

# Versuch einer konsistenten Theorie eines Spin-2-Mesons

Autor(en): **Minkowski, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **39 (1966)**

Heft 6

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113701>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Versuch einer konsistenten Theorie eines Spin-2-Mesons

von **P. Minkowski**

Seminar für theoretische Physik, ETH Zürich

(7. VI. 66)

*Summary.* The electromagnetic interaction of a charged spin 2 meson is considered. Several canonical transformations of both the meson- and photon-field lead to an interaction representation. The Hamiltonian expressed by the interaction picture fields is a noncovariant power series in the charge. On the other hand the time-ordered products of the fields and their derivatives contain noncovariant terms of a  $\delta^{(4)}(x)$  type, which give rise to higher order vertices compensating the noncovariant contributions from the Hamiltonian. The latter is calculated in second order approximation and reduced to a simple form making use of covariant contractions. The multipole moments in nonrelativistic limit are obtained. The 'minimal coupling' admits a free parameter  $\alpha$  which corresponds to an anomalous magnetic moment ( $e$ : charge,  $M$ : meson mass,  $\vec{S}$ : meson spin).

$$\vec{\mu} = -\frac{\alpha}{2} \frac{e}{2M} \vec{S}$$

### Problemstellung

Die grundlegende Arbeit von M. FIERZ und W. PAULI [1]<sup>1)</sup> hat die Schwierigkeiten gezeigt, die bei höherem Spin infolge der auftretenden Nebenbedingungen entstehen.

P. A. M. DIRAC [2] hat für  $c$ -Zahlen den Hamiltonformalismus mit Nebenbedingungen diskutiert. Es besteht eine weitgehende Analogie zwischen  $c$ -Zahl- und  $q$ -Zahl-Theorie, die uns erlauben wird, die Resultate der genannten Arbeiten zu verwenden. Lediglich der Begriff der Nebenbedingung muss präzisiert werden. Wir wollen unter einer Nebenbedingung nicht eine Operatoridentität verstehen, sondern eine Funktion der Felder, die auf einem geeigneten Teilraum des betrachteten linearen Raums mit indefiniter Metrik verschwindet. Diese Definition der Nebenbedingung ist analog der von S. GUPTA [3] und K. BLEULER [4] eingeführten Methode zur Behandlung der Lorentzbedingung in einem Raum mit indefiniter Metrik.

Die Wechselwirkung von Teilchen mit Spin  $> 1$  wurde in neuerer Zeit im allgemeinen Rahmen kovarianter Streuamplituden untersucht, wobei nur Eigenschaften benutzt wurden, die von einem Modell unabhängig sind. M. JACOB und G. C. WICK [5] haben die Reduktion von Matrixelementen im Helizitätsformalismus beschrieben. K. HEPP [6] und D. WILLIAMS [7] gaben Entwicklungen einer kovarianten analyti-

---

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 506.

schen Funktion nach kovarianten Standardpolynomen an. D. ZWANZIGER [8] beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung von Teilchen mit Ruhmasse und beliebigem Spin. Unabhängig von einem Modell definiert er in Anlehnung an V. BARGMANN, L. MICHEL und V. L. TELEGDI [9] ein «minimal coupling», welches einem gyromagnetischen Verhältnis  $g = 2$  entspricht. Der universelle  $g$ -Faktor  $g = 2$  hat zur Folge, dass die Erwartungswerte von Spin und Impuls in einem konstanten äusseren elektromagnetischen Feld denselben Bewegungsgleichungen genügen. T. REGGE [10] hat für ein spezielles magnetisches Moment den Wirkungsquerschnitt für Coulombstreuung eines Spin 2 Mesons angegeben. Beim Übergang zur Wechselwirkungsdarstellung erhält REGGE einen invarianten Hamiltonoperator. Dieser erzeugt eine Streumatrix, die zunächst nicht lorentzinvariant ist, da die auftretenden  $T$ -Produkte neben kovarianten auch nichtkovariante Ausdrücke enthalten, die von einer raumartigen Oberfläche abhängen. H. UMEZAWA und Y. TAKAHASHI [11, 12, 13] haben gezeigt, dass  $\mathcal{H}_{INT}$  in der Wechselwirkungsdarstellung ebenfalls Oberflächenterme enthält, welche sich gegen die nichtkovarianten Beiträge der  $T$ -Produkte wegheben. Die Transformation von der Wechselwirkungs- in die Heisenbergdarstellung wird durch einen unitären Operator  $U(\sigma)$  vermittelt, der unter ad hoc eingeführten Voraussetzungen konstruiert werden kann.

T. D. LEE und C. N. YANG [14] haben die elektromagnetische Wechselwirkung eines Vektormesons mit beliebigem magnetischem Moment beschrieben. Dabei stellen sie der kanonischen Behandlung der Bewegungsgleichungen ein Limitierungsverfahren entgegen. Beide Methoden führen zu den gleichen Ergebnissen. Es gelingt ihnen, die genannten Kompensationen explizit abzugrenzen und zu zeigen, dass die Abweichungen des Hamiltonoperators von  $-\mathcal{L}_{INT}$  darauf zurückgeführt werden können, dass die Reihenfolge von Feldoperatoren in einem Produkt nicht festgelegt ist, was zu sogenannten «tadpoles» führt. Auch die Wechselwirkung eines Vektormesons mit einem Leptonstrom erfüllt die Voraussetzungen von UMEZAWA und TAKAHASHI, was direkt verifiziert werden kann. Mit Hilfe dieser Voraussetzungen ist es S. WEINBERG [15] möglich, eine Brücke zur invarianten Störungsrechnung zu schlagen und Feynmanregeln für Teilchen mit beliebigem Spin anzugeben.

In dieser Arbeit soll versucht werden, die elektromagnetische Wechselwirkung eines geladenen Spin-2-Mesons mit beliebigem magnetischem Moment als kanonische Theorie konsistent zu behandeln. Es gelingt, den Hamiltonoperator als Potenzreihe in  $e$  anzugeben und zugleich zur Wechselwirkungsdarstellung überzugehen. Darauf wird gezeigt, dass aus der Konstruktion der Wechselwirkungsdarstellung die Voraussetzungen auf natürliche Weise folgen, aus denen UMEZAWA und TAKAHASHI die Reduktion von  $\mathcal{H}_{INT}$  zu  $-\mathcal{L}_{INT}$  hergeleitet haben.

Es zeigt sich, dass der kanonische Formalismus der Bestimmung des Hamiltonoperators und der  $S$ -Matrix in der Wechselwirkungsdarstellung gemäss S. TOMONAGA [16] und J. SCHWINGER [17] einerseits, der Konstruktion einer unitären und kausalen  $S$ -Matrix nach E. C. G. STÜCKELBERG [18, 19] andererseits äquivalent ist.

Die Methoden, mit denen hier anhand der elektromagnetischen Wechselwirkung die Nebenbedingungen von Feldern zum Spin 2 behandelt werden, sind bei beliebigen Kopplungen, etwa an einen Strom stark wechselwirkender Teilchen, anwendbar. Hingegen bringt die Tatsache, dass es sich dabei um ein «nonderivative coupling» handelt, keine wesentliche Vereinfachung.

### Inhaltsangabe

In einem ersten Abschnitt wird aus der Lagrangedichte des freien Mesons mit der Masse  $M$  durch die Annahme eines «minimal coupling» die Lagrangedichte gewonnen, welche die elektromagnetische Wechselwirkung beschreiben soll. Die dazugehörigen Eulerschen Gleichungen haben 5 Nebenbedingungen zur Folge, welche die Berührungstransformation, die von der Lagrange- zur Hamiltondichte überführt, ausarten lassen.

Im zweiten Abschnitt wird die Lagrangefunktion durch eine neue ersetzt, so dass die neuen Bewegungsgleichungen mit 5 Nebenbedingungen verträglich sind und die Ausartung der Berührungstransformation aufgehoben wird. Setzt man die Nebenbedingungen gleich 0, so erhält man die alten Bewegungsgleichungen zurück. Drücken wir die Nebenbedingungen und ihre ersten Ableitungen nach der Zeit durch die kanonischen Variablen aus und gehen wir zur Hamiltonfunktion über, so können wir die Sätze von DIRAC [2] über den Hamiltonformalismus mit Nebenbedingungen benutzen.

Der Hamiltonoperator ist nur modulo Nebenbedingungen erklärt, und wir begnügen uns vorläufig mit einem beliebigen Repräsentanten. Daneben werden erzeugende Funktionale von kanonischen Transformationen angegeben.

Im dritten Abschnitt werden die Nebenbedingungen durch eine Reihe kanonischer Transformationen auf die Form gebracht, welche den freien Gleichungen entspricht. Dies ist der wichtigste und zugleich komplizierteste Teil der Reduktion von  $\mathcal{H}_{INT}$  zu  $-\mathcal{L}_{INT}$ . Aus der Konstruktion dieser Transformationen geht hervor, dass sie von der Wechselwirkung unabhängig ist.

Haben die Nebenbedingungen einmal die gewünschte Form, so wird im vierten Abschnitt der Übergang zur Wechselwirkungsdarstellung vollzogen, geleitet durch die Verhältnisse beim freien Meson. Es gelingt, einen ausgezeichneten Hamiltonoperator zu finden, der mit allen Nebenbedingungen vertauscht, wodurch das Verschwinden der letzteren aus entsprechenden Anfangsbedingungen folgt. Dabei erscheint der Zustandsraum, der eine indefinite Metrik trägt, in ein direktes Produkt  $R_1 \otimes R_2$  aufgespalten. Die Nebenbedingungen haben die Darstellung  $N = \mathbf{1} \otimes N^{(2)}$ . Der physikalische Teilraum  $\mathfrak{S}_P$  entspricht den Zustandsvektoren  $x \otimes \Omega_2$ , wobei  $x$  im Faktor  $R_1$  liegt und  $\Omega_2$  den Vakuumzustand im Faktor  $R_2$  bedeutet.  $\mathfrak{S}_P$  ist ein Hilbertraum, in welchem die Nebenbedingungen verschwinden.

Im fünften Abschnitt wird  $\mathcal{H}_{INT}$  in erster und zweiter Näherung diskutiert. Für den nichtrelativistischen Grenzfall werden die Multipolmomente berechnet. Das anomale magnetische Moment

$$\vec{\mu} = -\frac{\alpha}{2} \frac{e}{2M} \vec{S}$$

gibt zu keinen besonderen Schwierigkeiten Anlass, weshalb die Auszeichnung eines bestimmten  $g$ -Faktors im Gegensatz zum Falle des Elektrons sich nicht aufdrängt. Alle Multipolmomente bis zur Ordnung  $2^4$  hängen von den Parametern  $e, \alpha$  ab, weshalb nur zwei beliebig gewählt werden können. Die höheren Momente verschwinden. Die zweite Näherung gibt Anlass zu den genannten Kompensationen. Diese werden mit Hilfe der entsprechenden Feynmangraphen klassifiziert und für einen Spezialfall ausgerechnet.

Im sechsten Abschnitt wird schliesslich der Zusammenhang mit den Arbeiten von UMEZAWA und TAKAHASHI [11, 12, 13] hergestellt. Der kanonische Formalismus liefert auf natürliche Weise die Oberflächenterme im Hamiltonoperator, welche die nichtkovarianten Beiträge der zeitgeordneten Produkte kompensieren, wodurch garantiert wird, dass die unitäre und kausale Transformation

$$U(t_2, t_1) = T^* \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_{INT}(x) d^4x \right]$$

die zeitliche Entwicklung der Zustände in der Wechselwirkungsdarstellung beschreibt, die aus den Bewegungsgleichungen folgt. Dabei ist unter  $T^*$  die Operation der Zeitordnung zu verstehen, welche nur kovariante Kontraktionen berücksichtigt.

### Bezeichnungen und Definitionen

Elektromagnetische Potentiale	$A_\varrho$
Dazu kanonisch konjugierte Impulse	$\omega_\varrho$
Mesonfeld	$\psi_{\mu\nu} = \psi_{\nu\mu}$
Dazu kanonisch konjugierte Impulse	$\phi^{*\mu\nu} = \phi^{*\nu\mu}$
Elektromagnetische Feldstärken	$F_{\varrho\sigma} = -F_{\sigma\varrho} = \partial_\sigma A_\varrho - \partial_\varrho A_\sigma$

$$F_{\varrho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3.

Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

«Minimal coupling»:

Impuls

$$\begin{array}{ccc} p_\mu & \longrightarrow & p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \\ \downarrow & & \partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i e \frac{1}{\hbar c} A_\mu \\ \hbar i \partial_\mu & \longrightarrow & \hbar i \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \end{array}$$

$D_\mu$ : eichinvariante Ableitungen,

Bewegungsgleichungen einer Punktladung im elektromagnetischen Feld:

$$M \dot{u}^\mu = - \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad . : \text{Ableitung nach der Eigenzeit}$$

$$M u^\mu = p^\mu \quad M: \text{Masse des Teilchens}$$

$$\dot{p}^\mu = - \frac{e}{M c} F^{\mu\nu} p_\nu$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{elm} + \mathcal{L}_{Mat} + \mathcal{L}_{INT}$       $\mathcal{L}$  : Lagrangedichte für elektromagnetisches Feld und Materiefeld

$$\mathcal{L}_{elm} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

oder mit Hilfe der Lorentzbedingung:

$$\mathcal{L}_{elm} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$$

Wir wählen rationale Einheiten.

$$c = \hbar = 1$$

### A. Bewegungsgleichungen, Nebenbedingungen

Der Darstellung von G. WENTZEL [20] folgend suchen wir eine Lagrangedichte für das freie Meson der Masse  $M$ , aus deren Eulerschen Gleichungen die Nebenbedingungen  $\partial_\mu \psi^{\mu\nu} = 0$ ,  $\psi = \psi^\mu{}_\mu = 0$  folgen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Mat} = & \partial^\rho \psi^{*\mu\nu} \partial_\rho \psi_{\mu\nu} - 2 \partial^\mu \psi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \psi^{\rho\nu} \\ & + \partial^\nu \psi^* \partial^\mu \psi_{\mu\nu} + \partial^\mu \psi_{\mu\nu}^* \partial^\nu \psi - \partial^\nu \psi^* \partial_\nu \psi \\ & - M^2 [\psi^{*\mu\nu} \psi_{\mu\nu} - \psi^* \psi] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Aus A.1 folgen die Gleichungen und Nebenbedingungen:

$$(\square + M^2) \psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \psi^{\mu\nu} = 0, \quad \psi = 0$$

Die Nebenbedingungen sind notwendig, damit keine Teilchen mit dem Spin 1 oder 0 auftreten. Sind sie erfüllt, so ist ausserdem die Energie positiv definit. Die Bedingungen für  $\psi_{0i}$ :  $\partial_\nu \psi^{\nu i} = 0$  sind analog der Divergenzfreiheit der Vektorfelder in einer Theorie zum Spin 1.

$\partial_0 \psi_{00} + \partial^k \psi_{k0} = 0$  und  $\psi_{00} + \psi_n^n = 0$  zusammen mit  $(\square + M^2) \psi_{00} = 0$  führen zu der abgeleiteten Beziehung

$$\partial^k \partial^l (\psi_{lk} - g_{lk} \psi_n^n) - M^2 \psi_n^n = 0$$

Obschon diese Nebenbedingung den Anschein erweckt, nichtlokale Grössen in die Theorie zu bringen, ist dies wie wir sehen werden nicht der Fall. Auch wenn die Wechselwirkung einsetzt, bleiben alle Komponenten von  $\psi_{\mu\nu}$  zueinander lokal. Auf eine genauere Charakterisierung der Nebenbedingungen werden wir unter B. noch zurückkommen. Der Ausdruck  $-2 \partial^\mu \psi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \psi^{\rho\nu}$  ist für das freie Feld äquivalent  $-(1 + \alpha) \partial^\mu \psi_{\mu\nu}^* \partial_\rho \psi^{\rho\nu} - (1 - \alpha) \partial^\rho \psi^{*\mu\nu} \partial_\mu \psi_{\rho\nu}$ . Ersetzen wir  $\partial_\mu$  durch  $D_\mu = \partial_\mu + i e A_\mu$  nach dem Prinzip des «minimal coupling», so erhalten wir die folgende Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e, \alpha) = & -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + D^{*\rho} \psi^{*\mu\nu} D_\rho \psi_{\mu\nu} \\ & - (1 + \alpha) D^{*\mu} \psi_{\mu\nu}^* D_\rho \psi^{\rho\nu} - (1 - \alpha) D_\rho^* \psi_{\mu\nu}^* D^\mu \psi^{\rho\nu} \\ & + D^{*\nu} \psi^* D^\mu \psi_{\mu\nu} + D^{*\mu} \psi_{\mu\nu}^* D^\nu \psi - D^{*\nu} \psi^* D_\nu \psi \\ & - M^2 (\psi^{*\mu\nu} \psi_{\mu\nu} - \psi^* \psi). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Für die elektromagnetischen Potentiale soll eine Lorentzbedingung  $(\partial_\mu A^\mu)_+ |z\rangle_p = 0$  gelten für alle physikalischen Zustände  $|z\rangle_p$  ( $\partial_\mu A^\mu_+$ : positiver Frequenzteil von  $\partial_\mu A^\mu$ ).

$\mathcal{L}(e, \alpha)$  gibt Anlass zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} D^2 \psi_{\mu\nu} - \frac{1+\alpha}{2} (D_\mu D^e \psi_{e\nu} + D_\nu D^e \psi_{\mu e}) - \frac{1-\alpha}{2} (D^e D_\mu \psi_{e\nu} + D^e D_\nu \psi_{\mu e}) \\ + g_{\mu\nu} D^\alpha D^\beta \psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu) \psi - g_{\mu\nu} D^2 \psi + M^2 (\psi_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \psi) = 0 \\ \square A^\nu = j^\nu = -\mathcal{L}_{,A^\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Aus A.3 folgen die Nebenbedingungen:

$$N_\nu(e, \alpha) = D^\mu \psi_{\mu\nu} - D_\nu \psi - n_\nu(e, \alpha) = 0 \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \quad N_4(e, \alpha) = \psi - n_4(e, \alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} n_\nu = \frac{ie}{M^2} \left[ \begin{array}{l} \frac{3+\alpha}{2} F^{\mu e} D_e \psi_{\mu\nu} - \frac{3-\alpha}{2} F_\nu^e D^\mu \psi_{\mu e} \\ - \frac{1-\alpha}{2} (\partial^e F_\nu^\mu) \psi_{e\mu} + \frac{1+\alpha}{2} j^\mu \psi_{\mu\nu} \\ + \frac{3}{2} F_\nu^e D_e \psi - \frac{1}{2} j_\nu \psi \end{array} \right] \\ n_4 = \frac{2}{3M^4} \left[ \begin{array}{l} ie(1+\alpha) (\partial^\nu F^{\mu e}) D_e \psi_{\mu\nu} - \frac{3+\alpha}{2} e^2 F^{\mu e} F_\nu^e \psi_{\mu\nu} \\ + ie\alpha F^{\mu e} D_e D^\nu \psi_{\mu\nu} - ie(1-\alpha) j^e D^\mu \psi_{\mu e} \\ + ie\alpha (\partial^\nu j^\mu) \psi_{\mu\nu} + \frac{3e^2}{4} F^{e\nu} F_{\nu e} \psi + ie j^e D_e \psi \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Für  $e = 0$  erhält man aus A.3 und A.4 die Gleichungen des freien Mesonfeldes zurück:

$$\begin{aligned} \square \psi_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial^e \psi_{e\nu} + \partial_\nu \partial^e \psi_{\mu e}) + g_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \psi_{\alpha\beta} \\ + \partial_\mu \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \square \psi + M^2 (\psi_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \psi) = 0 \\ \square A^\nu = 0 \quad \partial_\mu \psi^{\mu\nu} = 0, \quad \psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Aus A.5 folgt schliesslich  $(\square + M^2) \psi_{\mu\nu} = 0$ .

## B. Kanonischer Formalismus, kanonische Transformationen, Hamiltonoperator

Die zu  $\mathcal{L}(e, \alpha)$  gehörende Legendretransformation ist auf Grund der Nebenbedingungen ausgeartet. Diese Ausartung wird aufgehoben, wenn wir  $\mathcal{L}$  durch  $\mathcal{L}'$  ersetzen.

$$\mathcal{L}'(e, \alpha) = \mathcal{L}(e, \alpha) + \sum_{s,t=0}^9 c_{st} N_s^* N_t \quad (\text{B.1})$$

$(N_5, \dots, N_9) = (\partial_0 N_0, \dots, \partial_0 N_4)$ ,  $c_{st} = c_{ts}^*$ ,  $c_{st}$ : Konstante.

Es ist konsistent, die Eulerschen Gleichungen zu  $\mathcal{L}'$  den Nebenbedingungen  $(N_0, \dots, N_9) = 0$  zu unterwerfen, denn für  $(N_0, \dots, N_9) = 0$  gehen die Gleichungen von  $\mathcal{L}'$  in diejenigen von  $\mathcal{L}$  über, und aus den letzteren folgt wiederum  $(N_0, \dots, N_9) = 0$ .

Wir bestimmen den zu  $\mathcal{L}'$  gehörenden Hamiltonoperator  $\mathcal{H}'$ . Die Felder  $\psi_{\mu\nu}$ ,  $\phi^{*\alpha\beta}$  und  $A_\rho$ ,  $\omega^\sigma$  seien kanonisch quantisiert.

$$[\psi_{\mu\nu}(x), \phi^{*\alpha\beta}(y)]_{x^0=y^0} = i \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad [A_\rho(x), \omega^\sigma(y)]_{x^0=y^0} = i \delta_\rho^\sigma \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{B.2})$$

alle andern Kommutatoren = 0

$$\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha)$$

Wir lösen die Variationsgleichungen:

$$\delta \int dt d^3x (\phi^{*\mu\nu} \dot{\psi}_{\mu\nu} + \dot{\psi}_{\mu\nu}^* \phi^{\mu\nu} - \mathcal{H}' - \nu^m N_m) = 0.$$

Die  $\nu^m$  sind Lagrangesche Multiplikatoren, die es gestatten, ohne Berücksichtigung der Nebenbedingungen zu variieren.

Wir fassen  $(\psi_{\mu\nu}, \phi_{\mu\nu}, A_\rho, \omega_\rho)$  zu einem Vektor  $X_\alpha$  zusammen. Es ergeben sich die folgenden kanonischen Gleichungen:

$$H' = \int_t d^3x \mathcal{H}' \quad \left[ H' + \sum_{m=0}^9 \int_{y^0} d^3x \nu^m N_m, X_\alpha(y) \right] = -i \partial_0 X_\alpha(y)$$

$$N_k = 0 \quad k = 0, 1, \dots, 9 \quad (\text{B.3})$$

In B.3 ist die Hamiltonfunktion nicht eindeutig bestimmt. Ändern wir  $\mathcal{H}'$  um Vielfache der Nebenbedingungen:

$$\mathcal{H}'' = \mathcal{H}' + \sum \lambda^m N_m$$

$\lambda^m$ : beliebige Funktionen der Felder

so erhalten wir die zu B.3 äquivalenten Gleichungen

$$\left[ H'' + \sum_{m=0}^9 \int_{y^0} d^3x (\nu^m - \lambda^m) N_m, X_\alpha(y) \right] = -i \partial_0 X_\alpha(y) \quad N_k = 0 \quad H'' = \int_t \mathcal{H}'' d^3x.$$

Der lineare Raum  $R$ , in welchem die Vertauschungsrelationen B.2 dargestellt werden, trägt eine indefinite Metrik;  $\psi_{\mu\nu}^*$  ist der bezüglich dieser Metrik zu  $\psi_{\mu\nu}$  konjugierte Operator. Wegen der Vertauschungsrelationen der Nebenbedingungen untereinander, können sie nicht identisch verschwinden. Es wird sich zeigen, dass  $R$  in ein direktes Produkt  $R_1 \otimes R_2$  zerfällt, wobei die Nebenbedingungen  $N_k = \mathbf{1} \otimes N_k^{(2)}$  auf den Faktorraum  $R_1$  nicht einwirken. Der physikalische Teilraum  $\mathfrak{H}_p$ , den wir betrachten wollen, besteht aus den Zustandsvektoren  $|Z\rangle_p = |Z_1 \otimes \Omega_2\rangle$ , wo  $\Omega_2$  der Vakuumzustand im Faktorraum  $R_2$  ist.  $\mathfrak{H}_p$  ist ein Hilbertraum.

Für  $|Z\rangle_p$  verschwinden die Nebenbedingungen, sobald  $\langle \Omega_2, N_k^{(2)}, \Omega_2 \rangle = 0$  ist:

$$\langle Z' | N_k | Z'' \rangle_p = \langle Z'_1 \otimes \Omega_2 | \mathbf{1} \otimes N_k^{(2)} | Z''_1 \otimes \Omega_2 \rangle = \langle Z'_1 | Z''_1 \rangle_1 \langle \Omega_2 | N_k^{(2)} | \Omega_2 \rangle_2 = 0.$$

Das hier verwendete Skalarprodukt entspricht der indefiniten Metrik:

$$\langle Z'_1 \otimes Z'_2 | Z_1 \otimes Z_2 \rangle = \ll Z'_1 \otimes Z'_2; \eta; Z_1 \otimes Z_2 \gg.$$

$\eta$ : hermitischer Operator,  $\ll \gg$  positiv definites Skalarprodukt in  $R$ . Wenn wir  $N_k = 0$  in der oben genannten Weise verstehen, lassen sich die Ergebnisse von DIRAC [2] auch auf die Gleichungen B.3 anwenden.



Es existiert unter den Operatoren  $\mathcal{H}' + \sum \lambda^m N_m$  ( $\lambda^m$ : beliebige Funktionen der Felder) ein ausgezeichneter Hamiltonoperator  $\mathcal{H}$ , der mit allen Nebenbedingungen vertauschbar ist.

$$[\mathcal{H}, N_k] = 0 \quad k = 0, 1, \dots, 9$$

Dann können die Gleichungen B.3 reduziert werden zu

$$H = \int_t d^3x \mathcal{H} \quad [H, X_\alpha(y)] = -i \partial_0 X_\alpha(y) \quad (\text{B.4})$$

Die Nebenbedingungen folgen aus den entsprechenden Anfangsbedingungen  $N_k(t=0) = 0$ .  $\mathcal{H}$  wird in  $D$  bestimmt werden.

Zunächst wählen wir einen Repräsentanten der Operatoren  $\mathcal{H}' + \sum \lambda^m N_m$  aus. Es genügt deshalb,  $X_\alpha$  modulo Nebenbedingungen anzugeben, was mit  $m(N)$  abgekürzt wird. Um  $\mathcal{H}$  zu bestimmen, wird es nötig sein, kanonische Transformationen auszuführen, d. h. solche, bei denen die Vertauschungsrelationen B.2 nicht geändert werden. Eine solche Transformation wird durch ein Funktional  $S$  erzeugt. Für  $S$  gibt es u. a. folgende Möglichkeiten:

$$S \begin{cases} \rightarrow S_1 = S_1(\psi, \phi', A, \omega') \\ \rightarrow S_2 = S_2(\psi', \phi, A', \omega) \end{cases}$$

$$\text{Für } S_1 \text{ gilt: } \psi' - \psi = \frac{\delta S_1}{\delta \phi^{*'}}; \quad \phi - \phi' = \frac{\delta S_1}{\delta \psi^*}$$

$$\text{Für } S_2: \quad \psi' - \psi = \frac{\delta S_2}{\delta \phi^*}; \quad \phi - \phi' = \frac{\delta S_2}{\delta \psi^{*'}}$$

$$\text{ausführlich geschrieben: } \psi'_{\mu\nu}(\bar{x}) - \psi_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\delta S_1}{\delta \phi^{\mu\nu*'}(\bar{x})}$$

entsprechende Formeln gelten für  $A' - A, \omega - \omega'$ .

$$K(X'_\alpha) = \int_t d^3x \mathcal{H} + \partial_0 S_2^1 \quad (\text{B.5})$$

Dabei bedeutet  $\delta/\delta\phi^{\mu\nu*'}(\bar{x})$  die Funktionalableitung nach  $\phi^{\mu\nu*'}(\bar{x})$ . Wir verfügen nun über die Konstanten  $c_{s,t}$  in B.1, indem wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + (D_0^* \psi^* - n_9^*) (D_0 \psi - n_9) \\ &+ (D^{*\mu} \psi_{\mu i}^* - D_i^* \psi^* - n_i^*) \times (D_e \psi^{e i} - D^i \psi - n^i) \\ &(n_9 = D_0 n_4) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Wenn wir mit  ${}^{(0)}\phi_{\mu\nu}$  die bezüglich  $\mathcal{L}'$  zu  $\psi^{*\mu\nu}$  konjugierten Impulse bezeichnen, folgt

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\phi_{\mu\nu} &= \mathcal{L}', \partial_0 \psi^{*\mu\nu} \\ {}^{(0)}\phi_{00} &= D_0 \psi - n_9 - \alpha D^k \psi_{k0} \\ {}^{(0)}\phi_{0i} &= D^e \psi_{ei} - D_i \psi - n_i - \frac{1+\alpha}{2} D^k \psi_{ki} + \frac{1}{2} D_i \psi_n^n + \frac{\alpha}{2} D_i \psi_{00} \\ {}^{(0)}\phi_{ik} &= D_0 (\psi_{ik} - g_{ik} \psi_n^n) - \frac{1-\alpha}{2} (D_i \psi_{0k} + D_k \psi_{0i}) + g_{ik} D^m \psi_{m0} \quad m(N) \\ \omega_e &= -\partial_0 A_e \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

*Kanonische Hilfsttransformation  ${}^{(0)}S$*

Eine kanonische Transformation  ${}^{(0)}S$  transformiert die Nebenbedingungen  $D_0\psi - n_9 = 0$  und  $D^\mu\psi_{\mu i} - D_i\psi - n_i = 0$  auf die Form  $\phi_{00} = 0, \phi_{0i} = 0$ .

$${}^{(0)}S = {}^{(0)}S(\psi, \phi', A, \omega') = \int d^3x {}^{(0)}S$$

$${}^{(0)}S = (\psi^{*0i} + \psi^{*i0}) \left[ -\frac{1+\alpha}{2} D^k\psi_{ki} + \frac{1}{2} D_i\psi_n^n + \frac{\alpha}{2} D_i\psi_{00} \right] + \text{h. c.} \quad (\text{B.8})$$

(h. c.: hermitisch konjugiert).

Es gelten die Transformationsgleichungen

$${}^{(0)}\phi_{00} - \phi_{00} = -\alpha D^k\psi_{k0}$$

$${}^{(0)}\phi_{0i} - \phi_{0i} = -\frac{1+\alpha}{2} D^k\psi_{ki} + \frac{1}{2} D_i\psi_n^n + \frac{\alpha}{2} D_i\psi_{00}$$

$${}^{(0)}\phi_{ik} - \phi_{ik} = \frac{1+\alpha}{2} (D_i\psi_{0k} + D_k\psi_{0i}) - g_{ik} D^n\psi_{n0}$$

$${}^{(0)}\omega_i - \omega_i = [-(1+\alpha) i e \psi_{ik} + i e g_{ik} \psi_n^n + i e \alpha g_{ik} \psi_{00}] \psi^{*0k} + \text{h. c.}$$

$${}^{(0)}\omega_0 = \omega_0 \quad (\text{B.9})$$

$\psi_{\mu\nu}$  und  $A_e$  bleiben unverändert. Wir beachten, dass auch für  $e = 0$ ,  ${}^{(0)}S$  ( $e = 0$ ) eine Transformation der  ${}^{(0)}\phi_{\mu\nu}$  bewirkt. Wir haben somit 5 Nebenbedingungen durch die kanonischen Variablen ausgedrückt:

$$N_i: \phi_{0i} = 0 \longleftrightarrow D^\mu\psi_{\mu i} - D_i\psi - n_i = 0$$

$$N_4: \psi - n_4 = 0$$

$$N_9: \phi_{00} = 0 \longleftrightarrow D_0\psi - n_9 = 0$$

Es gilt:

$$\phi_{ik} = D_0(\psi_{ik} - g_{ik}\psi_n^n) - (D_i\psi_{0k} + D_k\psi_{0i}) + 2g_{ik} D^n\psi_{n0}$$

$$D_0\psi_n^n = -\frac{1}{2}\phi_n^n + 2D^n\psi_{n0}$$

$$D_0\psi_{ik} = \phi_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}\phi_n^n + D_i\psi_{0k} + D_k\psi_{0i} \quad (\text{B.10})$$

$D^\mu\psi_{\mu 0} - D_0\psi - n_0$  geht über in  $1/2\phi_n^n - D^n\psi_{n0} - n_0$ . Die Gleichungen A.3 für  $\psi_{0\nu}$  liefern 4 weitere Nebenbedingungen. So erhalten wir die 10 Nebenbedingungen:

$$N_0: \frac{1}{2}\phi_n^n - D^n\psi_{n0} - n_0 = 0 \longleftrightarrow D^\mu\psi_{\mu 0} - D_0\psi - n_0 = 0$$

$$N_{1,2,3}: \phi_{0i} = 0 \longleftrightarrow D^\mu\psi_{\mu i} - D_i\psi - n_i = 0$$

$$N_4: \psi - n_4 = 0$$

$$N_5: D^i D^k (\psi_{ik} - g_{ik}\psi_n^n) - M^2 \psi_n^n + i e \alpha {}^{(0)}F^{0k} \psi_{0k} = 0$$

$$\uparrow \longrightarrow \partial_0 N_0 = 0$$

$$N_{6,7,8}: M^2 \psi_{0i} - \partial^k \phi_{ki} - p_i = 0 \longleftrightarrow \partial_0 N_{1,2,3} = 0$$

$$N_9: \phi_{00} = 0 \longleftrightarrow D_0\psi - n_9 = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} p_i(e, \alpha) = & i e A^k \phi_{ki} - \frac{i e}{2} {}^{(0)}F^{0k} (\psi_{ki} - g_{ki} \psi_n^n) + i e \frac{3-\alpha}{2} {}^{(0)}F_i{}^k \psi_{k0} \\ & + \frac{i e \alpha}{2} {}^{(0)}F_{0i} \psi_{00} - \frac{i e \alpha}{2} {}^{(0)}F^{0k} \psi_{ki} \end{aligned} \quad (\text{B.11a})$$

Dabei müssen wir beachten, dass  ${}^{(0)}F_{0i} = \partial_i A_0 + {}^{(0)}\omega_i$  ist, und sich von  $F_{0i} = \partial_i A_0 + \omega_i$  unterscheidet.

Die Lorentzbedingung  $(\omega_0 - \partial^k A_k)_+ | Z \rangle_p = 0$  hat sich unter  ${}^{(0)}S$  nicht geändert.

In B.11 kommen die Funktionen  $n_0, n_4, p_i$  vor. Die Argumente dieser Funktionen enthalten auch  $\psi_{0\nu}, \partial_0 \psi_{0\nu}$ . Diese können mit Hilfe von

$$D^\mu \psi_{\mu\nu} - D_\nu \psi - n_\nu = 0 \quad \psi - n_4 = 0 \quad M^2 \psi_{0i} - \partial^k \phi_{ki} - p_i = 0$$

durch  $\psi_{ik}, \psi_{ik}^*, \phi_{ik}, \phi_{ik}^*, A_\rho, \omega_\rho$  und räumlichen Ableitungen davon ausgedrückt werden. Durch sukzessives Ersetzen der obigen Argumente erhalten wir  $n_\nu, n_4, p_i$  als Potenzreihen in  $e$ , welche nur noch von  $\psi_{ik}, \psi_{ik}^*, \phi_{ik}, \phi_{ik}^*, A_\rho, \omega_\rho$  abhängen.

$N_0, \dots, N_9$  zerfallen in zwei Gruppen:  $(N_{1,2,3}, N_4, N_{6,7,8}, N_9)$  und  $(N_0, N_5)$ .

Die ersten acht Nebenbedingungen können dazu verwendet werden,  $\psi_{0\nu}, m(N)$  als abhängige Größen durch  $(\psi_{ik}, \phi_{ik}, A_\rho, \omega_\rho)$  auszudrücken, so wie beim Vektormeson  $U_0 = U_0(U_1, U_2, U_3, A_\rho, \omega_\rho)$  als abhängige Grösse behandelt werden kann ( $U_\mu$ : Feldoperatoren des Vektormesons).

$N_0, N_5$  können dazu dienen, die Spuren von  $\psi_{ik}, \phi_{ik}$  zu eliminieren

$$\begin{aligned} \psi_{ik} &= \chi_{ik} + \frac{1}{3} g_{ik} \psi_n^n; \quad \chi_n^n = 0 \\ \phi_{ik} &= \eta_{ik} + \frac{1}{3} g_{ik} \phi_n^n; \quad \eta_n^n = 0 \end{aligned}$$

$N_0, N_5$  können auf die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} N_0: \frac{M^2}{2} \phi_n^n - \partial^i \partial^k \phi_{ik} - k &= 0 \\ N_5: \partial^i \partial^k (\psi_{ik} - g_{ik} \psi_n^n) - M^2 \psi_n^n + f &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{M^2}{2} + \frac{\Delta}{3}\right) \phi_n^n &= \partial^i \partial^k \eta_{ik} + k \\ \left(\frac{2}{3} \Delta - M^2\right) \psi_n^n &= -\partial^i \partial^k \chi_{ik} + f \\ f &= 2 i e A^k \partial^i (\psi_{ik} - g_{ik} \psi_n^n) + i e \partial^i A^k (\psi_{ik} - g_{ik} \psi_n^n) \\ &\quad - e^2 A^i A^k (\psi_{ik} - g_{ik} \psi_n^n) + i e \alpha {}^{(0)}F^{0k} \psi_{0k} \\ k &= i e M^2 A^n \psi_{n0} + \partial_n p^n + M^2 n_0 \end{aligned} \quad (\text{B.12a})$$

$\psi_n^n, \phi_n^n$  können als Raumintegrale dargestellt werden

$$\begin{aligned} \psi_n^n(\vec{x}) &= \int \varrho_1(\vec{x}, \vec{y}) [-\partial_{yi} \partial_{yk} \chi^{ik}(\vec{y}) + f(\vec{y})] d^3y \\ \phi_n^n(\vec{x}) &= \int \varrho_2(\vec{x}, \vec{y}) [\partial_{yi} \partial_{yk} \eta^{ik}(\vec{y}) + k(\vec{y})] d^3y \end{aligned}$$

$\varrho_1, \varrho_2$  sind geeignet gewählte Funktionen von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ . Dabei scheint es, dass die Felder nichtlokalen Charakter bekommen. Diese Schwierigkeit besteht auch für  $e = 0$ , wobei aber das freie Feld keineswegs nichtlokal ist. Wir werden die in B.12 sich aufdrängende Elimination nicht ausführen, sondern unter C die Nebenbedingungen so umformen, dass sie mit denjenigen für  $e = 0$  übereinstimmen.

Der Hamiltonoperator hat modulo  $N_k$  die Form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}' &= {}^{(0)}\phi^{*\mu\nu} \partial_0 \psi_{\mu\nu} + \partial_0 \psi^{*\mu\nu} {}^{(0)}\phi_{\mu\nu} + {}^{(0)}\omega^e \dot{A}_e - \mathcal{L}' m(N) \\
\mathcal{H}' &= -\frac{1}{2} \omega^\nu \omega_\nu + \frac{1}{2} \partial^k A^\nu \partial_k A_\nu + \phi^{*ik} \phi_{ik} - \frac{1}{2} \phi_n^n \phi_m^m \\
&\quad - 2 [(\partial^i \phi_{ik}^*) \psi^{0k} + \text{h.c.}] + 2 M^2 \psi^{*0i} \psi_{0i} \\
&\quad - \partial^k \psi_n^{*n} \partial_k \psi_m^m - \partial^k \psi^{*nm} \partial_k \psi_{nm} + 2(\partial^k \psi_{ki}^*) (\partial_m \psi^{mi}) \\
&\quad + M^2 (\psi_n^{*n} \psi_m^m - \psi^{*ik} \psi_{ik}) \\
&\quad + 2ie A^i [\phi_{ik}^* \psi^{0k} - \text{h.c.}] + ie(3 - \alpha) F^{ik} \psi_{0k}^* \psi_{0i} \\
&\quad + ie(1 - \alpha) F^{ni} (\psi_{ik}^* \psi_n^k) + ie(1 + \alpha) F_{0k} [\psi_{0i}^* \psi^{ki} - \text{h.c.}] \\
&\quad + ie A_0 (\psi_{ik}^* \phi^{ik} - \text{h.c.}) - ie(1 - \alpha) F_{0k} [\psi^{*0k} \psi_n^n - \text{h.c.}] \\
&\quad - 2ie A^k [\psi_{ki}^* \partial_n \psi^{ni} - \text{h.c.}] + ie A^k [\psi_n^{*n} \partial_k \psi_m^m - \text{h.c.}] \\
&\quad \quad \quad + ie A^k [\psi^{*mn} \partial_k \psi_{mn} - \text{h.c.}] \\
&\quad - \frac{1}{2} ({}^{(0)}\omega_i - \omega_i) ({}^{(0)}\omega^i - \omega^i) - e^2 A^k A_k \psi_m^{*m} \psi_m^m \\
&\quad - e^2 A^n A_n \psi^{*ik} \psi_{ik} + 2e^2 A^k A^n \psi_{ki}^* \psi_n^i \quad m(N)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

### C. Transformation der Nebenbedingungen

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, durch kanonische Transformationen zu neuen Größen  $\bar{X}_\alpha$  überzugehen, so dass die Nebenbedingungen  $N_0, \dots, N_9$  durch  $\bar{X}_\alpha$  ausgedrückt die gleiche Gestalt haben wie diejenigen des freien Feldes [ $N_k (e = 0)$ ], wobei die Lorentzbedingung unverändert bleibt.

$$\omega_0 - \partial^k A_k \longleftrightarrow \bar{\omega}_0 - \partial^k \bar{A}_k$$

Dies hat zwei Gründe: Erstens ist eine Wechselwirkungsdarstellung nur möglich, falls die Nebenbedingungen diejenigen des freien Feldes sind. Zweitens wird es in  $D$  gelingen, die  $\psi^m$  in B.3 zu bestimmen, wobei die freie Form der Nebenbedingungen wesentlich ist.

Die auftretenden kanonischen Transformationen können nur rekursiv als Potenzreihe in  $e$  angegeben werden. Wir zeigen zuerst, dass  $N_5$  in  $L$  Schritten auf die gewünschte Form gebracht werden kann, wenn Terme höherer als  $L$ -ter Ordnung vernachlässigt werden. Dann genügt ein Schritt, um  $N_0$  zu transformieren und ein weiterer, um  $N_{1,2,3}, N_4, N_{6,7,8}, N_9$  umzuwandeln.

Die Transformationen erfolgen nach dem Schema

$$\begin{aligned}
N_0: \quad \frac{M^2}{2} \bar{\phi}_n^n - \partial^n \partial^m \bar{\phi}_{nm} &= 0 \longleftrightarrow \frac{M^2}{2} \phi_n^n - \partial^n \partial^m \phi_{nm} - k = 0 \\
N_{1,2,3}: \quad \bar{\phi}_{0i} &= 0 \longleftrightarrow \phi_{0i} = 0 \\
N_4: \quad \bar{\psi} &= 0 \longleftrightarrow \psi - n_4 = 0 \\
N_5: \quad \partial^i \partial^k (\bar{\psi}_{ik} - g_{ik} \bar{\psi}_n^n) - M^2 \bar{\psi}_n^n &= 0 \longleftrightarrow \partial^i \partial^k (\psi_{ik} - g_{ik} \psi_n^n) \\
&\quad - M^2 \psi_n^n + f = 0 \\
N_{6,7,8}: \quad M^2 \bar{\psi}_{0i} - \partial^k \bar{\phi}_{ki} &= 0 \longleftrightarrow M^2 \psi_{0i} - \partial^k \phi_{ki} - p_i = 0 \\
N_9: \quad \bar{\phi}_{00} &= 0 \longleftrightarrow \phi_{00} = 0
\end{aligned} \tag{C.1}$$

a) *Reduktion von  $N_5$*

$$\begin{aligned} \partial^i \partial^k (\psi_{ik} - g_{ik} \psi_n^n) - M^2 \psi_n^n + \sum_{k=1}^{\infty} e^k F_k \\ \updownarrow \\ \partial^i \partial^k [{}^{(L)}\psi_{ik} - g_{ik} {}^{(L)}\psi_n^n] - M^2 {}^{(L)}\psi_n^n + \sum_{k=L+1}^{\infty} e^k {}^{(L)}F_k \end{aligned}$$

Wir beweisen die Behauptung, dass die Transformation möglich ist, durch Induktion nach  $L$ . Für  $L = 0$  hat  $N_5$  die gewünschte Gestalt, so dass die Induktion für  $L = 0$  verankert ist. Es seien also  $N_0, N_5$  auf die Form gebracht:

$$\begin{aligned} N_5: \partial^i \partial^k [{}^{(L-1)}\psi_{ik} - g_{ik} {}^{(L-1)}\psi_n^n] - M^2 {}^{(L-1)}\psi_n^n \\ + e^{L(L-1)} F_L + e^{L+1(L-1)} F_{L+1} + \dots \\ N_0: \left[ \frac{M^2}{2} g^{ik} - \partial^i \partial^k \right] {}^{(L-1)}\phi_{ik} = e^{(L-1)} K_1 + e^{2(L-1)} K_2 + \dots \quad (C.2) \end{aligned}$$

Wir wählen als erzeugendes Funktional der kanonischen Transformation

$$\begin{aligned} {}^{(L)}S &= {}^{(L)}S [{}^{(L-1)}\phi, {}^{(L)}\psi, {}^{(L-1)}\omega, {}^{(L)}A] = \int d^3x {}^{(L)}S \\ {}^{(L)}S &= e^L \left\{ \left[ \frac{M^2}{2} g^{ik} - \partial^i \partial^k \right] {}^{(L-1)}\phi_{ik}^* \right\} P + \text{h.c.} \\ P &= P [{}^{(L-1)}\phi, {}^{(L)}\psi, {}^{(L-1)}\omega, {}^{(L)}A] \quad (C.3) \end{aligned}$$

${}^{(L)}S$  erzeugt modulo  $N_k$  die Transformation

$$\begin{aligned} {}^{(L)}\psi_{ik} - {}^{(L-1)}\psi_{ik} &= e^L \left[ \frac{M^2}{2} g_{ik} - \partial_i \partial_k \right] P + e^{L+1(L-1)} K_1^* \frac{\delta P}{\delta^{(L-1)} \phi^*_{ik}} \\ &+ e^{L+1(L-1)} K_1 \frac{\delta P^*}{\delta^{(L-1)} \phi^*_{ik}} + e^{L+2} (\dots) \\ {}^{(L-1)}\phi_{ik} - {}^{(L)}\phi_{ik} &= e^{L+1(L-1)} K_1^* \frac{\delta P}{\delta^{(L)} \psi^*_{ik}} + e^{L+1(L-1)} K_1 \frac{\delta P^*}{\delta^{(L)} \psi^*_{ik}} + e^{L+2} (\dots) \\ {}^{(L)}A_\varrho - {}^{(L-1)}A_\varrho &= e^{L+1(L-1)} K_1^* \frac{\delta P}{\delta^{(L-1)} \omega^\varrho} + e^{L+1(L-1)} K_1 \frac{\delta P^*}{\delta^{(L-1)} \omega^\varrho} + e^{L+2} (\dots) \\ {}^{(L-1)}\omega_\varrho - {}^{(L)}\omega_\varrho &= e^{L+1(L-1)} K_1^* \frac{\delta P}{\delta^{(L)} A^\varrho} + e^{L+1(L-1)} K_1 \frac{\delta P^*}{\delta^{(L)} A^\varrho} + e^{L+2} (\dots) \\ {}^{(L)}\psi_{0\nu} &= {}^{(L-1)}\psi_{0\nu}, {}^{(L)}\phi_{0\nu} = {}^{(L-1)}\phi_{0\nu} \quad m(N) \quad (C.4) \end{aligned}$$

Unter  $K_1 \delta P^* / \delta \psi^*_{ik}$  ist eine symbolische Schreibweise verstanden. Hängt z. B.  $P^*$  auch von  $\partial_m \psi^*_{ik}$  ab, so enthält  $K_1 \delta P^* / \delta \psi^*_{ik}$  den Term  $-\partial_m \{K_1 \delta P^* / \delta \partial_m \psi^*_{ik}\}$ .

Die Glieder der Ordnung  $L+1, \dots$  brauchen wir nicht explizit zu kennen. Dadurch wird C.4 reduziert zu

$$\begin{aligned} {}^{(L)}\psi_{ik} - {}^{(L-1)}\psi_{ik} &= e^L \left( \frac{M^2}{2} g_{ik} + \partial_i \partial_k \right) P + e^{L+1} {}^{(L)}\Pi_{ik} \\ {}^{(L-1)}\phi_{ik} - {}^{(L)}\phi_{ik} &= e^{L+1} {}^{(L)}\Theta_{ik} \\ {}^{(L)}A_\varrho - {}^{(L-1)}A_\varrho &= e^{L+1} {}^{(L)}a_\varrho \\ {}^{(L-1)}\omega_\varrho - {}^{(L)}\omega_\varrho &= e^{L+1} {}^{(L)}b_\varrho \\ {}^{(L)}\psi_{0\nu} &= {}^{(L-1)}\psi_{0\nu}; {}^{(L)}\phi_{0\nu} = {}^{(L-1)}\phi_{0\nu} \quad m(N) \quad (C.5) \end{aligned}$$

Dabei ist  $P$  noch völlig willkürlich. Ersetzen wir  $(L-1)\psi$  in  $N_5$  gemäss C.5 so folgt

$$N_5: \partial^i \partial^k [(L)\psi_{ik} - g_{ik} (L)\psi_n^n] - M^2 (L)\psi_n^n + e^L (L-1) F_L ((L-1)\phi, (L-1)\psi, (L-1)A, (L-1)\omega) \\ + e^L \frac{3M^4}{2} P ((L)\psi, (L-1)\phi, (L)A, (L-1)\omega) + e^{L+1} [\dots] = 0 \quad (C.6)$$

Wir sehen, dass die Argumente von  $(L-1)F_L$  und  $P$  nicht übereinstimmen. Aber der Unterschied zwischen  $(L-1)F_L((L)\psi, (L-1)\phi, (L)A, (L-1)\omega)$  und  $(L-1)F_L((L-1)\psi, (L-1)\phi, (L-1)A, (L-1)\omega)$  ist von der Ordnung  $e^L$ , so dass sich dieser Unterschied erst in höheren Ordnungen als  $L$  auswirkt. Wir wählen deshalb

$$P((L)\psi_{ik} (L-1)\phi_{ik}, \dots) = -\frac{2}{3M^4} (L-1)F_L ((L)\psi_{ik}, (L-1)\phi_{ik}, \dots) \quad (C.7)$$

Dadurch gehen die Nebenbedingungen  $N_0, N_5$  über in:

$$N_5: \partial^i \partial^k ((L)\psi_{ik} - g_{ik} (L)\psi_n^n) - M^2 (L)\psi_n^n + e^{L+1} (L)F_{L+1} + e^{L+2} (L)F_{L+2} + \dots = 0 \\ N_0: \left[ \frac{M^2}{2} g^{ik} - \partial^i \partial^k \right] (L)\phi_{ik} = e^{(L)}K_1 + e^{2(L)}K_2 + \dots \quad \text{q. e. d.} \quad (C.8)$$

b) *Reduktion von  $N_0$*

$$\left( \frac{M^2}{2} g^{ik} - \partial^i \partial^k \right) (L)\phi_{ik} = (L)k \\ \updownarrow \\ \left( \frac{M^2}{2} g^{ik} - \partial^i \partial^k \right) (L+1)\phi_{ik} = 0$$

Wir vernachlässigen jetzt Terme der Ordnung  $L+1, \dots$  Es gilt

$$N_5: \partial^i \partial^k ((L)\psi_{ik} - g_{ik} (L)\psi_n^n) - M^2 (L)\psi_n^n = 0$$

Wir wählen das erzeugende Funktional

$$(L+1)S = (L+1)S((L+1)\psi, (L)\phi, (L+1)A, (L)\omega) \quad (L+1)S = \int d^3x (L+1)s \\ (L+1)S = \{ \partial^i \partial^k ((L+1)\psi_{ik}^* - g_{ik} (L+1)\psi_n^{*n}) - M^2 (L+1)\psi_n^{*n} \} Q + \text{h. c.} \quad (C.9)$$

Als neue Nebenbedingung  $N_5$  setzen wir

$$N_5: \partial^i \partial^k ((L+1)\psi_{ik} - g_{ik} (L+1)\psi_n^n) - M^2 (L+1)\psi_n^n = 0 \quad (C.10)$$

Dies hat zur Folge, dass  $(L+1)\psi_{ik} = (L)\psi_{ik}$  ist  $m(N)$ , woraus man ersieht, dass C.10 konsistent ist.

$(L+1)S$  erzeugt die Transformation:

$$(L+1)\psi_{ik} = (L)\psi_{ik} \\ (L)\phi_{ik} - (L+1)\phi_{ik} = \{ \partial_i \partial_k + g_{ik} (\Delta - M^2) \} Q \\ (L+1)A_\rho = (L)A_\rho \\ (L)\omega_\rho = (L+1)\omega_\rho \\ (L+1)\psi_{0\nu} = (L)\psi_{0\nu} \\ (L)\phi_{0\nu} = (L+1)\phi_{0\nu} \quad m(N) \quad (C.11)$$

Ersetzen wir in  $N_0$   ${}^{(L)}\phi_{ik}$  durch  ${}^{(L+1)}\phi_{ik}$ , so folgt

$$\left(\frac{M^2}{2} g^{ik} - \partial^i \partial^k\right) {}^{(L+1)}\phi_{ik} = \frac{3}{2} M^4 Q({}^{(L+1)}\psi, {}^{(L)}\phi, {}^{(L+1)}A, {}^{(L)}\omega) \\ + {}^{(L)}k({}^{(L)}\psi, {}^{(L)}\phi, {}^{(L)}A, {}^{(L)}\omega)$$

Wegen C.11 sind die Argumente von  $Q$  und  ${}^{(L)}k$  modulo  $N_k$  gleich. Deshalb wählen wir

$$Q = -\frac{2}{3 M^4} {}^{(L)}k({}^{(L+1)}\psi_{ik}, {}^{(L)}\phi_{ik}, {}^{(L+1)}A_e, {}^{(L)}\omega_e) \quad (\text{C.12})$$

c) *Reduktion von  $N_{1,2,3}, N_4, N_{6,7,8}, N_9$*

$${}^{(L+1)}\psi - {}^{(L+1)}n_4 = 0 \longleftrightarrow {}^{(L+2)}\psi = 0$$

$$M^2 {}^{(L+1)}\psi_{0i} - \partial^k {}^{(L+1)}\phi_{ki} - {}^{(L+1)}p_i = 0 \longleftrightarrow M^2 {}^{(L+2)}\psi_{0i} - \partial^k {}^{(L+2)}\phi_{ki} = 0$$

Sei

$${}^{(L+2)}S = {}^{(L+2)}S({}^{(L+2)}\phi, {}^{(L+1)}\psi, {}^{(L+2)}\omega, {}^{(L+1)}A)$$

$${}^{(L+2)}S = \int d^3x {}^{(L+2)}s$$

$${}^{(L+2)}s = {}^{(L+2)}\phi_{0\nu}^* T^\nu + \text{h. c.} \quad (\text{C.13})$$

Wie in b) setzen wir als neue Nebenbedingungen

$${}^{(L+2)}\phi_{0\nu} = 0$$

Daraus folgt  ${}^{(L+2)}\phi_{0\nu} = {}^{(L+1)}\phi_{0\nu} m(N)$ .

${}^{(L+2)}S$  erzeugt die Transformation:

$${}^{(L+2)}\psi_{00} - {}^{(L+1)}\psi_{00} = T_0$$

$${}^{(L+2)}\psi_{0i} - {}^{(L+1)}\psi_{0i} = T_i$$

$${}^{(L+2)}\psi_{ik} = {}^{(L+1)}\psi_{ik}$$

$${}^{(L+2)}\phi_{\mu\nu} = {}^{(L+1)}\phi_{\mu\nu}$$

$${}^{(L+2)}A_e = {}^{(L+1)}A_e$$

$${}^{(L+2)}\omega_e = {}^{(L+1)}\omega_e \quad m(N) \quad (\text{C.14})$$

Setzen wir  $T_0 = -{}^{(L+1)}n_0$

$$T_i = -\frac{1}{M^2} {}^{(L+1)}p_i$$

so erfüllen die  ${}^{(L+2)}\psi_{0\nu}$  die Nebenbedingungen

$${}^{(L+2)}\psi_{00} + {}^{(L+2)}\psi_n^n = 0$$

$$M^2 {}^{(L+2)}\psi_{0i} - \partial^k {}^{(L+2)}\phi_{ki} = 0$$

Dabei haben wir die Nebenbedingungen  $N_0, \dots, N_9$  auf die gewünschte Form gebracht.

$$\bar{X}_\alpha = ({}^{(L+2)}\psi, {}^{(L+2)}\phi, {}^{(L+2)}A, {}^{(L+2)}\omega)$$

$$N_0: \frac{M^2}{2} \bar{\phi}_n^n - \partial^n \partial^m \bar{\phi}_{nm} = 0$$

$$N_{1,2,3}: \bar{\phi}_{0i} = 0$$

$$N_4: \bar{\psi} = 0$$

$$N_5: \partial^i \partial^k (\bar{\psi}_{ik} - g_{ik} \bar{\psi}_n^n) - M^2 \bar{\psi}_n^n = 0$$

$$N_{6,7,8}: M^2 \bar{\psi}_{0i} - \partial^k \bar{\phi}_{ki} = 0$$

$$N_9: \bar{\phi}_{00} = 0 \quad (\text{C.15})$$

In den Funktionen  $P, Q, T$ , kommen  $\omega_i$  und  $A_0$  nur in der eichinvarianten Kombination  $F_{0i} = \partial_i A_0 + \omega_i$  vor. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A'_i - A_i &= \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta F_{0i}}; & \omega_0 - \omega'_0 &= -\partial^i \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta F_{0i}} \\ \partial^i (A'_i - A_i) - (\omega'_0 - \omega_0) &= 0 \\ &\updownarrow \\ 0 &= \partial_i A'_i - \omega'_0 \longleftrightarrow \partial_i A^i - \omega_0 = 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Lorentzbedingung durch die kanonischen Transformationen ihre Gestalt nicht ändert.

*Berechnung der Transformationen bis zur zweiten Näherung*

Das unter a), b), c) vorgelegte Programm führen wir bis zur zweiten Ordnung in  $e$  durch. Wir geben nur die Resultate der etwas verwickelten Rechnung:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{mn} - \psi_{mn} &= -e \frac{2}{3 M^4} \left( \frac{M^2}{2} g_{mn} - \partial_m \partial_n \right) F_1(\bar{\psi}, \bar{\phi}, \bar{A}, \bar{\omega}) \\ &- e^2 \frac{2}{3 M^4} \left( \frac{M^2}{2} g_{mn} - \partial_m \partial_n \right) \left[ \begin{aligned} &-\frac{F_1}{e} (\bar{\psi} - \psi, \bar{\phi} - \phi, \bar{A}, \bar{\omega}) + F_2 \\ &-\partial^i \partial^k (\Pi_{ik} - g_{ik} \Pi_n^n) + M^2 \Pi_n^n \end{aligned} \right] \\ &+ e^2 \Pi_{mn} \\ \bar{\phi}_{mn} - \phi_{mn} &= -\frac{2}{3 M^4} e [\partial_m \partial_n + g_{mn} (\Delta - M^2)] K_1(\bar{X}_\alpha) \\ &- \frac{2}{3 M^4} e^2 [\partial_m \partial_n + g_{mn} (\Delta - M^2)] \left[ \begin{aligned} &-\frac{K_1}{e} (\bar{\psi} - \psi, \bar{\phi} - \phi, \bar{A}, \bar{\omega}) \\ &+ K_2 \\ &-\left(\frac{M^2}{2} g^{ik} - \partial^i \partial^k\right) \Theta_{ik} \end{aligned} \right] \\ &+ e^2 \Theta_{mn} \end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned} M^2 (\bar{\psi}_{0i} - \psi_{0i}) &= -e \left( P_{i_1} + \frac{2}{3 M^2} \partial_i K_1 \right) + e^2 [\dots] \\ \bar{A}_i - A_i &= e^2 \frac{2 i \alpha}{3 M^4} [\bar{\psi}_{0i}^* K_1 - \text{h.c.}] + e^3 [\dots] \\ \omega_0 - \bar{\omega}_0 &= -e^2 \frac{2 i \alpha}{3 M^4} [\partial_k (\bar{\psi}^{*0k} K_1) - \text{h.c.}] \\ \omega_i - \bar{\omega}_i &= e^2 \frac{2 i \alpha}{3 M^4} \left\{ \begin{aligned} &2 [\partial^k (\bar{\psi}_{ki}^* - g_{ki} \bar{\psi}_n^{*n})] K_1 - \text{h.c.} \\ &-\partial^k \{ (\bar{\psi}_{ki}^* - g_{ki} \bar{\psi}_n^{*n}) K_1 \} + \text{h.c.} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \tag{C.16a}$$

$\bar{\psi}_{0\nu}$  wird im weiteren nur in erster Näherung gebraucht. Es bedeuten  $F_1, K_1, \Pi_{mn}, \Theta_{mn}, P_{i_1}$  das Folgende:

$$\begin{aligned} F_1 &= i [2 \bar{A}^k \partial^i (\bar{\psi}_{ik} - g_{ik} \bar{\psi}_n^n) + (\partial^i \bar{A}^k) (\bar{\psi}_{ik} - g_{ik} \bar{\psi}_n^n) + \alpha \bar{F}^{0k} \psi_{0k}] \\ K_1 &= i \left[ \begin{aligned} &2 M^2 \bar{A}^n \bar{\psi}_{n0} + (\partial^i \bar{A}^k) \bar{\phi}_{ik} - (1 + \alpha) \bar{F}^{0k} \partial_k \bar{\psi}_n^n \\ &-\partial_0 (\bar{F}^{0m} \bar{\psi}_{0m}) + \alpha \bar{F}^{mk} \partial_k \bar{\psi}_{m0} - \alpha (\partial_i \bar{F}^{0k}) \bar{\psi}_{ki} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Pi_{mn} &= -i \frac{\alpha}{3 M^4} [\partial_m(K_1 \bar{F}_{0n}) + \partial_n(K_1 \bar{F}_{0m})] \\ \Theta_{mn} &= i \frac{2}{3 M^4} \left[ \begin{array}{l} - \{ \partial_m(K_1 \bar{A}_n) + \partial_n(K_1 \bar{A}_m) \} \\ + \frac{1}{2} (\partial_m \bar{A}_n + \partial_n \bar{A}_m) K_1 \\ + 2 g_{mn} \partial_i(\bar{A}^i K_1) \\ - g_{mn}(\partial_i \bar{A}^i) K_1 \end{array} \right] \\ P_i &= i \left[ \bar{A}^k \bar{\phi}_{ki} - \frac{1+\alpha}{2} \bar{F}^{0k} \bar{\psi}_{ki} + \frac{1-\alpha}{2} \bar{F}_{0i} \bar{\psi}^n + \frac{3-\alpha}{2} \bar{F}_i^k \bar{\psi}_{0k} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Zum Schluss dieses Abschnitts transformieren wir den Hamiltonoperator  $\mathcal{H}'$  auf die Felder  $\bar{X}_\alpha$ .

Bei der Rechnung stellt sich heraus, dass wir  $\bar{\psi}_{mn} - \psi_{mn}$ ,  $\bar{\phi}_{mn} - \phi_{mn}$  vereinfachen können, da die Terme

$$\begin{aligned} &- e^2 \frac{2}{3 M^4} \left[ \frac{M^2}{2} g_{mn} - \partial_m \partial_n \right] (\dots) \quad \text{und} \\ &- e^2 \frac{2}{3 M^4} [\partial_m \partial_n + g_{mn} (\Delta - M^2)] (\dots) \end{aligned}$$

in der betrachteten Näherung keine Änderung von  $\mathcal{H}'$  bewirken. Aus dem gleichen Grunde brauchen wir  $K_2$  und  $F_2$  für die zweite Näherung nicht zu kennen.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= -\frac{1}{2} \bar{\omega}^v \bar{\omega}_v + \frac{1}{2} \partial^k \bar{A}^v \partial_k \bar{A}_v + \bar{\phi}^{*ik} \bar{\phi}_{ik} - \frac{1}{2} \bar{\phi}^{*n} \bar{\phi}_m^m \\ &+ 2 M^2 \bar{\psi}^{*0i} \bar{\psi}_{0i} - 2 [\partial^i \bar{\phi}_{ik}^* \bar{\psi}^{0k} + \text{h.c.}] \\ &- \partial^k \bar{\psi}_n^{*n} \partial_k \bar{\psi}_m^m - \partial^k \bar{\psi}^{*mn} \partial_k \bar{\psi}_{mn} + 2 \partial^k \bar{\psi}_{ki}^* \partial_n \bar{\psi}^{ni} \\ &+ M^2 (\bar{\psi}^{*mn} \bar{\psi}_{mn} - \bar{\psi}_n^{*n} \bar{\psi}_m^m) \\ &+ 2 i e \bar{A}^i [\bar{\phi}_{ik}^* \bar{\psi}^{0k} - \text{h.c.}] + (3 - \alpha) i e \bar{F}^{ik} \bar{\psi}_{0k}^* \bar{\psi}_{0i} \\ &- i e (1 - \alpha) \bar{F}^{ni} \bar{\psi}_{ik}^* \bar{\psi}_n^k + i e (1 - \alpha) \bar{F}_{0k} [\bar{\psi}^{*0k} \bar{\psi}_n^n - \text{h.c.}] \\ &+ i e \bar{A}_0 [\bar{\psi}_{ik}^* \bar{\phi}^{ik} - \text{h.c.}] + i e (1 + \alpha) \bar{F}_{0k} [\bar{\psi}_{0i}^* \bar{\psi}^{ki} - \text{h.c.}] \\ &- 2 i e \bar{A}^k [\bar{\psi}_{ki}^* \partial_n \bar{\psi}^{ni} - \text{h.c.}] + i e \bar{A}^k [\bar{\psi}_n^{*n} \partial_k \bar{\psi}_m^m - \text{h.c.}] \\ &\quad + i e \bar{A}^k [\bar{\psi}^{*mn} \partial_k \bar{\psi}_{mn} - \text{h.c.}] \\ &+ \frac{1}{2} e^2 \left[ \begin{array}{l} (1 - \alpha) (\bar{\psi}_{0i}^* \bar{\psi}_n^n - \bar{\psi}_n^{*n} \bar{\psi}_{0i}) \\ - (1 + \alpha) (\bar{\psi}^{*0k} \bar{\psi}_{ik} - \bar{\psi}_{ik}^* \bar{\psi}^{0k}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (1 - \alpha) (\bar{\psi}^{*0i} \bar{\psi}_n^n - \text{h.c.}) \\ - (1 + \alpha) (\bar{\psi}_{0k}^* \bar{\psi}^{ik} - \text{h.c.}) \end{array} \right] \\ &- e^2 \bar{A}^k \bar{A}_k \bar{\psi}_n^{*n} \bar{\psi}_m^m - e^2 \bar{A}^k \bar{A}_k \bar{\psi}^{*mn} \bar{\psi}_{mn} \\ &+ 2 e^2 \bar{A}_k \bar{A}_n \bar{\psi}^{*ki} \bar{\psi}_i^n + e^2 h \quad m(N) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned}
h &= -\frac{2}{M^2} P_i^* P_1^i + \frac{4}{3 M^4} [(\partial_i P_1^{*i}) K_1 + \text{h.c.}] \\
&\quad - \frac{2}{3 M^4} K_1^* K_1 + \frac{2}{3 M^4} [(2 M^2 + \Delta) F_1^*] F_1 \\
&\quad - \frac{2}{3 M^4} (\partial_0 F_1^*) K_1 + \text{h.c.}] + [V_2^* K_1 + \text{h.c.}] \\
&\quad + \frac{2}{3 M^4} \left[ \left\{ \left( \frac{M^2}{2} g_{ik} - \partial_i \partial_k \right) W^{*ik} \right\} F_1 + \text{h.c.} \right] \\
V_2 &= -\frac{2i}{3 M^4} \left[ \begin{aligned} &2 \partial^i \partial^k (\bar{A}_i \bar{\psi}_{0k}) + 2 (\Delta - M^2) \bar{A}_k \bar{\psi}_0^k \\ & - \partial^i \partial^k (\bar{A}_0 \bar{\psi}_{ik}) - (\Delta - M^2) (\bar{A}_0 \bar{\psi}_n^n) \end{aligned} \right] \\
W_{ik} &= -i \left[ \begin{aligned} &(1 - \alpha) \bar{F}_{in} \bar{\psi}_k^n + (1 + \alpha) \bar{F}_{0i} \bar{\psi}_{0k} \\ & - (1 - \alpha) g_{ik} \bar{F}_{0m} \bar{\psi}^{0m} - \bar{A}_0 \bar{\phi}_{ik} + 2 \partial_i (\bar{A}^m \bar{\psi}_{km}) \\ & + 2 \bar{A}_i \partial^m \bar{\psi}_{mk} - g_{ik} \partial_r (\bar{A}^r \bar{\psi}_m^m) \\ & - g_{ik} \bar{A}^r \partial_r \bar{\psi}_m^m - \partial_r (\bar{A}^r \bar{\psi}_{ik}) - \bar{A}^r \partial_r \bar{\psi}_{ik} \end{aligned} \right] \quad (\text{C.19})
\end{aligned}$$

### D. Wechselwirkungsdarstellung

In diesem Abschnitt werden wir, ausgehend von den Nebenbedingungen C.15 die Felder  $\bar{\psi}_{\mu\nu}$ ,  $\bar{\phi}_{\mu\nu}$  aufspalten in  $\bar{\psi}_{P\mu\nu}$ ,  $\bar{\phi}_{P\mu\nu}$  und  $\bar{\psi}_{1-P\mu\nu}$ ,  $\bar{\phi}_{1-P\mu\nu}$ , so dass  $(\bar{\psi}_p, \bar{\phi}_p)$  mit  $(\bar{\psi}_{1-p}, \bar{\phi}_{1-p})$  vertauschen:

- $(\bar{\psi}, \bar{\phi}) = (\bar{\psi}_P, \bar{\phi}_P) + (\bar{\psi}_{1-P}, \bar{\phi}_{1-P})$
- $(\bar{\psi}_{1-P}, \bar{\phi}_{1-P}) = \left( \sum_{m=0}^9 \lambda_1^m N_m; \sum_{m=0}^9 \lambda_2^m N_m \right)$
- $[(\bar{\psi}_P(x), \bar{\phi}_P(x)), (\bar{\psi}_{1-P}^*(y), \bar{\phi}_{1-P}^*(y))]_{x^0=y^0} = 0$

Diese Aufspaltung ist davon unabhängig, ob  $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$  freie Felder sind oder nicht. Aus  $(\bar{\psi}_P, \bar{\phi}_P, \bar{A}, \bar{\omega}) = \bar{X}_\alpha$  und  $\mathcal{H}'(\bar{X}_\alpha) m(N)$  werden wir den Hamiltonoperator  $\mathcal{H}(\bar{X}_\alpha) = \mathcal{H}' + \sum_{m=0}^9 \lambda^m N_m$  bestimmen, welcher mit den Nebenbedingungen  $N_0, \dots, N_9$  vertauscht. Dann erst ist es möglich, zur Wechselwirkungsdarstellung überzugehen.

Zuerst sei kurz das bisher Erreichte zusammengefasst: wir sind von den Feldern  $(\psi_{\mu\nu}, \phi_{\mu\nu}, A_\rho, \omega_\rho) = X_\alpha$ , die den Nebenbedingungen B.11 genügen und  $\mathcal{H}'(X_\alpha)$  in B.13 übergegangen zu  $\bar{X}_\alpha$  und

$$\mathcal{H}'(\bar{X}_\alpha) = \sum_{L=0}^{\infty} e^L \mathcal{H}'_L \quad (\text{Vgl. C.18})$$

$\bar{X}_\alpha$  genügen den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
N_0: & \frac{M^2}{2} \bar{\phi}_n^n - \partial^m \partial^n \bar{\phi}_{nm} = 0 \\
N_{1,2,3}: & \bar{\phi}_{0i} = 0 \\
N_4: & \bar{\psi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_5: \partial^i \partial^k (\bar{\psi}_{ik} - g_{ik} \bar{\psi}_n^n) - M^2 \bar{\psi}_n^n &= 0 \\
N_{6,7,8}: M^2 \bar{\psi}_{0i} - \partial^k \bar{\phi}_{ki} &= 0 \\
N_9: \bar{\phi}_{00} &= 0 \\
\bar{\omega}_0 - \partial^k \bar{A}_k &= 0
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten in den neuen Variablen

$$\begin{aligned}
H' &= \int_t d^3x \mathcal{H}'(\bar{X}_\alpha) \\
\left[ H' + \int_t d^3x \sum_{m=0}^9 \nu^m N_m, \bar{X}_\alpha(y) \right] &= -i \partial_0 \bar{X}_\alpha(y) \\
N_m &= 0 \quad m = 0, 1, \dots, 9
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Die kanonischen Vertauschungsrelationen sind unverändert geblieben

$$\begin{aligned}
[\bar{\psi}_{\mu\nu}(x), \bar{\phi}^{*\alpha\beta}(y)]_{x^0=y^0} &= i \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\
[\bar{A}_\rho(x), \bar{\omega}^\sigma(y)]_{x^0=y^0} &= i \delta_\rho^\sigma \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Alle andern Kommutatoren sind 0.

*Zerlegung von  $(\bar{\psi}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_{\mu\nu})$  mit Hilfe des Projektionsoperators für freie Felder*

Wir betrachten für einen Moment Felder  $\psi_{\mu\nu}^{(f)}, \phi_{\mu\nu}^{(f)}$ , die für  $t=0$  mit  $(\bar{\psi}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_{\mu\nu})$  zusammenfallen und den freien Gleichungen genügen. Dann gilt für  $\phi_{\mu\nu}^{(f)}$  gemäss B.10

$$\begin{aligned}
\phi_{ik}^{(f)} &= \partial_0 [\psi_{ik}^{(f)} - g_{ik} \psi_n^{(f)n}] - (\partial_i \psi_{0k}^{(f)} + \partial_k \psi_{0i}^{(f)}) + 2 g_{ik} \partial^m \psi_{m0}^{(f)} \\
\partial_0 \psi_{ik}^{(f)} &= \phi_{ik}^{(f)} - \frac{1}{2} g_{ik} \phi_n^{(f)n} + \partial_i \psi_{0k}^{(f)} + \partial_k \psi_{0i}^{(f)} \quad m(N)
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Die Nebenbedingungen entsprechen  $\partial_\mu \psi^{(f)\mu\nu} = 0, \psi^{(f)} = 0$  genau deshalb, weil sie die Form der freien Nebenbedingungen für  $t=0$  haben. Wir können  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \sum c_{st} N_s^* N_t$  so wählen, dass die  $\psi_{\mu\nu}^{(f)}$  die Klein-Gordon Gleichung erfüllen.

$$(\square + M^2) \psi_{\mu\nu}^{(f)} = 0$$

Diese Gleichungen gelten nicht nur modulo  $N_k$ .

Die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\psi_{\mu\nu}^{(f)}(x), \phi^{*(f)\alpha\beta}(y)]_{x^0=y^0} = i \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

können integriert werden.

$$[\psi_{\mu\nu}^{(f)}(x), \phi^{*(f)\alpha\beta}(y)] = i \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \Delta(x - y, M^2) \tag{D.4}$$

Wir sehen aus D.4, dass der Hilbertraum  $R$  eine indefinite Metrik trägt<sup>2)</sup>. Für freie Tensorfelder beliebiger Stufe hat M. FIERZ [21] einen Projektionsoperator ange-

<sup>2)</sup> Vgl. S. GUPTA [3], K. BLEULER [4].

geben, der aus Tensoren, die der Klein-Gordon Gleichung genügen, die irreduziblen Anteile ausprojiziert. Wir setzen

$$\psi_{p\mu\nu}^{(f)} = -\frac{1}{2} [d_\mu^\alpha \psi_{\alpha\nu}^{(f)} + d_\nu^\beta \psi_{\mu\beta}^{(f)}] - \frac{1}{3} d_{\mu\nu} d^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}^{(f)} \quad (\text{D.5})$$

$$\left[ d_{\mu\nu} = - \left( g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{M^2} \right) \right]$$

es gilt

$$\partial_\mu \psi_p^{(f)\mu\nu} = 0, \quad \psi_p^{(f)} = 0$$

und

$$-\frac{1}{2} (d_\mu^\alpha \psi_{p\alpha\nu}^{(f)} + d_\nu^\beta \psi_{p\mu\beta}^{(f)}) = \psi_{p\mu\nu}^{(f)}$$

$$d^{\alpha\beta} \psi_{p\alpha\beta}^{(f)} = 0$$

D.5 lautet in Matrixschreibweise

$$\psi_p(f) = P \psi(f); \quad P^2 = P \quad (\text{D.6})$$

Ausserdem gilt

$$(1 - P) \psi^{(f)} = 0 \quad m(N)$$

$$\updownarrow$$

$$(1 - P) \psi^{(f)} = \psi_{1-P}^{(f)} = \sum_{m=0}^9 \varrho^m N_m \quad (\text{D.7})$$

$\varrho^m$ : Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten.

Aus D.4 folgt

$$[\psi^{(f)}, \psi^{(f)*}] = i \mathbf{1} \Delta \quad [P \psi^{(f)}, P \psi^{(f)*}] = i P \Delta \quad [P \psi^{(f)}, (1 - P) \psi^{(f)*}] = 0 \quad (\text{D.8})$$

und

$$[\psi_p^{(f)}(x), N_m(y)] = 0 \quad m = 0, \dots, 9 \quad (\text{D.9})$$

Jetzt betrachten wir  $\psi_{P\mu\nu}^{(f)}$ ,  $\phi_{P\mu\nu}^{(f)}$  zur Zeit  $t = 0$ . In  $P$  kommen 4 Ableitungen vor. Die Ableitungen nach der Zeit müssen ersetzt werden. Dies geschieht folgendermassen:  $\partial_0 \psi_{\mu\nu} \leftrightarrow \phi_{\mu\nu}$  entsprechend D.3 und C.15  $\partial_0^2 \equiv \Delta - M^2$ ;  $\partial_0^3 \equiv (\Delta - M^2) \partial_0$ ;  $\partial_0^4 \equiv (\Delta - M^2)^2$ .  $(\psi_p^{(f)}, \phi_p^{(f)})$  definieren für  $t = 0$   $(\bar{\psi}_p, \bar{\phi}_p)$  und  $(\bar{\psi}_{1-p}, \bar{\phi}_{1-p}) = (\bar{\psi} - \bar{\psi}_p, \bar{\phi} - \bar{\phi}_p)$ .

Es gilt  $[\bar{\psi}_p, \bar{\psi}_{1-p}^*] = 0$  und auf Grund von D.9

$$[(\bar{\psi}_p, \bar{\phi}_p), N_m] = 0 \quad m = 0, 1, \dots, 9$$

$$(\bar{\psi}_{1-p}, \bar{\phi}_{1-p}) = (\sum \varrho_1^m N_m, \sum \varrho_2^m N_m) \quad (\text{D.10})$$

$(\varrho_1^m, \varrho_2^m)$ : Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten)

*Bestimmung des ausgezeichneten Hamiltonoperators*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \sum_{m=0}^9 \lambda^m N_m$$

Wir setzen

$$\mathcal{H}(\bar{\psi}_{\mu\nu}, \bar{\phi}_{\mu\nu}, \bar{A}_\varrho, \bar{\omega}_\varrho) = \mathcal{H}'(\bar{\psi}_{P\mu\nu}, \bar{\phi}_{P\mu\nu}, \bar{A}_\varrho, \bar{\omega}_\varrho) \quad (\text{D.11})$$

Aus D.10 folgen die gewünschten Eigenschaften von  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \sum_{m=0}^9 \lambda^m N_m \quad [\mathcal{H}, N_k] = 0 \quad k = 0, 1, \dots, 9 \quad (\text{D.12})$$

D.1 lautet durch  $\mathcal{H}$  ausgedrückt

$$H = \int_t d^3x \mathcal{H} \quad [H, \bar{X}_\alpha(y)] = -i \partial_0 \bar{X}_\alpha(y) \quad [H, N_m] = -i \partial_0 N_m = 0 \quad (\text{D.13})$$

Es sei nochmals betont, dass obschon  $\bar{\psi}_p$  über das freie Feld gefunden wurde, die Projektion für  $t = 0$  unabhängig ist von der Bewegungsgleichung  $(\square + M^2) \psi^{(f)} = 0$  und durch die Nebenbedingungen  $N_k$  allein bestimmt wird. Dabei spielt die Tatsache, dass die Nebenbedingungen die freie Form haben, eine entscheidende Rolle.

Wir erhalten  $\mathcal{H}$ , indem wir in  $\mathcal{H}'$  als Argumente nicht  $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$  sondern  $(\bar{\psi}_p, \bar{\phi}_p)$  einsetzen.

$$H = H(e, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \int_t d^3x \mathcal{H}'_n(\bar{\psi}_p, \bar{\phi}_p, \bar{A}, \bar{\omega}) = H_0 + H_{INT} \quad H_0 = H(e = 0)$$

Es gilt nicht nur  $[H, N_m] = 0$  sondern auch

$$[H_0, N_m] = 0; \quad [H_{INT}, N_m] = 0$$

### Übergang zur Wechselwirkungsdarstellung

Erst jetzt sind wir in der Lage, die Schrödinger- und Wechselwirkungsdarstellung zu definieren.

Wir gehen zuerst zur Schrödingerdarstellung über

$$\begin{aligned} X_{\alpha S} &= e^{-iHt} X_\alpha e^{iHt}; \quad |Z\rangle_s = e^{-iHt} |Z\rangle_H \\ H &= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \int_t d^3x \mathcal{H}'_n(X_{\alpha|p}) \\ -i \partial_0 X_{\alpha S} &= 0; \quad i \partial_0 |Z\rangle_s = H |Z\rangle_s \\ N_{m S} &= N_m(X_{\alpha S}) \\ [H, N_{m S}] &= [H_0, N_{m S}] = [H_{INT}, N_{m S}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Operatoren in der Wechselwirkungsdarstellung seien mit  $\underline{0}$  bezeichnet.

$$\begin{aligned} \underline{X}_\alpha &= e^{\frac{iH_0 t}{S}} X_\alpha e^{-\frac{iH_0 t}{S}}; \quad |\underline{Z}\rangle = e^{\frac{iH_0 t}{S}} |Z\rangle_s \\ \underline{H} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \int_t d^3x \mathcal{H}'_n(\underline{X}_{\alpha|p}) \\ [\underline{H}_0, \underline{X}_\alpha(y)] &= -i \partial_0 \underline{X}_\alpha; \quad i \partial_0 |\underline{Z}\rangle = \underline{H}_{INT} |\underline{Z}\rangle \\ \underline{N}_m &= N_m(\underline{X}_\alpha), \quad [\underline{H}_0, \underline{N}_m] = [\underline{H}_{INT}, \underline{N}_m] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$(\underline{\psi}, \underline{\phi}, \underline{A}, \underline{\omega})$  gehorchen den Gleichungen des freien Feldes:

$$(\square + M^2) \underline{\psi}_{\mu\nu} = 0, \quad \square \underline{A}_\rho = 0$$

Wir können in den Impulsraum übergehen

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int e^{-i(k,x)} \frac{a_{\mu\nu}(k)}{\sqrt{2\omega_k}} d^3k \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int e^{+i(k,x)} \frac{b_{\mu\nu}^*(k)}{\sqrt{2\omega_k}} d^3k \end{aligned} \tag{D.16}$$

$$(\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2})$$

$a_{\mu\nu}$  und  $b_{\mu\nu}$  lassen sich zerlegen

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu}(k) &= a_{\underset{P}{\mu\nu}}(k) = a_{\underset{1-P}{\mu\nu}}, \quad b_{\mu\nu}(k) = b_{\underset{P}{\mu\nu}}(k) + b_{\underset{1-P}{\mu\nu}}(k) \\ [a_{\underset{P}{\mu\nu}}(k), a_{1-P}^{*\alpha\beta}(k')] &= [b_{\underset{P}{\mu\nu}}(k), b_{1-P}^{*\alpha\beta}(k')] = 0 \end{aligned}$$

Der lineare Raum  $R$ , in dem die Vertauschungsregeln D.2 dargestellt werden, spaltet auf in

$$R_1 = \left( \left\{ \begin{aligned} &a_P^*((\mu\nu)_1, k_1) \dots a_P^*((\mu\nu)_n, k_n) \\ &b_P^*((\mu\nu)_{n+1}, k_{n+1}), \dots b_P^*((\mu\nu)_{n+m}, k_{n+m}) \end{aligned} \right\} \mid \underline{\Omega} \rangle \right)$$

und

$$R_2 = \left\{ \begin{aligned} &a_{1-P}^*(1) \dots a_{1-P}^*(n) \\ &b_{1-P}^*(n+1) \dots b_{1-P}^*(n+m) \end{aligned} \mid \underline{\Omega} \rangle \right\}$$

( $\mid \underline{\Omega} \rangle$ : Vakuumzustand in  $R$ )

d.h. in die Fockräume, die durch  $a_P^*, b_P^*$  bzw.  $a_{1-P}^*, b_{1-P}^*$  erzeugt werden.

Der ganze Hilbertraum ist das direkte Produkt von  $R_1$  und  $R_2$

$$R = R_1 \otimes R_2.$$

Damit können die Feldoperatoren folgendermassen dargestellt werden

$$\underline{\psi}_{\mu\nu} = \underline{\psi}_{\underset{P}{\mu\nu}} + \underline{\psi}_{\underset{1-P}{\mu\nu}} = \underline{\psi}_{\underset{P}{\mu\nu}}(1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \underline{\psi}_{\underset{1-P}{\mu\nu}}(2) \tag{D.17}$$

$H_0, H_{INT}$  und  $N_k$  haben die Form

$$\underline{H}_0 = \underline{H}_0(1) \otimes \mathbf{1} \quad \underline{H}_{INT} = \underline{H}_{INT}(1) \otimes \mathbf{1} \quad \underline{N}_k = \mathbf{1} \otimes \underline{N}_k(2) \tag{D.18}$$

Der physikalische Hilbertraum  $\mathfrak{H}_p$  besteht aus den Zustandsvektoren

$$\mid \underline{Z} \rangle_p = \mid \underline{Z}_1 \otimes \underline{\Omega}_2 \rangle \mid \underline{\Omega} \rangle = \mid \underline{\Omega}_1 \otimes \underline{\Omega}_2 \rangle$$

Die Bedeutung von  $\underline{N}_k = 0$  kann jetzt präzisiert werden:

$$\begin{aligned} {}_P \langle \underline{Z}' \mid \underline{N}_k \mid \underline{Z}'' \rangle_p &= \langle \underline{Z}'_1 \otimes \underline{\Omega}_2 \mid \mathbf{1} \otimes \underline{N}_k(2) \mid \underline{Z}''_1 \otimes \underline{\Omega}_2 \rangle_p \\ &= \langle \underline{Z}'_1 \mid \underline{Z}'_1 \rangle_1 \langle \underline{\Omega}_2 \mid \underline{N}_k(2) \mid \underline{\Omega}_2 \rangle = 0 \end{aligned} \tag{D.19}$$

**E. Diskussion des Hamiltonoperators in der WW-Darstellung**

a) *Erste Näherung, nichtrelativistischer Grenzfall, Multipolmomente*

$$\begin{aligned}
 \underline{H}_{INT} &= e i \int_t d^3x \left\{ \frac{A^\mu \underline{\psi}_p^{*\varrho\sigma} \overleftarrow{\partial}_\mu \underline{\psi}_{p\varrho\sigma}}{+ (1 - \alpha) \underline{F}^{\mu\nu} \underline{\psi}_{p\nu\varrho}^* \underline{\psi}_{p\mu}^\varrho} \right\} + e^2 [\dots] \\
 &= e i \left\{ \int_t d^3x A^\mu (\underline{\psi}_p^{*\varrho\sigma} \underline{\Gamma}_{p\varrho\sigma|\mu} - \text{h.c.}) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \int_t d^3x \underline{F}^{\mu\nu} \underline{\psi}_{p\nu\varrho} \underline{\psi}_{p\mu}^\varrho \right\} + e^2 [\dots] \tag{E.1} \\
 &\quad \left( \underline{\Gamma}_{p\varrho\sigma|\mu} = \partial_\mu \underline{\psi}_{p\varrho\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\varrho \underline{\psi}_{p\sigma\mu} - \frac{1}{2} \partial_\sigma \underline{\psi}_{p\varrho\mu} \right)
 \end{aligned}$$

E.1 gibt Anlass zu einem Dreiervertex:

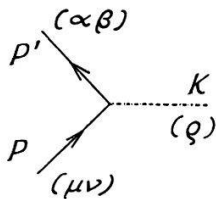


Fig. 1

$p, p'$ : Impulse des Mesons,  $k$ : Impuls des Photons

$$\begin{aligned}
 &e \frac{1}{2} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) (p + p')^\varrho \\
 &+ (1 - \alpha) e \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} &k^\alpha (g^{\varrho\mu} g^{\beta\nu} + g^{\varrho\nu} g^{\beta\mu}) + k^\beta (g^{\varrho\mu} g^{\alpha\nu} + g^{\varrho\nu} g^{\alpha\mu}) \\ &- k^\mu (g^{\varrho\alpha} g^{\beta\nu} + g^{\varrho\beta} g^{\alpha\nu}) - k^\nu (g^{\varrho\alpha} g^{\beta\mu} + g^{\varrho\beta} g^{\alpha\mu}) \end{aligned} \right\} \tag{E.2}
 \end{aligned}$$

Im folgenden werden die Multipolmomente von  $H_{INT}$  bestimmt. Der nicht-relativistische Grenzfall ergibt sich, indem wir in  $\underline{\psi}_{p\mu\nu}$  den Anteil des Antiteilchens weglassen, nach Potenzen von  $p_i/M$  ( $p_i$ : Impuls) entwickeln und einen Faktor  $e^{-iMt}$  abspalten:

$$\begin{aligned}
 \underline{\psi}_{p\mu\nu} &= e^{-iMt} \varphi_{\mu\nu} \\
 \varphi_{\mu\nu} &\cong \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int e^{-i \frac{\vec{p}^2 t}{2M}} e^{i \vec{p} \vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2M}} \left( 1 - \frac{p^2}{4M^2} \right) a_{\mu\nu}(p) d^3p \tag{E.3}
 \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir, dass  $p^\mu a_{p\mu\nu} = 0$  ist, so können alle Komponenten durch  $a_{pik}$  oder  $\varphi_{ik}$  ausgedrückt werden. Die  $a_{pik}^*$  erzeugen aus dem Vakuum nicht Zustände des Fockraums, weil sie den Vertauschungsrelationen

$$[a_{ik}(\vec{p}), a_{mn}^*(\vec{p}')] = \left[ \begin{aligned} &\delta_{ik|mn} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{mn} \\ &+ \frac{1}{2M^2} \left( \begin{aligned} &p_i p_m \delta_{kn} + p_k p_m \delta_{in} \\ &+ p_i p_n \delta_{km} + p_k p_n \delta_{im} \end{aligned} \right) \\ &- \frac{1}{3M^2} (p_m p_n \delta_{ik} + p_i p_k \delta_{mn}) \\ &+ \frac{2}{3M^4} (p_i p_k p_m p_n) \end{aligned} \right] \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \tag{E.4}$$

genügen. Wir bestimmen die neuen Operatoren  $\chi_{ik}(\vec{p})$  als Funktionen der  $a_{pik}$ , mit den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\chi_{ik}(\vec{p}) \chi_{mn}^*(\vec{p}')] &= \left( \delta_{ik|mn} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{mn} \right) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \\ \chi_{ik}(\vec{p}) &= a_{pik}(\vec{p}) - \frac{1}{2M^2} [p_i p_r a_{rk} + p_k p_r a_{pri}] \\ &\quad + \frac{1}{4M^4} p_i p_k p_r p_s a_{pr s} + \frac{3p^2}{8M^4} (p_i p_r a_{rk} + p_k p_r a_{pri}) + (\dots) \\ a_{pik}(\vec{p}) &= \chi_{ik}(\vec{p}) + \frac{1}{2M^2} (p_i p_r \chi_{rk} + p_k p_r \chi_{ri}) \\ &\quad + \frac{1}{4M^4} p_i p_k p_r p_s \chi_{rs} - \frac{p^2}{8M^4} (p_i p_r \chi_{rk} + p_k p_r \chi_{ri}) + (\dots) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Die Aufgabe besteht weiter darin,  $H_{INT}$  durch  $\chi_{ik}$  auszudrücken und nach Multipolen zu ordnen. Für  $\alpha = 0$  erhalten wir für das elektrische Multipolmoment der Ordnung  $2^4 = 16$ :

$$\varepsilon(E M 2^4) = 0.$$

( $\varepsilon(E M 2^n)$ ): Energie des elektrischen Multipols der Ordnung  $2^n$

$\varepsilon(M M 2^n)$ : Energie des magnetischen Multipols der Ordnung  $2^n$ .

Die weiteren Multipolenergien und -momente sind: ( $\alpha = 0$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon(E M 2^2) &= \frac{e}{2M^2} \langle \frac{1}{2} (\partial_i \underline{E}_k + \partial_k \underline{E}_i) \chi_{ki}^* \chi_{ri} \rangle \\ &\int \frac{1}{2} (3z^2 - r^2) \varrho(S_z = 2) d^3x = \frac{e}{2M^2} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

( $\varrho(S_z = 2)$ ): Ladungsdichte im Zustand  $S_z = 2$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon(M M 2^3) &= \frac{e}{8M^3} \langle (\partial_s \partial_r \underline{F}_{ki}) i (\chi_{ri}^* \chi_{sk} - \chi_{sk}^* \chi_{ri}) \rangle \\ &\frac{1}{4} \int P_3(\cos\vartheta) r^3 (\vec{x} \text{ rot } \vec{j} \{S_z = 2\}) d^3x = \frac{3e}{4M^3} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

( $\vec{j}(S_z = 2)$ ): Stromdichte im Zustand  $S_z = 2$ )

Die anomalen Momente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(E M 2^4) &= -\frac{e\alpha}{8M^4} \langle \left\{ \frac{1}{2} \partial_m \partial_n (\partial_k \underline{E}_i + \partial_i \underline{E}_k) \right\} (\chi_{ik}^* \chi_{mn} + \chi_{mn}^* \chi_{ik}) \rangle \\ &\int P_4(\cos\vartheta) r^4 \varrho(S_z = 2) d^3x = \frac{9}{8} \frac{e\alpha}{M^4} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(E M 2^2) &= \frac{e\alpha}{2M^2} \langle \frac{1}{2} (\partial_k \underline{E}_i + \partial_i \underline{E}_k) \chi_{ir}^* \chi_{rk} \rangle \\ &\int \frac{1}{2} (3z^2 - r^2) \varrho(S_z = 2) d^3x = \frac{e\alpha}{2M^2} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(M M 2^3) &= -\frac{e\alpha}{8M^3} \langle (\partial_s \partial_r \underline{F}_{ki}) i (\chi_{ri}^* \chi_{sk} - \chi_{sk}^* \chi_{ri}) \rangle \\ &\frac{1}{4} \int P_3(\cos\vartheta) r^3 (\vec{x} \text{ rot } \vec{j}(S_z = 2)) d^3x = -\frac{3e\alpha}{4M^3} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$



## Magnetisches Moment

$$\varepsilon(M M2^1) = - \frac{1-\alpha}{2M} e \langle \frac{1}{2} \vec{B} \vec{S} \rangle; \vec{\mu} = \frac{1-\alpha}{2} \frac{e}{2M} \vec{S} \quad (\text{E.11})$$

( $\vec{S}$ : Spinoperator) ( $\vec{\mu}$ : magnetisches Moment)

## b) Die zweite Näherung

$$\begin{aligned} e^2 \mathcal{H}'_2 = & - e^2 \underline{A}^k \underline{A}_k \underline{\psi}_{pm}^{*m} \underline{\psi}_{pn}^n - e^2 \underline{A}^k \underline{A}_k \underline{\psi}_p^{*mn} \underline{\psi}_{pmn} - 2 e^2 \underline{A}^i \underline{A}^k \underline{\psi}_{pin}^* \underline{\psi}_{pk}^n \\ & + \frac{e^2}{2} \left[ \begin{array}{l} (1-\alpha) (\underline{\psi}_{p0i}^* \underline{\psi}_{pn}^n - \text{h.c.}) \\ - (1+\alpha) (\underline{\psi}_p^{*0k} \underline{\psi}_{pik} - \text{h.c.}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} (1-\alpha) (\underline{\psi}_p^{*0i} \underline{\psi}_{pm}^m - \text{h.c.}) \\ - (1+\alpha) (\underline{\psi}_{p0m}^* \underline{\psi}_p^{im} - \text{h.c.}) \end{array} \right] \\ & + e^2 h \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

(Vgl. C.18)

Viele der in  $\mathcal{H}'_2$  vorkommenden Terme werden von den nichtkovarianten Anteilen der  $T$ -Produkte kompensiert. Die Felder  $\underline{\psi}_{p\sigma\tau}$ ,  $\frac{\Gamma}{p} \sigma\tau|\mu$ ,  $\underline{A}_\rho$ ,  $\underline{F}_{\alpha\beta}$  geben folgende Kontraktionen:

$$\begin{aligned} \langle T(\underline{\psi}_{p\sigma\tau}(x), \underline{\psi}_{p\sigma'\tau'}^*(y)) \rangle_0 &= i \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (d_{\sigma\sigma'}, d_{\tau\tau'} + d_{\sigma\tau'} d_{\sigma'\tau}) \\ - \frac{1}{3} d_{\sigma\tau} d_{\sigma'\tau'} \end{array} \right\} \Delta_F(x-y) \\ &\quad + i Q_{\sigma\tau, \sigma'\tau'}(\partial_x) \delta^{(4)}(x-y) \\ \langle T(\underline{\psi}_{p\sigma\tau}(x), \frac{\Gamma}{p} \sigma\tau|\mu)^*(y) \rangle_0 &= i A_{\rho, \tau; \sigma'\tau'\mu}(\partial_x) \Delta_F(x-y) \\ &\quad - i C_{\sigma\tau; \sigma'\tau'\mu}(\partial_x) \delta^{(4)}(x-y) \\ \langle T(\frac{\Gamma}{p} \sigma\tau|\mu(x), \frac{\Gamma}{p} \sigma'\tau'|\mu')^*(y) \rangle_0 &= i B_{\sigma\tau|\mu; \sigma'\tau'|\mu'}(\partial_x) \Delta_F(x-y) \\ &\quad - i D_{\sigma\tau|\mu; \sigma'\tau'|\mu'}(\partial_x) \delta^{(4)}(x-y) \\ \langle T(\underline{F}_{\mu\nu}(x), \underline{F}_{\alpha\beta}(y)) \rangle_0 &= i (g_{\mu\alpha} \partial_\nu \partial_\beta - g_{\nu\alpha} \partial_\mu \partial_\beta - g_{\mu\beta} \partial_\nu \partial_\alpha + g_{\nu\beta} \partial_\mu \partial_\alpha) \times \\ &\quad \times D_F(x-y) + i V_{\mu\nu; \alpha\beta} \delta^{(4)}(x-y) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$Q, A, C, D, V$  sind Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Es seien hier lediglich  $Q$  und  $V$  angegeben:

$$\begin{aligned} Q_{\sigma\tau, \sigma'\tau'} = & - \frac{1}{M^2} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \{ d_{\sigma\sigma'} \delta_{0\tau} \delta_{0\tau'} + d_{\sigma\tau'} \delta_{0\sigma'} \delta_{0\tau} + d_{\tau\sigma'} \delta_{0\sigma} \delta_{0\tau'} + d_{\tau\tau'} \delta_{0\sigma} \delta_{0\sigma'} \} \\ - \frac{1}{3} (d_{\sigma\tau} \delta_{0\sigma'} \delta_{0\tau'} + d_{\sigma'\tau'} \delta_{0\sigma} \delta_{0\tau}) \end{array} \right] \\ & + \frac{1}{M^4} \left[ \frac{1}{2} (\bar{d}_{\sigma\sigma'} \bar{d}_{\tau\tau'} + \bar{d}_{\sigma\tau'} \bar{d}_{\sigma'\tau} - \frac{1}{3} \bar{d}_{\sigma\tau} \bar{d}_{\sigma'\tau'} - \frac{2}{3} \delta_{0\sigma} \delta_{0\tau} \delta_{0\sigma'} \delta_{0\tau'}) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.14a})$$

$$\bar{d}_{\alpha\beta} = \delta_{0\alpha} \partial_\beta + \delta_{0\beta} \partial_\alpha - 2 \delta_{0\alpha} \delta_{0\beta} \partial_0$$

$$V_{\mu\nu, \alpha\beta} = (g_{\mu\alpha} \delta_{0\beta} \delta_{0\nu} - g_{\nu\alpha} \delta_{0\beta} \delta_{0\mu} - g_{\mu\beta} \delta_{0\alpha} \delta_{0\nu} + g_{\nu\beta} \delta_{0\alpha} \delta_{0\mu}) \quad (\text{E.14b})$$



Die einfachsten Graphen führen zu den Kompensationen

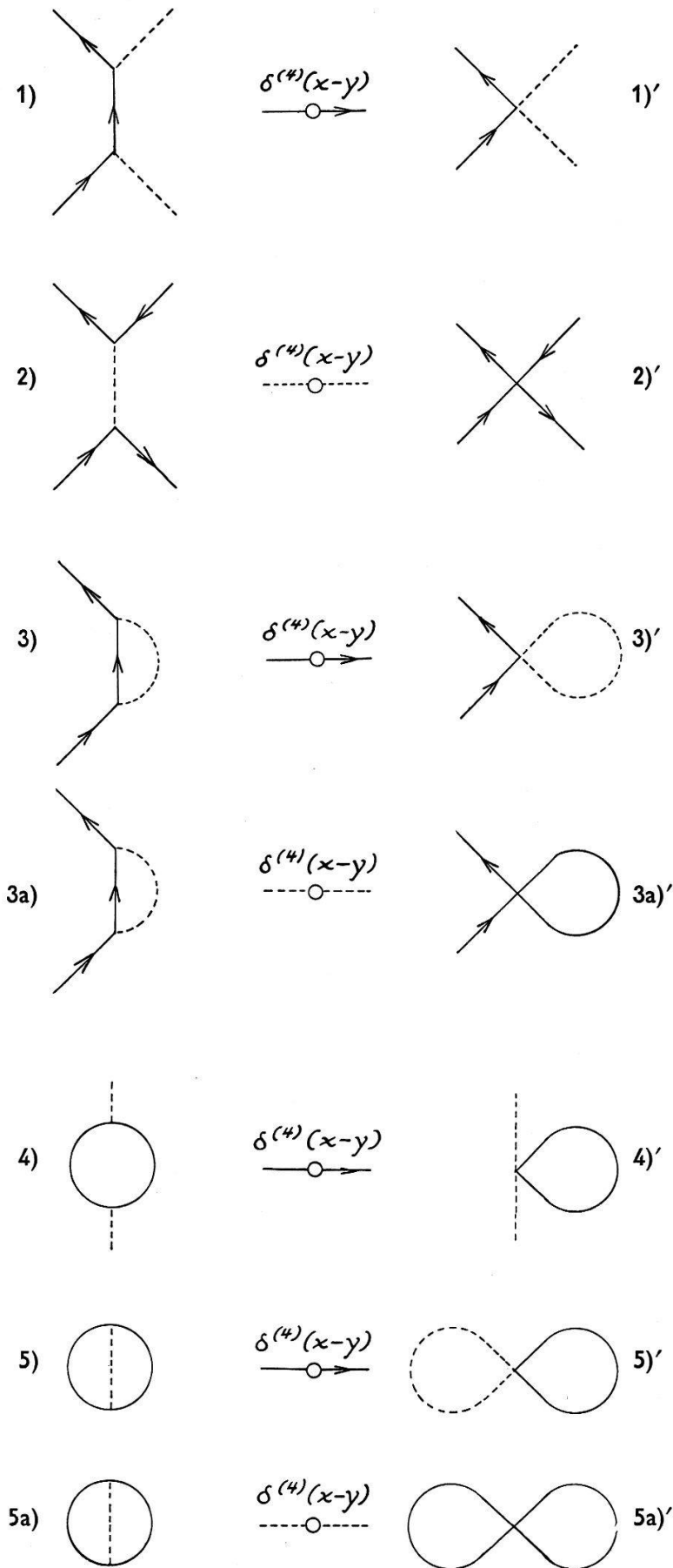


Fig. 2

Als einfachste Kompensationserscheinung betrachten wir

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^2}{2!} e^2 \alpha^2 \int d^4x d^4y \underbrace{F_{\mu\nu}(x) \underline{\psi}_p^{*\nu\varrho} \underline{\psi}_{p\varrho}^\mu(x) F_{\alpha\beta}(y) \underline{\psi}_p^{*\beta\sigma} \underline{\psi}_{p\sigma}^\alpha(y)}_{\delta^{(4)}(x-y)} \\
&= \frac{e^2 \alpha^2}{2} i \int d^4x \underline{\psi}_p^{*\nu\varrho} \underline{\psi}_{p\varrho}^\mu V_{\mu\nu;\alpha\beta} \underline{\psi}_p^{*\beta\sigma} \underline{\psi}_{p\sigma}^\alpha \\
&= i \frac{e^2 \alpha^2}{2} \int d^4x [\underline{\psi}_p^{*0\varrho} \underline{\psi}_{p\varrho}^i - \text{h.c.}] [\underline{\psi}_p^{*0\sigma} \underline{\psi}_{p\sigma i} - \text{h.c.}] \quad (\text{E.15})
\end{aligned}$$

Der Selbstwechselwirkungsterm in E.12 liefert einen Gegenterm proportional  $\alpha^2$ :

$$-i \frac{e^2 \alpha^2}{2} \int d^4x [\underline{\psi}_p^{*0\varrho} \underline{\psi}_{p\varrho}^i - \text{h.c.}] [\underline{\psi}_p^{*0\sigma} \underline{\psi}_{p\sigma i} - \text{h.c.}]$$

der E.15 kompensiert.

Die Graphen 1)', 2)', 3)', 3a)', 4), 5)', 5a)' kommen in  $\mathcal{H}'_2$  alle vor. Die S-Matrix, die durch  $H$  erzeugt wird, kann nachdem alle Kompensationen ausgeführt sind, auch durch einen äquivalenten invarianten Hamiltonoperator erzeugt werden, wobei in allen Kontraktionen nur invariante und kovariante Ausdrücke vorkommen.

### F. Reduktion des Hamiltonoperators; kovariante Kontraktionen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der kanonische Formalismus die Voraussetzungen zur Folge hat, die UMEZAWA und TAKAHASHI [11, 12, 13] verwenden, um die Reduktion des Hamiltonoperators durchzuführen. Die Reduktion beruht darauf, dass ein Zusammenhang besteht zwischen  $T$ -Produkten und den Oberflächentermen, die im Hamiltonoperator auftreten. Dabei kompensieren sich alle Grössen, die die Oberfläche explizit enthalten.  $\mathcal{H}_{INT}$  lässt sich als Summe  $-\mathcal{L}_{INT} + Z$  darstellen, wobei  $Z$  nur Beiträge enthält, die von der Normalen einer raumartigen Fläche abhängen.

$$\mathcal{H}_{INT}(x, n) = -\mathcal{L}_{INT}(x) + e^2 w^{\mu\nu}(x) n_\mu(x) n_\nu(x) + e^3 [\dots] \quad (\text{F.0})$$

Der kanonische Formalismus erzeugt in natürlicher Weise die Zusatzterme  $Z$ , indem alle Felder  $\psi_p$  auf neue Felder  $\bar{\psi}_p$  transformiert werden, die den Übergang zur Wechselwirkungsdarstellung erlauben.

In F.0 spielt  $-\mathcal{L}_{INT}$  die Rolle einer Anfangsbedingung. Die weiteren Terme in  $Z$  entsprechen der Konstruktion einer kausalen und unitären S-Matrix, wie sie von E. C. G. STUECKELBERG und D. RIVIER [18, 19] angegeben wurde.

Um den Anschluss an die Bezeichnungen von UMEZAWA und TAKAHASHI [11] herzustellen, zeigen wir zuerst, dass die Feldoperatoren  $\psi_p$  in der Heisenbergdarstellung im physikalischen Hilbertraum  $\mathfrak{H}_p$  reduziert werden (vgl. D).  $\psi_p$  ist als Potenzreihe der Felder  $\bar{\psi}_p$  gegeben. Es genügt also zu zeigen, dass die Aussage für  $\bar{\psi}_p$  richtig ist.

Der Projektor auf  $\mathfrak{H}_p$  sei  $E$ . Es gilt auf Grund der speziellen Form von  $H_0$ ,  $H_{INT}$  und  $N_k$  (D.18)

$$\begin{aligned}
E \bar{\psi} E &= \bar{\psi}_p & \bar{\psi}(x) &= (U^{-1}(\sigma) \underline{\psi}(x) U(\sigma)) (\sigma | x) \\
E \underline{\psi} E &= \underline{\psi}_p & \underline{\psi}(x) &= (U^{-1}(\sigma) \underline{\psi}_p(x) U(\sigma)) (\sigma | x)
\end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

$\sigma$ : raumartige Fläche,  $(\sigma/x)$  bedeutet:  $\sigma$  ist so gewählt, dass  $x$  darauf liegt.

$U(\sigma)$  ist zunächst nur bezüglich  $\eta$  unitär:

$$\begin{aligned} \ll Z'_1 \otimes Z'_2; \eta; U(\sigma) Z_1 \otimes Z_2 \gg &= \ll U^{-1}(\sigma) Z'_1 \otimes Z'_2; \eta; Z_1 \otimes Z_2 \gg \\ \implies (U^{-1})^+ &= \eta U \eta^{-1} \end{aligned}$$

$\eta$  lässt sich zerlegen:

$$\eta = E + Q \eta Q \quad Q = 1 - E \quad (\text{F.2})$$

Aus F.2 zusammen mit  $U(\sigma) E = E U(\sigma)$  folgt, dass  $U(\sigma)$  auf  $\mathfrak{S}_p$  ein unitärer Operator ist. Wir verwenden im folgenden nicht  $\bar{\psi}_p, \underline{\psi}_p$ , die durch D.14, D.15 auseinander hervorgehen, also für  $t = 0$  übereinstimmen, sondern  $\bar{\psi}'_p, \underline{\psi}_p$ , die für  $t = -\infty$  zusammenfallen. F.1 gilt auch für  $\bar{\psi}'_p$ . Die Felder  $\psi_p$ , die entsprechend den in C konstruierten Transformationen mit  $\bar{\psi}'_p$  zusammenhängen, erfüllen die Gleichungen A.3:

$$\begin{aligned} G(\partial, M^2) \psi_p &= j \quad G = G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(\partial_x, M^2) \\ \psi_p &= \psi_{p\alpha\beta}; \quad j = j_{\alpha\beta} = -\mathcal{L}_{INT, \psi^* \alpha\beta} + \partial_\rho \mathcal{L}_{INT, \partial_\rho \psi^* \alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Es existiert eine Matrix  $P = P_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(\partial, M^2)$  mit

$$P G = G P = -(\square + M^2) \mathbf{1}$$

$P$  kommt in den Vertauschungsrelationen D.8 vor:

$$[\underline{\psi}_p(x), \underline{\psi}'_p(x')] = i P(\partial_x, M^2) \Delta(x - x', M^2) \quad (\text{F.4})$$

Die Greenschen Funktionen der Gleichungen F.3 hängen ebenfalls von  $P$  ab

$$\begin{aligned} G \tau(x - x') &= \mathbf{1} \delta(x - x'); \quad P G \tau = -(\square + M^2) \tau = + P \delta(x - x') \\ \implies \tau^{ret}(x - x') &= -P \Delta^{ret}(x - x', M^2) \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Neben  $\bar{\psi}'_p$  betrachten wir

$$\bar{\psi}'_p(x, \sigma) = U^{-1}(\sigma) \underline{\psi}_p(x) U(\sigma).$$

Dabei muss  $\sigma$  nicht durch den Punkt  $x$  hindurchgehen.  $\bar{\psi}'_p(x, \sigma)$  ist ein freies Feld und genügt den Vertauschungsrelationen

$$[\bar{\psi}'_p(x, \sigma), \bar{\psi}'_p(x', \sigma)] = i P \Delta(x - x')$$

Wir formen F.3 zu einer Integralgleichung um:

$$\psi_p(x) = \underline{\psi}_p(x) + \int \tau^{ret}(x - x') j(x') dx' \quad (\text{F.7})$$

$U(\sigma)$  genügt der Gleichung

$$i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} U(\sigma) = \mathcal{H}(x, n) U(\sigma) = U(\sigma) \mathcal{H}(x | \sigma, n) \quad (\text{F.8})$$

Unter den folgenden Voraussetzungen konstruieren UMEZAWA und TAKAHASHI [11]  $\mathcal{H}(x|\sigma, n)$  und  $U(\sigma)$ , was in unserem Fall eine Rekonstruktion von  $\mathcal{H}_{INT}$  bedeutet:

- (i)  $U(\sigma)$  hängt nur von der raumartigen Fläche  $\sigma$  ab.
- (ii)  $\psi_p(x)$  ist ein lokales Funktional von  $\bar{\psi}'_p(x) = \bar{\psi}'_p(x, \sigma)_{(\sigma/x)}$ .

Die in D.14 und D.15 vorkommenden Operatoren  $H$  und  $H_0$  sind zeitunabhängig, woraus (i) unmittelbar folgt. (ii) ist auf Grund der Transformation  $\psi_p \longleftrightarrow \bar{\psi}'_p$ , die in C konstruiert wurde, erfüllt.

In der genannten Arbeit werden  $\mathcal{H}(x'/\sigma, n')$  und  $U(\sigma)$  aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'_p(x, \sigma) &= \underline{\psi}_p(x) + \int_{-\infty}^{\sigma} D_a P(\partial_x) \Delta(x-x') j_a(x') dx' + e^2 \int_{-\infty}^{\sigma} \xi(x, x') dx' \\ [\mathcal{H}(x' | \sigma, n'), \bar{\psi}'_p(x)] &= -i D_a(\partial_x) P(\partial_x) \Delta(x-x') j_a(x') - i e^2 \xi(x, x') \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

errechnet. Dabei bedeutet in Vektorschreibweise

$$D_a = (1, -\partial_\mu), \quad j_a = -(\mathcal{L}_{INT, \psi^*}, \mathcal{L}_{INT, \partial_\mu \psi^*}).$$

F.9 wird durch Iteration gelöst, wobei  $\xi(x, x')$  so bestimmt werden muss, dass  $\int_{-\infty}^{\sigma} dx' \xi(x, x')$  nicht von der Vorgeschichte der Felder abhängt.  $\mathcal{H}(x'/\sigma, n')$  und  $\xi(x, x')$  werden nach Potenzen von  $(\bar{\psi}'_p(x, \sigma))_{(\sigma/x)}$  entwickelt, mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} M(\partial) \psi_p(x) &= [M(\partial) \bar{\psi}'_p(x, \sigma)]_{(\sigma/x)} + \frac{1}{2} [M(\partial_x) D_a P(\partial_x), \varepsilon(x-x')] \Delta(x-x') j_a(x') dx' \\ &\quad - e^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} M(\partial_x) \xi(x, x') dx' \right\}_{(\sigma/x)} \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

$M(\partial)$ : beliebiger Differentialoperator.

Dabei werden im wesentlichen die in C angegebenen Transformationen durchgeführt, wobei aber die Kompensationen gegenüber den  $T$ -Produkten dank der folgenden Gleichung übersehen werden können.

$$\begin{aligned} \langle T(M_1(\partial_x) \underline{\psi}_p(x), M_2(\partial'_x) \underline{\psi}_p^*(x')) \rangle_0 &= i M_1(\partial_x) M_2(-\partial_x) P \Delta_F(x-x') \\ &\quad - \frac{i}{2} [M_1(\partial_x) M_2(-\partial_x), \varepsilon(x-x')] \Delta(x-x') \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

$M_1, M_2$ : Differentialoperatoren.

Aus (i), (ii), F.9 und F.10 folgt der Anfang der Entwicklung von  $\mathcal{H}(x, n)$  nach  $e$ :

$$\mathcal{H}(x, n) = -\mathcal{L}_{INT}(\underline{\psi}_p) + e^2 w^{\mu\nu}(x) n_\mu n_\nu + e^3 [\dots] \quad (\text{F.0})$$

F.0 zusammen mit F.10 sind zunächst nur formal. Hingegen sind alle in diesem Abschnitt ausgeführten Operationen durch die kanonischen Transformationen in C gegeben und bedeuten daher eine Rekonstruktion des Hamiltonoperators.

$w^{\mu\nu} n_\mu n_\nu$  kompensiert den nichtkovarianten Beitrag von  $(\mathcal{L}_{INT}(x) \mathcal{L}_{INT}(x'))$ . Führt man die kovarianten  $T^*$ -Produkte ein

$$\langle T^*(M_1 \underline{\psi}_p(x), M_2(\partial'_x) \underline{\psi}_p^*(x')) \rangle_0 = i M_1(\partial_x) M_2(-\partial_x) P \Delta_F(x-x') \quad (\text{F.12})$$

so kann die  $S$ -Matrix durch

$$\mathcal{H}_{INT} = -\mathcal{L}_{INT}(\underline{\psi}_p(x), \underline{\psi}_p^*(x), \partial_\mu \underline{\psi}_p(x), \partial_\mu \underline{\psi}_p^*(x), \underline{A}_\rho(x)) \quad (\text{F.13})$$

erzeugt werden.

In allen betrachteten Reihenentwicklungen ist die Reihenfolge der Operatoren nicht festgelegt. Die Reduktion von  $\mathcal{H}(x, n)$  ist nur bestimmt modulo Kommutatoren der Form

$$[M_1(\partial_x) \underline{\psi}_p(x), M_2(\partial_{x'}) \underline{\psi}_p^*(x')]_{x=x'}$$

welche explizit unendliche Ausdrücke zur S-Matrix beitragen. Als Beispiel dienen die Graphen 3)', 4)' und 5)' des Abschnitts E.

Ein anomales magnetisches Moment des Vektormesons hat ebenfalls solche Terme zur Folge (vgl. LEE und YANG [14]).

Der Hamiltonoperator ist somit reduziert zu

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) = i e \{ & \underline{A}^\mu [\underline{\psi}_p^{*\rho\sigma} \underline{\Gamma}_{p\rho\sigma/\mu} - \underline{\Gamma}_{p\rho\sigma/\mu}^* \underline{\psi}_p^{\rho\sigma}] - \alpha F^{\mu\nu} \underline{\psi}_{p\nu\rho}^* \underline{\psi}_{p\mu}^\rho \} \\ & + e^2 \underline{A}^\rho \underline{A}_\rho \underline{\psi}_p^{*\mu\nu} \underline{\psi}_{p\mu\nu} - 2 e^2 \underline{A}^\mu \underline{A}^\nu \underline{\psi}_{p\nu\rho}^* \underline{\psi}_{p\mu}^\rho \end{aligned} \quad (F.14)$$

Damit die angegebenen Regeln Anwendung finden, müssen die Ableitungen der  $A_\rho$  auf die Mesonfelder übergewälzt werden.

Zu  $\mathcal{H}(x)$  gehören die Vertices:

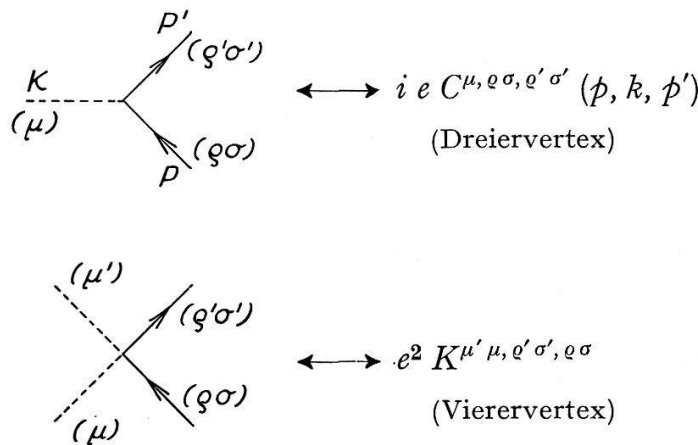


Fig. 3

C und K können aus F.14 bestimmt werden.

Die kovarianten Kontraktionen ergeben die folgenden Regeln für eine innere Mesonlinie:

$$(\varrho, \sigma) \xrightarrow{P} (\varrho', \sigma') \longleftrightarrow \text{einer inneren Mesonlinie entspricht der Propagator}$$

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2 - M^2 + i\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} (d_{\varrho\varrho'} d_{\sigma\sigma'} + d_{\varrho\sigma'} d_{\sigma\varrho'}) - \frac{1}{3} d_{\varrho\sigma} d_{\varrho'\sigma'} \right\}$$

$$d_{\varrho\sigma} = - \left( g_{\varrho\sigma} - \frac{P_\varrho P_\sigma}{M^2} \right)$$

Fig. 4

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Professoren M. FIERZ und R. JOST, für die Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeit, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen, ganz besonders

Herrn Prof. FIERZ für die Anregung zu diesem Thema und die weiteren richtungweisenden Ratschläge und Fragen.

Ich möchte auch Herrn Dr. D. N. WILLIAMS verbindlichst danken für die wertvollen Hinweise auf die Literatur, ferner den Herren Dr. W. WYSS, Dr. W. SCHNEIDER, S. ALBEVERIO und R. SEILER für die lehrreichen Diskussionen und Frl. R. HINTERMANN für ihre Hilfe bei der Anfertigung des Manuskripts.

### Literaturverzeichnis

- [1] M. FIERZ und W. PAULI, Proc. Roy. Soc. London *173*, 211 (1939).
- [2] P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London *246*, 326 (1958).
- [3] S. GUPTA, Proc. Phys. Soc. London [A] *63*, 681 (1950); [A] *64*, 850 (1951).
- [4] K. BLEULER, Helv. phys. Acta *23*, 567 (1950).
- [5] M. JACOB und G. C. WICK, Ann. Phys. *7*, 404 (1959).
- [6] K. HEPP, Helv. phys. Acta *37*, 55 (1964).
- [7] D. N. WILLIAMS, Thesis (unpublished).
- [8] D. ZWANZIGER, *Lecture Notes*, erschienen in den Proceedings of the Symposium on the Lorentzgroup, Seventh Annual Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder Colorado 1964.
- [9] V. BARGMANN, L. MICHEL und V. L. TELEGDI, Phys. Rev. Lett. *2*, 435 (1959).
- [10] T. REGGE, Nuovo Cim. *5*, 325 (1957).
- [11] H. UMEZAWA und Y. TAKAHASHI, *The General Theory of the Interaction Representation*, I: Prog. theor. Phys. *9/1*, 14 (1953).
- [12] H. UMEZAWA und Y. TAKAHASHI, *The General Theory of the Interaction Representation*, II: Prog. theor. Phys. *9/5*, 501 (1953).
- [13] Vgl. auch: H. UMEZAWA, Quantum Field Theory, North Holland, Amsterdam 1956, Kap. IX, §1; Kap. X, §1–5; Kap. XIII, §3–5.
- [14] T. D. LEE und C. N. YANG, *Theory of Charged Vector Mesons Interacting with the Electromagnetic Field*, Phys. Rev. *128/2*, 885 (1962).
- [15] S. WEINBERG, Phys. Rev. *133*, B1318 (1964); *134*, B882 (1964).
- [16] S. TOMONAGA, Prog. theor. Phys. *1*, 27 (1946).
- [17] J. SCHWINGER, Phys. Rev. *74*, 1439 (1948); *75*, 651 (1949); *76*, 790 (1949).
- [18] E. C. G. STUECKELBERG und D. RIVIER, Helv. phys. Acta *23*, 215 (1950).
- [19] E. C. G. STUECKELBERG und A. PETERMANN, Helv. phys. Acta *26*, 499 (1953).
- [20] G. WENTZEL, *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*, Franz Deuticke, Wien 1943, S. 192ff.
- [21] M. FIERZ, Helv. phys. Acta *23*, 412 (1950).