] Ref. 1, Vol. II, p. 99.
- [8] Ref. 4, § 75.