Ergänzung der linearen Feldtheorie

Autor(en): **Scherrer, Willy**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **39 (1966)**

Heft 6

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-113703

Ergänzung der linearen Feldtheorie

von **Willy Scherrer**

Bern, Justingerweg 18

(5. IV. 66)

Zusammenfassung. Die das Gravitationsfeld bestimmende Wirkungsfunktion der linearen Feldtheorie bedarf einer Ergänzung, da die zu ihr gehörigen antisymmetrischen Feldgleichungsterme $V_{,\varrho\sigma}$ identisch verschwinden. Diese Ergänzung wird in zwei Stufen vollzogen.

Bei verschwindendem Gravitationsfeld liefert die 1. Stufe in erster Näherung

$$V_{,\varrho\sigma} \sim \Box\, v_{,\varrho\sigma}\,,$$

die 2. Stufe

$$V_{,\varrho\sigma} \sim \Box\, v_{,\varrho\sigma} + a^{-2}\, v_{,\varrho\sigma}\,.$$

Dabei ist a eine kleine universelle Länge.

§1. Einleitung

Aus meinen letzten Arbeiten geht hervor, dass die Grundinvarianten $\underset{1}{H}, \underset{2}{H}, \underset{3}{H}$ der linearen Feldtheorie aus folgenden Gründen Interesse verdienen:

1. Wählt man die Kombination

$$\underset{I}{H} \equiv \frac{1}{2}\, \underset{1}{H} + \underset{2}{H} - 2\, \underset{3}{H} \tag{1.1}$$

als Wirkungsfunktion, so erhält man genau die Einsteinschen Vakuumsgleichungen der Gravitation [1] [1]) und überdies eine invariant lokalisierbare Feldenergie [2].

2. Ergänzt man (1.1) gemäss

$$W \equiv \underset{I}{H} + \varkappa\, M \tag{1.2}$$

durch die Wirkungsfunktion M der Vakuumselektrodynamik, so ergibt sich das Feld eines geladenen Teilchens mit endlicher Totalenergie [3].

In beiden Fällen jedoch sind die zum System gehörigen 6 antisymmetrischen Feldgleichungen identisch erfüllt. In der 16gliedrigen Basis sind somit noch 6 Freiheitsgrade verfügbar. Es besteht daher ein Bedürfnis zu untersuchen, ob vermittels einer geeigneten Zusatzkombination der Grundinvarianten diese Lücke in natürlicher Weise ausgefüllt werden könne.

Meine weiteren Untersuchungen haben nun ergeben, dass in dieser Hinsicht die Kombination

$$\underset{II}{H} \equiv \frac{1}{2}\, \underset{1}{H} - \underset{2}{H} \tag{1.3}$$

Interesse verdient. Sie ist nämlich in folgendem Sinne zu $\underset{I}{H}$ komplementär: Die zu ihr gehörigen 10 symmetrischen Feldgleichungsterme enthalten keine Ableitungen, deren Ordnung höher als 1 ist.

---

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 522.

Trotzdem reicht – wie man an Beispielen ersehen kann – $\underset{II}{H}$ allein zusammen mit $\underset{I}{H}$ noch nicht aus, um eine befriedigende Ergänzung zu erhalten. Wir fügen daher noch $\underset{3}{H}$ hinzu oder, was rechnerisch bequemer ist,

$$\underset{III}{H} \equiv 4 \underset{3}{H} \tag{1.4}$$

und bilden nun die Kombination

$$H \equiv \underset{I}{H} + \zeta \underset{II}{H} + \varepsilon \underset{III}{H} \,. \tag{1.5}$$

Die Koeffizienten ζ und ε sind reine Zahlen und müssen natürlich so klein sein, dass das durch $\underset{I}{H}$ bestimmte Gravitationsfeld nicht in unzulässiger Weise gestört wird.

Ein erstes Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun der Nachweis für folgende Aussage:

Satz 1: Für $\zeta = \varepsilon$ liefert die Wirkungsfunktion H ein System von antisymmetrischen Feldgleichungen, das in erster Näherung und für verschwindendes Gravitationsfeld folgende Gestalt besitzt:

$$\square\, v_{,\varrho\sigma} = 0 \,. \tag{1.6}$$

Dabei bedeutet $\square$ den kovarianten d'Alembert-Operator angewendet auf den antisymmetrischen Tensor $v_{,\varrho\sigma}$.

Bekanntlich erfüllen die Feldstärken $F_{,\varrho\sigma}$ der Vakuumselektrodynamik ebenfalls die Gleichungen (1.6). Trotzdem besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den Tensoren $v_{,\varrho\sigma}$ und $F_{,\varrho\sigma}$. Das H in Satz 1 liefert nämlich nicht die Maxwellschen Gleichungen 2. Art für $v_{,\varrho\sigma}$ und dementsprechend kann dieser Tensor nicht aus einem Vektorpotential genommen werden.

Ein weiteres Ziel für die vorliegende Arbeit ergab sich aus der Feststellung, dass im Rahmen unserer Theorie ableitungsfreie Invarianten existieren. Da solche Invarianten in der Wellenmechanik eine wesentliche Rolle spielen, stellt sich die Frage, ob in der linearen Feldtheorie Wellengleichungen gebildet werden können.

Tatsächlich ist dies der Fall, denn es gibt folgende Aussage:

Satz 2: Ergänzt man die Wirkungsfunktion H von Satz 1 durch eine ableitungsfreie Invariante J gemäss dem Ansatz

$$W \equiv H + A^{-2} J \,, \tag{1.7}$$

so tritt anstelle des Systems (1.6) das System

$$\square\, v_{,\varrho\sigma} + a^{-2} v_{,\varrho\sigma} = 0 \,. \tag{1.8}$$

Dabei sind A und a universelle Längen, die miteinander durch die Relation

$$a = \sqrt{\varepsilon}\, A \tag{1.9}$$

verknüpft sind.

Offenbar wird das Gravitationsfeld umso weniger gestört, je grösser A und je kleiner ε ist. Wählt man also für A den Weltradius und für ε eine sehr kleine Zahl, so kann a eine atomare Länge annehmen.

Wir befassen uns zuerst mit Satz 1. Die Hauptarbeit liegt in der Entwicklung der zu seiner Begründung erforderlichen Hilfsmittel.

§2. Die Feldgleichungen

In meiner letzten Arbeit habe ich die Feldgleichungen in Gestalt von Formentensoren geschrieben. Dies ist zweckmässig, wenn man die allgemeinen Zusammenhänge überblicken oder Felder von ganz ausgezeichneter Symmetrie behandeln will. Sobald man es aber mit Aufgaben zu tun hat, zu deren Bearbeitung Näherungen erforderlich sind, empfiehlt es sich, die Feldgleichungen in Gestalt von Koordinatentensoren zu schreiben.

Den zu einem kovarianten Formentensor 2. Stufe $T_{\lambda\mu,}$ gehörigen Koordinatentensor $T_{,\varrho\sigma}$ erhält man definitionsgemäss durch die Identität

$$T_{,\varrho\sigma} \equiv g^{\lambda,}{}_{,\varrho}\, g^{\mu,}{}_{,\sigma}\, T_{\lambda\mu,}\,. \tag{2.1}$$

Da wir nun die zu einer beliebigen Kombination

$$H \equiv \underset{1}{\Lambda}\,\underset{1}{H} + \underset{2}{\Lambda}\,\underset{2}{H} + \underset{3}{\Lambda}\,\underset{3}{H} \tag{2.2}$$

gehörigen Feldgleichungsterme

$$W_{\lambda\mu,} \equiv \sum_{i=1}^{3} \underset{i}{\Lambda}\, \underset{i}{W}_{\lambda\mu,} \tag{2.3}$$

schon kennen[2]), erhalten wir

$$W_{,\varrho\sigma} \equiv \sum_{i=1}^{3} \underset{i}{\Lambda}\, \underset{i}{W}_{,p\sigma} \tag{2.4}$$

und die Aufgabe reduziert sich auf die Ermittlung der einzelnen $\underset{i}{W}_{,p\sigma}$.

Für diese und ähnliche Umformungen wichtig sind folgende Relationen:

$$\partial_{,\nu}\, g^{\lambda,}{}_{,\mu} = \mathfrak{f}^{\lambda,}{}_{,\nu\mu} \tag{2.5$_1$}$$

$$\partial_{,\nu}\, g_{\lambda,}{}^{,\mu} = g_{\lambda,}{}^{,\alpha}\, \mathfrak{f}^{,\mu\cdot\cdot}_{,\cdot\alpha\nu} \tag{2.5$_2$}$$

$$\partial_{,\nu}\, g^{\lambda,\nu}_{,} = \mathfrak{f}_{\lambda,} \tag{2.5$_3$}$$

$$\partial_{,\nu}\, G_{,\lambda\mu} = \mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\lambda\nu\mu} + \mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\mu\nu\lambda} \tag{2.6$_1$}$$

$$\partial_{,\nu}\, G^{,\lambda\mu} = -\left(\mathfrak{f}^{,\lambda\cdot\mu}_{,\cdot\nu\cdot} + \mathfrak{f}^{,\mu\cdot\lambda}_{,\cdot\nu\cdot}\right) \tag{2.6$_2$}$$

$$\partial_{,\nu}\, G^{,\lambda\nu} = \mathfrak{f}^{,\lambda}\,. \tag{2.6$_3$}$$

Die Berechnung ergibt folgende Tabelle:

$$\underset{1}{H} \equiv \mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\alpha\beta\gamma}\, \mathfrak{f}^{,\alpha\beta\gamma}_{,\cdot\cdot\cdot} \qquad \underset{2}{H} \equiv \mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\beta\alpha\gamma}\, \mathfrak{f}^{,\gamma\alpha\beta}_{,\cdot\cdot\cdot} \qquad \underset{3}{H} \equiv \mathfrak{f}_{,\alpha}\, \mathfrak{f}^{,\alpha}\,, \tag{2.7a}$$

$$\underset{1}{W}_{,\varrho\sigma} \equiv 2\,(\partial_{,\alpha} + \mathfrak{f}_{,\alpha})\, \mathfrak{f}^{,\cdot\alpha\cdot}_{,\varrho\cdot\sigma} - 2\,\mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\varrho\alpha\beta}\, \mathfrak{f}^{,\cdot\alpha\beta}_{,\sigma\cdot\cdot} + 2\,\mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\varrho\alpha\beta}\, \mathfrak{f}^{\alpha\beta\cdot}_{\cdot\cdot\sigma} + 2\,\mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\alpha\beta\varrho}\, \mathfrak{f}^{,\alpha\beta\cdot}_{,\cdot\cdot\sigma} - G_{,\varrho\sigma}\underset{1}{H}\,, \tag{2.7b$_1$}$$

$$\underset{2}{W}_{,\varrho\sigma} \equiv (\partial_{,\alpha} + \mathfrak{f}_{,\alpha})\,(\mathfrak{f}^{,\cdot\alpha\cdot}_{,\sigma\cdot\varrho} + \mathfrak{f}^{,\alpha\cdot\cdot}_{,\cdot\varrho\sigma}) + \mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\alpha\beta\varrho}\, \mathfrak{f}^{,\cdot\alpha\beta}_{,\sigma\cdot\cdot} - \mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\alpha\beta\varrho}\, \mathfrak{f}^{,\alpha\beta\cdot}_{,\cdot\cdot\sigma} + 2\,\mathfrak{f}^{,\cdot\cdot\cdot}_{,\alpha\beta\varrho}\, \mathfrak{f}^{,\beta\alpha\cdot}_{,\cdot\cdot\sigma} - G_{,\varrho\sigma}\underset{2}{H}\,, \tag{2.7b$_2$}$$

$$\underset{3}{W}_{,\varrho\sigma} \equiv G_{,\varrho\sigma}\,\partial_{,\alpha}\,\mathfrak{f}^{,\alpha} - \partial_{,\varrho}\,\mathfrak{f}_{,\sigma} + \mathfrak{f}_{,\alpha}\,\mathfrak{f}^{,\alpha\cdot\cdot}_{,\cdot\varrho\sigma}\,. \tag{2.7b$_3$}$$

Aus dieser Tabelle kann man nun die Feldgleichungsterme $W_{,\varrho\sigma}$ für jede Kombination (2.2) ermitteln und anschliessend gemäss

$$U_{,\varrho\sigma} \equiv \frac{1}{2}\,(W_{,\varrho\sigma} + W_{,\sigma\varrho}) \qquad V_{,\varrho\sigma} \equiv \frac{1}{2}\,(W_{,\varrho\sigma} - W_{,\sigma\varrho}) \tag{2.8}$$

die Symmetrisierung vornehmen.

---

[2]) A.a.O. [3], §3.

Von den nach §1 in Betracht kommenden Möglichkeiten notieren wir nur das zu (1.1) gehörige $\underset{I}{V}_{,\varrho\sigma}$, weil es die fundamentale Eigenschaft besitzt, identisch zu verschwinden:

$$\underset{I}{V}_{,\varrho\sigma} \equiv (\partial_{,\alpha} - \mathfrak{f}_{,\alpha})\, \mathfrak{f}^{,\alpha\cdot\cdot}_{,\cdot\varrho\sigma} + \partial_{,\varrho}\, \mathfrak{f}_{,\sigma} - \partial_{,\sigma}\, \mathfrak{f}_{,\varrho} \equiv 0\,. \tag{2.9}$$

Die zu Satz 1, d.h. zur Wirkungsfunktion

$$H \equiv \underset{I}{H} + \varepsilon\,(\underset{II}{H} + \underset{III}{H}) \tag{2.10}$$

gehörigen symmetrisierten Feldgleichungen haben daher symbolisch abgekürzt folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \underset{I}{U}_{,\varrho\sigma} + \varepsilon\,(\underset{II}{U}_{,\varrho\sigma} + \underset{III}{U}_{,\varrho\sigma}) &= 0\,, \\ \varepsilon\,(\underset{II}{V}_{,\varrho\sigma} + \underset{III}{V}_{,\varrho\sigma}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Satz 1 besagt nun also, dass die zweite der Gleichungen (2.11) in erster Näherung und für verschwindendes Gravitationsfeld äquivalent sei mit (1.6).

§3. Invariantes Näherungsverfahren

Wir gehen aus von der Darstellung der Basismatrix $g^{\lambda,}_{\ ,\mu}$ als Produkt aus einer «Trägheitsmatrix» $t^{\lambda,}_{\ ,\mu}$ und einer Matrix $h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu}$ gemäss

$$g^{\lambda,}_{\ ,\mu} = t^{\lambda,}_{\ ,\alpha}\, h^{,\alpha\cdot}_{,\cdot\mu}\,, \tag{3.1}$$

wie wir sie schon in einer früheren Arbeit[3]) geschildert haben.

Diese Trägheitsmatrix repräsentiert im allgemeinsten Falle den Kosmos, in dem sich das Feld ausbreitet.

Im einfachsten Fall, auf den wir uns hier beschränken, ist $t^{\lambda,}_{\ ,\mu}$ eine Basismatrix des Lorentzraumes.

Die Trägheitsmatrix ist, wie ich vermute, zur Energiedarstellung unentbehrlich. Ihre spezielle Wahl bringt diejenige Symmetrie zum Ausdruck, welche man für die Energieverteilung in Aussicht nimmt.

Es ergibt sich somit der Schluss, dass zur Bestimmung eines Feldes die Trägheitsmatrix $t^{\lambda,}_{\ ,\mu}$ frei gewählt und hierauf die Matrix $h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu}$ aus den Feldgleichungen berechnet werden muss.

Wir können jetzt angeben, wie man zu einer 0^{ten} Näherung, das heisst zu einer strengen Lösung $h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu}$ der Feldgleichungen (2.11) für $\varepsilon = 0$, vermittels kleiner Änderungen dieser Lösung zu einer Näherungslösung der Feldgleichungen für kleine $\varepsilon \neq 0$ gelangt: Wir «variieren» die Basis der Grundlösung gemäss den Vorschriften

$$\delta t^{\lambda,}_{\ ,\mu} \equiv 0\,; \quad \delta h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu} \not\equiv 0\,, \tag{3.2}$$

denn die Symmetrie der Grundlösung muss sinngemäss erhalten bleiben.

Neben den in (3.1) enthaltenen Matrizen benötigen wir natürlich auch die Inversen oder – was für unsere Technik bequemer ist – deren Transponierte. Ich habe sie «Transverse» genannt und mit

$$g_{\lambda,}^{\ ,\mu}\,; \; t_{\lambda,}^{\ ,\mu} \text{ und } \bar{h}^{,\cdot\mu}_{,\lambda\cdot} \tag{3.3}$$

3) A.a.O. [2], §2.

bezeichnet, so dass sich aus (3.1) unmittelbar die Relation

$$g_{\lambda,}{}^{,\mu} = t_{\lambda,}{}^{,\alpha}\, \overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\alpha\cdot} \tag{3.4}$$

ergibt.

Wegen (3.2) folgt weiter aus (3.1) und (3.4)

$$\delta g^{\lambda,}{}_{,\mu} = t^{\lambda,}{}_{,\alpha}\, \delta h^{,\alpha\cdot}_{,\cdot\mu} \qquad \delta g_{\lambda,}{}^{,\mu} = t_{\lambda,}{}^{,\alpha}\, \delta\overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\alpha\cdot}\,. \tag{3.5}$$

Aus der Definition von $\overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\lambda\cdot}$ aber errechnet man

$$\delta\overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\lambda\cdot} = -\,\overline{h}{}^{,\cdot\alpha}_{,\lambda\cdot}\, \overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\beta\cdot}\, \delta h^{,\beta\cdot}_{,\cdot\alpha}\,. \tag{3.6}$$

Machen wir nun den Ansatz für die n^{te} Näherung

$$\delta h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu} \equiv \sum_{l=1}^{n} p_{l,}{}^{,\lambda\cdot}_{\cdot\mu}\, \varepsilon^{l} \tag{3.7}$$

$$\delta\overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\lambda\cdot} \equiv \sum_{l=1}^{n} \overline{p}_{l,}{}^{,\cdot\mu}_{\lambda\cdot}\, \varepsilon^{l}\,. \tag{3.$\overline{7}$}$$

So ergibt sich aus (3.6) die Rekursionsformel

$$\overline{p}_{n,}{}^{,\cdot\mu}_{\lambda\cdot} = -\,\overline{h}{}^{,\cdot\alpha}_{,\lambda\cdot}\, \Big(p_{n,}{}^{,\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\, \overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\beta\cdot} + \sum_{l=1}^{n-1} p_{n-l,}{}^{,\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\, \overline{p}_{l,}{}^{,\cdot\mu}_{\beta\cdot}\Big) \tag{3.8}$$

zur Berechnung der $\overline{p}_{n,}{}^{,\cdot\mu}_{\lambda\cdot}$ aus den $p_{l,}{}^{,\lambda\cdot}_{\cdot\mu}$.

Nun besitzen die Gleichungen (2.11) die strenge Lösung $h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu} \equiv \delta^{\lambda}_{\mu}$. Wählen wir dieselbe als Grundlösung, so vereinfacht sich wegen $\overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\lambda\cdot} = \delta^{\mu}_{\lambda}$ (3.6) zu

$$\delta\overline{h}{}^{,\cdot\mu}_{,\lambda\cdot} = -\,\delta h^{,\mu\cdot}_{,\cdot\lambda} \tag{3.9}$$

und (3.8) geht über in

$$\overline{p}_{n,}{}^{,\cdot\mu}_{\lambda\cdot} = -\,p_{n,}{}^{,\mu\cdot}_{\cdot\lambda} - \sum_{l=1}^{n} p_{n-l,}{}^{,\alpha\cdot}_{\cdot\lambda}\, \overline{p}_{l,}{}^{,\cdot\mu}_{\alpha\cdot}\,. \tag{3.10}$$

Eine Näherung heisse «stark» oder «schwach», je nachdem für die 0^{te} Näherung gilt $h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu} \not\equiv \delta^{\lambda}_{\mu}$ oder $h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu} \equiv \delta^{\lambda}_{\mu}$.

Für starke Näherungen wird der Formelapparat schon in der 1. Näherung sehr kompliziert. Doch lassen sich unsere Thesen vermittels der 1. schwachen Näherung beweisen. Ich beschränke daher die weitere Entwicklung auf diesen Fall.

In 0^{ter} Näherung haben wir also

$$g^{\lambda,}{}_{,\mu} \equiv t^{\lambda,}{}_{,\mu}\,; \quad g_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv t_{\lambda,}{}^{,\mu} \tag{3.11}$$

und der metrische Tensor

$$G_{,\varrho\sigma} \equiv e_{\alpha}\, g^{\alpha,}{}_{,\varrho}\, g^{\alpha,}{}_{,\sigma} \tag{3.12}$$

spezialisiert sich auf denjenigen der Lorentzwelt

$$L_{,\varrho\sigma} \equiv e_{\alpha}\, t^{\alpha,}{}_{,\varrho}\, t^{\alpha,}{}_{,\sigma}\,. \tag{3.13}$$

Die allgemein durch

$$\gamma^{\lambda,\cdot\cdot}_{\cdot,\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) \qquad \mathfrak{f}^{\lambda\cdot\cdot}_{\cdot\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g^{\lambda,}{}_{,\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) \tag{3.14$_1$}$$

und

$$\gamma^{,\lambda\cdot\cdot}_{,\cdot\mu\nu} \equiv g_{\alpha,}{}^{,\lambda}\, \gamma^{\alpha,\cdot\cdot}_{\cdot,\mu\nu}\,; \quad \mathfrak{f}^{,\lambda\cdot\cdot}_{,\cdot\mu\nu} \equiv g_{\alpha,}{}^{,\lambda}\, \mathfrak{f}^{\alpha,\cdot\cdot}_{\cdot,\mu\nu} \tag{3.14$_2$}$$

definierten Dreizeigersymbole und Feldstärken spezialisieren sich auf

$$t^{,\lambda\cdot\cdot}_{,\cdot\mu\nu} \equiv t_{\alpha,}{}^{,\lambda}\, t^{\alpha,}{}_{,\mu\nu}\,; \quad \mathfrak{f}^{,\lambda\cdot\cdot}_{,\cdot\mu\nu} \equiv 0\,. \tag{3.15}$$

Für die 1. Näherung erhalten wir aus (3.5, 7, 10)

$$\delta g^{\lambda,}{}_{,\mu} = \varepsilon\, t^{\lambda,}{}_{,\alpha}\, p^{,\alpha\,\cdot}_{,\,\cdot\,\mu}\,; \quad \delta g_{\lambda,}{}^{,\mu} = -\,\varepsilon\, t_{\lambda,}{}^{,\alpha}\, p^{,\mu\,\cdot}_{,\,\cdot\,\alpha}\,. \tag{3.16}$$

Aus der weiteren Entwicklung kann man unschwer entnehmen, dass die 1. Näherung von der Tensoranalysis der Lorentzwelt beherrscht wird, was folgende Vereinfachungen mit sich bringt:

1. Die vertikalen Zeigerverschiebungen werden von Tensor $L_{p\sigma}$ besorgt.
2. Für die kovariante Ableitung gelten die Regeln

$$\partial_{,\varrho}\,\partial_{,\sigma} \equiv \partial_{,\sigma}\,\partial_{,\varrho}\,; \quad \partial_{,\tau}\,L_{,\varrho\sigma} \equiv 0\,. \tag{3.17}$$

Im Sinne von 1 ergibt sich z.B.

$$\delta G_{,\varrho\sigma} = \varepsilon\,(p_{,\varrho\sigma} + p_{,\sigma\varrho})\,.$$

Setzen wir also

$$p_{,\varrho\sigma} = u_{,\varrho\sigma} + v_{,\varrho\sigma} \qquad p_{,\sigma\varrho} = u_{,\varrho\sigma} - v_{,\varrho\sigma}\,, \tag{3.18}$$

so folgt

$$\delta G_{,\varrho\sigma} = 2\,\varepsilon\, u_{,\varrho\sigma}\,; \quad \delta G^{,\varrho\sigma} = -\,2\,\varepsilon\, u^{,\varrho\sigma}\,. \tag{3.19}$$

Die Berechnung der Variationen der Feldgrössen (3.14_2) schliesslich führt auf folgende Formeln:

$$\delta\gamma^{,\lambda\,\cdot\,\cdot}_{,\,\cdot\,\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_{,\mu}\, p^{,\lambda\,\cdot}_{,\,\cdot\,\nu} + \partial_{,\nu}\, p^{,\lambda\,\cdot}_{,\,\cdot\,\mu})\,; \quad \delta\gamma_{,\lambda} = \frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_{,\lambda}\, p + \partial_{,\alpha}\, p^{,\alpha\,\cdot}_{,\,\cdot\,\lambda}) \tag{3.20_1}$$

$$\delta\mathfrak{f}^{,\lambda\,\cdot\,\cdot}_{,\,\cdot\,\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_{,\mu}\, p^{,\lambda\,\cdot}_{,\,\cdot\,\nu} - \partial_{,\nu}\, p^{,\lambda\,\cdot}_{,\,\cdot\,\mu})\,; \quad \delta\mathfrak{f}_{,\lambda} = \frac{\varepsilon}{2}\,(\partial_{,\lambda}\, p - \partial_{,\alpha}\, p^{,\alpha\,\cdot}_{,\,\cdot\,\lambda})\,. \tag{3.20_2}$$

Dabei bedeutet hier $\partial_{,\lambda}$ die kovariante Ableitung in bezug auf die Basis (3.11), also mit den Dreizeigergrössen $t^{,\lambda\,\cdot\,\cdot}_{,\,\cdot\,\mu\nu}$ und die Terme $\gamma_{,\lambda}$; $\mathfrak{f}_{,\lambda}$ und p sind definiert durch die Identitäten

$$\gamma_{,\lambda} \equiv \gamma^{,\alpha\,\cdot\,\cdot}_{,\,\cdot\,\lambda\alpha}\,; \quad \mathfrak{f}_{,\lambda} \equiv \mathfrak{f}^{,\alpha\,\cdot\,\cdot}_{,\,\cdot\,\lambda\alpha}\,; \quad p \equiv p^{,\alpha\,\cdot}_{,\,\cdot\,\alpha} \equiv n^{,\alpha\,\cdot}_{,\,\cdot\,\alpha} \equiv n\,. \tag{3.21}$$

Gemäss den in der Lorentzwelt wirksamen Vereinfachungen 1 und 2 können die Koordinatenzeiger mühelos herauf- und heruntergezogen werden. Für diese Technik empfiehlt sich daher die Einführung des Symbols

$$\partial^{,\lambda} \equiv L^{,\lambda\alpha}\,\partial_{,\alpha}\,. \tag{3.22}$$

§4. Die Feldgleichungen in erster Näherung

Die zu einer beliebigen Kombination (2.4) gehörigen Feldgleichungen der ersten Näherung lauten symbolisch

$$\delta W_{,\varrho\sigma} = \sum_{i=1}^{3} \underset{i}{\Lambda}\, \delta \underset{i}{W}_{,\varrho\sigma} \tag{4.1}$$

und unsere nächste Aufgabe besteht darin, die expliziten Ausdrücke für die Terme $\delta \underset{i}{W}_{,\varrho\sigma}$ zu ermitteln.

Da, wie elementare Rechnungen zeigen, kovariante Ableitung ∂ und «Variation» δ in erster Näherung miteinander vertauschbar sind, ergeben sich aus der Tabelle (2.7) folgende Ausdrücke:

$$\underset{1}{\delta W}_{,\varrho\sigma} \equiv 2\, \partial_{,\alpha}\, (\delta \mathfrak{f}_{,\varrho\cdot\sigma}^{,\cdot\alpha\cdot})\,, \tag{4.2$_1$}$$

$$\underset{2}{\delta W}_{,\varrho\sigma} \equiv \partial_{,\alpha} (\delta \mathfrak{f}_{,\sigma\cdot\varrho}^{,\cdot\alpha\cdot} + \delta \mathfrak{f}_{,\cdot\varrho\sigma}^{,\alpha\cdot\cdot})\,, \tag{4.2$_2$}$$

$$\underset{3}{\delta W}_{,\varrho\sigma} \equiv L_{,\varrho\sigma}\, \partial_{,\alpha}\, (\delta \mathfrak{f}^{,\alpha}) - \partial_{,\varrho} (\delta \mathfrak{f}_{,\sigma})\,. \tag{4.2$_3$}$$

Gestützt auf (3.20$_2$) erhält man daraus

$$\underset{1}{\delta W}_{,\varrho\sigma} \equiv e\, (\partial_{,\alpha}\, \partial^{,\alpha}\, p_{,\varrho\sigma} - \partial_{,\sigma}\, \partial^{,\alpha}\, p_{,\varrho\alpha})\,, \tag{4.3$_1$}$$

$$\underset{2}{\delta W}_{,\varrho\sigma} \equiv \frac{\varepsilon}{2}\, (\partial_{,\alpha}\, \partial^{,\alpha}\, p_{,\sigma\varrho} - \partial_{,\varrho}\, \partial^{,\alpha}\, p_{,\sigma\alpha}) + \frac{\varepsilon}{2}\, (\partial_{,\varrho}\, \partial^{,\alpha}\, p_{,\alpha\sigma} - \partial_{,\sigma}\, \partial^{,\alpha}\, p_{,\alpha\varrho})\,, \tag{4.3$_2$}$$

$$\underset{3}{\delta W}_{,\varrho\sigma} \equiv \frac{\varepsilon}{2}\, L_{,\varrho\sigma}\, (\partial_{,\alpha}\, \partial^{,\alpha}\, p - \partial^{,\alpha}\, \partial^{,\beta}\, p_{,\beta\alpha}) - \frac{\varepsilon}{2}\, (\partial_{,\varrho}\, \partial_{,\sigma}\, p - \partial_{,\varrho}\, \partial^{,\alpha}\, p_{,\alpha\sigma})\,. \tag{4.3$_3$}$$

Der zu beweisende Satz 1 bezieht sich auf die zu (2.11) gehörigen Näherungsgleichungen 1. Ordnung, die offenbar äquivalent sind mit dem System

$$\underset{I}{\delta U}_{,\varrho\sigma} = 0\,; \quad \underset{II}{\delta V}_{,\varrho\sigma} + \underset{III}{\delta V}_{,\varrho\sigma} = 0\,. \tag{4.4}$$

Die in ihm enthaltenen Terme gewinnen wir, indem wir die Ausdrücke (4.3) entsprechend den Definitionen (1.1), (1.3) und (1.4) kombinieren und hierauf gemäss (2.8) symmetrisieren.

Um die Ergebnisse übersichtlich schreiben zu können, empfiehlt es sich, folgende Symbole einzuführen:

1. Die Vektoren

$$u_{,\varrho} \equiv \partial^{,\alpha}\, u_{,\varrho\alpha}; \quad v_{,\varrho} \equiv \partial^{,\alpha}\, v_{,\varrho\alpha}\,. \tag{4.5$_1$}$$

2. Die Invariante

$$w \equiv \partial^{,\alpha}\, \partial^{,\beta}\, u_{,\alpha\beta} \tag{45$_2$}$$

3. Den absolut kovarianten d'Alembertoperator

$$\Box \equiv \partial_{,\alpha}\, \partial^{,\alpha} \equiv L^{,\alpha\beta}\, \partial_{,\alpha}\, \partial_{,\beta}\,. \tag{4.5$_3$}$$

Die Berechnung liefert dann für die Terme des Systems (4.4) folgende Ausdrücke:

$$\underset{I}{\delta U}_{,\varrho\sigma} \equiv \varepsilon \left\{ \begin{aligned} &\Box\, u_{,p\sigma} + \partial_{,p}\, \partial_{,\sigma}\, u \\ &- (\partial_{,p}\, u_{,\sigma} + \partial_{,\sigma}\, u_{,\varrho}) \\ &+ L_{,p\sigma}\, (w - \Box\, u) \end{aligned} \right\}, \tag{4.6$_1$}$$

$$\underset{II}{\delta V}_{,p\sigma} \equiv \varepsilon\, (\Box\, v_{,\varrho\sigma} + \partial_{,\varrho}\, v_{,\sigma} - \partial_{,\sigma}\, v_{,\varrho})\,, \tag{4.6$_2$}$$

$$\underset{III}{\delta V}_{,p\sigma} \equiv \varepsilon \left\{ \begin{aligned} &\partial_{,\sigma}\, v_{,\varrho} - \partial_{,\varrho} v_{,\sigma} \\ &+ \partial_{,\varrho}\, u_{,\sigma} - \partial_{,\sigma}\, u_{,\varrho} \end{aligned} \right\}. \tag{4.6$_3$}$$

Für die Divergenzen der Feldvektoren $u_{,\varrho}$ und $v_{,\varrho}$ gelten, wie man leicht feststellt, die Identitäten

$$\partial^{,\varrho} u_{,\varrho} \equiv \partial_{,\varrho} u^{,\varrho} \equiv w \,, \tag{4.7$_1$}$$

$$\partial^{,\varrho} v_{,\varrho} \equiv \partial_{,p} v^{,\varrho} \equiv 0 \,. \tag{4.7$_2$}$$

Dem System (4.4) können wir jetzt folgende Gestalt geben:

$$\Box\, u_{,\varrho\sigma} - (\partial_{,\varrho} u_{,\sigma} + \partial_{,\sigma} u_{,\varrho}) + \partial_{,\varrho} \partial_{,\sigma} u + L_{,\varrho\sigma} (w - \Box\, u) = 0 \tag{4.8$_1$}$$

$$\Box\, v_{,\varrho\sigma} + \partial_{,\varrho} u_{,\sigma} - \partial_{,\sigma} u_{,\varrho} = 0 \,. \tag{4.8$_2$}$$

Die $u_{,\varrho\sigma}$ repräsentieren das Gravitationsfeld, das in erster Näherung durch die Gleichungen (4.8$_1$) bestimmt ist. Aus (4.8$_2$) folgt also unmittelbar Satz 1.

§5. Ableitungsfreie Invarianten

Das Auftreten des Tensors $h^{,\lambda}_{,\cdot\,\mu}$ lässt unmittelbar erkennen, dass im Rahmen der linearen Feldtheorie ableitungsfreie Invarianten existieren. Eine erste Serie wird gegeben durch

$$\underset{1}{J} \equiv h^{,\alpha}_{,\cdot\,\alpha} \,; \quad \underset{2}{J} \equiv h^{,\alpha}_{,\cdot\,\beta}\, h^{,\beta}_{,\cdot\,\alpha} \text{ etc.} \tag{5.1}$$

Eine zweite Serie ergibt sich aus den Transversen gemäss

$$\underset{1}{\bar{J}} \equiv \bar{h}^{,\cdot\,\alpha}_{,\alpha\cdot} \,; \quad \underset{2}{\bar{J}} \equiv \bar{h}^{,\cdot\,\beta}_{,\alpha\cdot}\, \bar{h}^{,\cdot\,\alpha}_{,\beta\cdot} \quad \text{etc.} \tag{5.2}$$

Da es in der quadratischen Feldtheorie derartige Invarianten nicht gibt, ist von besonderem Interesse die Frage, was sich ergibt, wenn man etwa die Wirkungsfunktion (2.10) durch eine ableitungsfreie Invariante J ergänzt gemäss dem Ansatz

$$W \equiv \underset{I}{H} + \varepsilon\, (\underset{II}{H} + \underset{III}{H}) + A^{-2}\, J \,. \tag{5.3}$$

Die zugehörigen Feldgleichungen schreiben wir in Analogie zu (2.11) in der Gestalt

$$\underset{I}{U}_{,\varrho\sigma} + \varepsilon\, (\underset{II}{U}_{,\varrho\sigma} + \underset{III}{U}_{,\varrho\sigma}) + A^{-2}\, \underset{J}{U}_{,\varrho\sigma} = 0 \,, \tag{5.4$_1$}$$

$$\varepsilon\, (\underset{II}{V}_{,\varrho\sigma} + \underset{III}{V}_{,\varrho\sigma}) + A^{-2}\, \underset{J}{V}_{,\varrho\sigma} = 0. \tag{5.4$_2$}$$

Wie man aus der ersten Gleichung unmittelbar ersieht, muss A eine grosse Länge sein, damit das Gravitationsfeld nicht unzulässig gestört wird.

Die entsprechenden Näherungsgleichungen 1. Ordnung können wir in Analogie zu (4.4) folgendermassen schreiben:

$$\delta \underset{I}{U}_{,\varrho\sigma} = 0 \tag{5.5$_1$}$$

$$\delta \underset{II}{V}_{,\varrho\sigma} + \delta \underset{III}{V}_{,\varrho\sigma} + a^{-2}\, \delta \underset{J}{V}_{,\varrho\sigma} = 0 \,. \tag{5.5$_2$}$$

Dabei ist natürlich

$$a = \sqrt{\varepsilon}\, A \tag{5.6}$$

wiederum eine Länge.

Der Einfluss der Ergänzung vermittels J ist also in erster Näherung ganz in dem Term $\delta \underset{J}{V}_{,\varrho\sigma}$ enthalten.

Die Analyse zeigt, dass dieser Einfluss in erster Näherung für alle Invarianten abgesehen vom Vorzeichen im wesentlichen derselbe ist. Ich begnüge mich daher mit einer Detailangabe für den einfachsten Fall:

$$J \equiv \underset{1}{\bar{J}} \text{ ergibt } \delta \underset{J}{V}_{,\varrho\sigma} \equiv \varepsilon\, v_{,\varrho\sigma}\,. \tag{5.7}$$

Nach (4.6_2 und 4.6_3) geht also (5.5_2) für verschwindendes Gravitationsfeld über in

$$\Box\, v_{,\varrho\sigma} + a^{-2}\, v_{,\varrho\sigma} = 0\,. \tag{5.8}$$

womit nun auch Satz 2 bewiesen ist.

Zur Erleichterung des Lesers füge ich noch einige Hinweise über die Herleitung von (5.7) hinzu.

Die zu einer beliebigen Wirkungsfunktion W gehörigen Feldgleichungen lauten

$$\mathfrak{W}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial(\partial g^{\lambda}{}_{,\mu}/\partial x^\nu)}\right\} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g^{\lambda}{}_{,\mu}} = 0\,. \tag{5.9}$$

Der durch J bewirkte Zusatz in den Feldgleichungen ist also gegeben durch

$$A^{-2}\, \underset{J}{\mathfrak{W}}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv -\, A^{-2}\, \frac{\partial(g\, J)}{\partial g^{\lambda}{}_{,\mu}}\,. \tag{5.10}$$

Von der Tensordichte zum Tensor übergehend haben wir also

$$\underset{J}{W}_{\lambda,}{}^{,\mu} \equiv -\, g^{-1}\, \frac{\partial(g\, J)}{\partial g^{\lambda}{}_{,\mu}} \equiv -\, \frac{\partial J}{\partial g^{\lambda}{}_{,\mu}} - J\, g_{\lambda,}{}^{,\mu} \tag{5.11}$$

zu berechnen. Da nun die J Funktionen der $h^{,\lambda}_{,\cdot\mu}$ bzw. $\bar{h}^{,\cdot\mu}_{,\lambda\cdot}$ sind, benötigt man zuerst die Auflösungen von (3.1) bzw. (3.4) nach diesen Grössen:

$$h^{,\lambda\cdot}_{,\cdot\mu} = t_{\alpha,}{}^{,\lambda}\, g^{\alpha,}{}_{,\mu}\,; \quad \bar{h}_{\lambda\cdot}^{\cdot\mu} = t^{\alpha,}{}_{,\lambda}\, g_{\alpha,}{}^{,\mu}\,. \tag{5.12}$$

Hierauf ergeben sich die Formeln

$$\frac{\partial h^{,\alpha\cdot}_{,\cdot\beta}}{\partial g^{\lambda}{}_{,\mu}} = t_{\lambda,}{}^{,\alpha}\, \delta^{\mu}_{\beta} \qquad \frac{\partial \bar{h}^{,\cdot\beta}_{,\alpha\cdot}}{\partial g^{\lambda}{}_{,\mu}} = -\, t_{\lambda,}{}^{,\gamma}\, \bar{h}^{,\cdot\beta}_{,\gamma\cdot}\, \bar{h}^{,\cdot\mu}_{,\alpha\cdot} \tag{5.13}$$

mit deren Hilfe man für jedes J (5.11) berechnen kann. Speziell in unserem Falle $J \equiv \bar{J}_1$ erhält man

$$\underset{\bar{J}_1}{W}_{\lambda,}{}^{,\mu} = t_{\lambda,}{}^{,\alpha}\, \bar{h}^{,\cdot\beta}_{,\alpha\cdot}\, \bar{h}^{,\cdot\mu}_{,\beta\cdot} - \underset{1}{\bar{J}}\, g_{\lambda,}{}^{,\mu}$$

und weiter

$$\underset{\bar{J}_1}{W}_{,\varrho\sigma} = h_{,\varrho\sigma} - \underset{1}{\bar{J}}\, G_{,\varrho\sigma}$$

und hieraus schliesslich

$$\underset{\bar{J}_1}{V}_{,\varrho\sigma} = \frac{1}{2}\,(h_{,\varrho\sigma} - h_{,\sigma\varrho})\,. \tag{5.14}$$

Nach (3.7) und (3.18) ist die 1. Näherung dazu gegeben durch

$$\delta \underset{\bar{J}_1}{V}_{,\varrho\sigma} = \varepsilon\, v_{,\varrho\sigma}\,. \tag{5.7}$$

§6. Schlussbemerkungen

Wie schon im Anschluss an die Gleichungen (1.6) erwähnt wurde, kann der Tensor $v_{,\varrho\sigma}$ nicht mit der elektrischen Feldstärke $F_{,\varrho\sigma}$ identifiziert werden. Ein weiteres Argument in dieser Richtung ergibt sich aus der Tatsache, dass in unserer Theorie die Komponenten $v_{,\varrho\sigma}$ die Rolle von Potentialen spielen. In anderen Worten: Die Ergänzung der Theorie gemäss Satz 1 liefert sicher keinen direkten Ersatz für die Vakuumselektrodynamik.

Damit komme ich zurück auf die Ergänzung gemäss Satz 2. Die daselbst gegebene Herleitung der Wellengleichungen (1.8) mag auf den ersten Blick phantastisch anmuten. Ich möchte daher zum Schluss diejenigen Argumente zusammenstellen, welche mir diese Herleitung als beinahe zwingend erscheinen lassen.

1. Die Annahme einer grossen Länge, nämlich des Weltradius A, ist nach dem heutigen Stande der Kosmologie eine Notwendigkeit.

2. Die Einführung einer sehr kleinen reinen Zahl ε bei der Ausfüllung der antisymmetrischen Lücke ist unumgänglich, damit das Gravitationsfeld nicht unzulässig gestört wird.

3. Nachdem die Notwendigkeit der Vereinheitlichung anerkannt wird, ist die Heranziehung ableitungsfreier Invarianten geboten, sobald solche zur Verfügung stehen.

4. Einzig dank der fundamentalen Identität (2.9) ergibt sich bei dieser Ergänzung zwangsläufig eine kleine Länge

$$a = \sqrt{\varepsilon}\, A\,. \tag{6.1}$$

5. Da jede ableitungsfreie Invariante in erster Näherung bei verschwindendem Gravitationsfeld Gleichungen vom Typus (1.8) liefert, bleibt als einzige Willkür die Wahl des Vorzeichens von J in (1.7).

Die Auswahl einer besonders geeigneten Invarianten J bildet natürlich eine Aufgabe der weiteren Entwicklung.

Literaturverzeichnis

[1] Z. Physik *152*, 319–321 (1958).
[2] Helv. phys. Acta *37*, 317–328 (1964).
[3] Helv. phys. Acta *38*, 215–226 (1965).