

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 39 (1966)
Heft: 8

Artikel: Reellanalytische kovariante Funktionen und ihre analytische Fortsetzung ins Komplexe
Autor: Seiler, Rudolf
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113709>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Reellanalytische kovariante Funktionen und ihre analytische Fortsetzung ins Komplexe

von **Rudolf Seiler**

Seminar für theoretische Physik, ETH, Zürich

(6. IX. 66)

Abstract. In trying to develop an S -Matrix Theory based only on physical assumptions H. STAPP has formulated two theorems about the analytic continuation of real analytic Lorentz-covariant functions. This paper contains a generalisation of these theorems with regard to orthogonal and symplectic groups.

Einleitung

In einer Arbeit von H. STAPP [1]¹⁾ wird der Versuch unternommen, eine S -Matrix Theorie ausschliesslich auf physikalischer Grundlage zu bauen. Es stellt sich dabei das Problem, die zunächst nur in einem reellen Gebiet definierte analytische und lorentz-kovariante Streuamplitude komplex analytisch fortzusetzen. Diese Frage, die bereits teilweise von H. STAPP gelöst wurde, bildet in der Verallgemeinerung auf beliebige orthogonale und symplektische Gruppen den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Nach einem vorbereitenden Abschnitt wird im zweiten Paragraphen das Verhalten im Kleinen der analytischen Fortsetzung einer reell analytischen, kovarianten Funktion von mehreren Vektorvariablen untersucht. Das in Satz A zusammengefasste Resultat entspricht einem von H. STAPP formulierten, aber nicht – wie R. JOST²⁾ zeigte – vollständig bewiesenen, Theorem³⁾. D. WILLIAMS und P. MINKOWSKI [7] führten die Behauptung auf zwei Vermutungen zurück, die hier bewiesen werden (Satz 1 und Satz 2). Dabei spielen die Zusammenhängeverhältnisse der betrachteten Isometriegruppe eine wesentliche Rolle. Diese werden in einem Anhang diskutiert. Es zeigt sich, dass die Lorentzgruppe unter den klassischen Liegruppen bereits die maximale Anzahl von Zusammenhangskomponenten besitzt. Es ist dies der Grund, weshalb Satz A für die orthogonalen und symplektischen Gruppen in gleicher Weise formuliert werden kann.

Im dritten Abschnitt lösen wir die folgende Frage: Welche geometrischen Eigenschaften muss ein reelles Gebiet haben, damit jede in diesem Gebiet reell analytische

¹⁾ Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 664.

²⁾ Vgl. Abschnitt 2.1, Beispiel b.

³⁾ Theorem 1 in [1].

und reell kovariante Funktion mehrerer Vektorvariablen kovariant in eine komplexe Umgebung fortgesetzt werden kann? Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen werden in Satz B angegeben. Ein besonders einfaches Resultat gilt für symplektische und orthogonale Gruppen zum Trägheitsindex Null (Satz 7) sowie für Lorentzgruppen (Satz von H. STAPP).

Meinen verehrten Lehrern Herrn Prof. RES JOST und Herrn Prof. MARKUS FIERZ, die diese Arbeit ermöglichten, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank ausdrücken. Ganz besonders dankbar bin ich Herrn Prof. RES JOST und Herrn Dr. PETER MINKOWSKI für die vielen hilfreichen und anregenden Diskussionen. Allen Mitgliedern des Institutes bin ich für wertvolle Hinweise, geduldiges Abhören oder Schreiben des Manuskriptes und dem schweizerischen Nationalfonds für seine finanzielle Unterstützung zu Dank verpflichtet.

1. Klassische Liegruppen [2] [3] und tensorwertige, analytische Funktionen [4] [5] [6]

1.1. Die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, \alpha)$ ist die Menge der Automorphismen des n -dimensionalen Vektorraumes $V(\alpha)$, über dem Körper α der reellen oder der komplexen Zahlen. Zwischen $GL(n, \alpha)$ und der topologischen Gruppe der $n \times n$ Matrizen mit nicht verschwindender Determinante besteht ein Isomorphismus i_b . Trotzdem i_b von der Wahl der Basis b in $V(\alpha)$ abhängt, ist die so in $GL(n, \alpha)$ induzierte Topologie von b unabhängig.

Die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 wird durch i_b auf die spezielle lineare Gruppe $SL(n, \alpha)$ in $GL(n, \alpha)$ abgebildet. Diese Charakterisierung von $SL(n, \alpha)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis in $V(\alpha)$.

Die Topologie in $V(\alpha)$ – induziert durch ein Euklidisches oder unitäres Skalarprodukt – ist unabhängig vom Koordinatensystem.

1.2. In $V(\alpha)$ sei ein nicht ausgeartetes bilineares symmetrisches (orthogonales) oder schiefsymmetrisches (symplektisches) Skalarprodukt gegeben. Die Menge der Elemente aus $GL(n, \alpha)$, die ein vorgegebenes Skalarprodukt invariant lässt, heisst die zum Skalarprodukt gehörige Isometriegruppe. Orthogonale Gruppen $O(n, \alpha)$ sind Isometriegruppen symmetrischer Skalarprodukte, symplektische Gruppen $Sp(n, \alpha)$ solche schiefsymmetrischer Skalarprodukte.

$GL(n, \alpha)$ induziert in $O(n, \alpha)$ und $Sp(n, \alpha)$ eine Topologie. Die Einskomponente $L^{(1)}(n, \alpha)$ einer klassischen Lieschen Gruppe $L(n, \alpha)$ enthält genau diejenigen Elemente, die durch einen stetigen Weg in $L(n, \alpha)$ mit der Einheit verbunden werden können (vgl. Anhang).

1.3. Es sei $W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$ der von den Vektoren w_1, \dots, w_s in $V(\alpha)$ aufgespannte Teilraum. Wenn in $V(\alpha)$ ein Skalarprodukt gegeben ist, kann der Orthogonalraum W^\perp definiert werden:

$$W^\perp = \{x \mid x \in V(\alpha), (x, w) = 0, \forall w \in W\}. \quad (1)$$

Der Durchschnitt von W und W^\perp heisst das Radikal von W

$$\text{rad } W = W \cap W^\perp. \quad (2)$$

Radikale sind *isotrope Teilräume*, d. h. Teilräume, die nur Nullvektoren l enthalten

$$(l, l) = 0 .$$

Vektorräume mit verschwindendem Radikal heissen *nichtsingulär*.

Sei σ eine isometrische Abbildung eines nichtsingulären Raumes auf sich. σ heisst eine *Rotation*, wenn $\det \sigma = +1$, oder eine *Spiegelung*, wenn $\det \sigma = -1$.

Zu jedem Nullvektor p in $V(\alpha)$, existiert ein konjugierter Nullvektor q in $V(\alpha)$,

$$(p, p) = (q, q) = 0 \quad (p, q) = 1$$

p und q spannen in $V(\alpha)$ eine *hyperbolische Ebene* auf

$$H = \langle p, q \rangle . \tag{3}$$

Jeder Teilraum W in $V(\alpha)$ kann in die direkte Summe seines Radikals und eines nichtsingulären Teilraumes H zerlegt werden

$$W = \text{rad } W \perp H . \tag{4}$$

Wenn in $V(\alpha)$ eine symplektische Geometrie gegeben ist, zerfällt H weiter in eine endliche direkte Summe zueinander orthogonaler, hyperbolischer Ebenen

$$W = \text{rad } W \perp H_1 \perp \dots \perp H_k . \tag{5a}$$

Ist in $V(\alpha)$ ein orthogonales Skalarprodukt gegeben, zerfällt H in eine endliche direkte Summe zueinander orthogonaler eindimensionaler Unterräume

$$W = \text{rad } W \perp \langle g_1 \rangle \perp \dots \perp \langle g_s \rangle . \tag{5b}$$

Der *Trägheitsindex* τ des im reellen Vektorraum $V(\mathbb{R})$ definierten, nicht ausgearteten Skalarproduktes ist die maximale Dimension aller in $V(\mathbb{R})$ enthaltenen isotropen Unterräume.

1.4. Die l -fache direkte Summe

$$V^l(\alpha) = V(\alpha) \oplus \dots \oplus V(\alpha)$$

trage die übliche Topologie (1.1). Sei in $V(\alpha)$ ein Skalarprodukt definiert und L die entsprechende Symmetriegruppe. Die Wirkung von $A \in L(n, \alpha)$ auf ein Element $k \equiv (k_1, \dots, k_l) \in V^l(\alpha)$ ist durch

$$A k = (A k_1, \dots, A k_l) \tag{6}$$

definiert.

Wir betrachten ausserdem Transformationen $T \in GL(l, \alpha)$ die gemäss

$$(k T)_k = \sum_{s=1}^l k_s T_{sk} \tag{7}$$

auf $V^l(\alpha)$ wirken. $A \in L(n, \alpha)$ und $T \in GL(l, \alpha)$ kommutieren.

Sei nun $\mathbf{k} \in V^l(\alpha)$ gegeben; dann führen die Transformationen T in $\langle k_1, \dots, k_l \rangle$ eine neue Basis ein. Zu jedem $\mathbf{k} \in V^l(\alpha)$ lässt sich ein T so finden (5), dass

$$\mathbf{k} T = (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_b, 0 \dots 0) \quad (8)$$

$$\langle p_1 \dots p_b \rangle = \text{rad } \langle \mathbf{k} \rangle \quad \dim \langle \mathbf{k} \rangle = r + b$$

und der nicht singuläre Raum $\langle t_1 \dots t_r \rangle$ je nach der Geometrie entweder in $r/2$ hyperbolische Ebenen zerfällt (5a)

$$\langle t_1, \dots, t_r \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle \perp \dots \perp \langle t_{r-1}, t_r \rangle \quad (9a)$$

oder dann in r 1-dimensionale, zueinander orthogonale Teilräume (5b) aufspaltet

$$\langle t_1, \dots, t_r \rangle = \langle t_1 \rangle \perp \dots \perp \langle t_r \rangle. \quad (9b)$$

(8) heisst im folgenden die *Normalform* des Punktes $\mathbf{k} \in V^l(\alpha)$.

Die Punkte $\mathbf{k} \in V^l(\alpha)$ und $\mathbf{k}' \in V^l(\alpha)$ heissen $L(n, \alpha)$ -äquivalent,

$$\mathbf{k} \sim \mathbf{k}' (L(n, \alpha))$$

wenn ein $\Lambda \in L(n, \alpha)$ existiert, derart dass

$$\mathbf{k}' = \Lambda \mathbf{k}.$$

1.5. Den folgenden *Satz von WITT* [3] werden wir häufig verwenden:

Satz: Seien $V(\alpha)$ und $V'(\alpha)$ zwei Vektorräume mit nichtsingulären Skalarprodukten (1.3). Es existiere eine isometrische Abbildung θ (1.2) von $V(\alpha)$ auf $V'(\alpha)$. Dann kann jede isometrische Abbildung Σ eines Teilraumes $U \subset V(\alpha)$ auf einen Teilraum $U' \subset V'(\alpha)$ zu einer Isometrie von $V(\alpha)$ auf $V'(\alpha)$ erweitert werden.

1.6. α sei der Körper der komplexen Zahlen. Dann charakterisiert die Dimension n des Vektorraumes $V(\mathbf{C})$ die orthogonalen und symplektischen Gruppen (1.2) bis auf Isomorphie eindeutig. Ist dagegen $V(\mathbf{R})$ der n -dimensionale Vektorraum über den reellen Zahlen, so zerfallen die orthogonalen Gruppen nach ihrem Trägheitsindex (1.3) in Äquivalenzklassen.

1.7. f sei eine komplexwertige Funktion auf einer analytischen Mannigfaltigkeit (X, π) . π projiziert X lokal topologisch in den n -dimensionalen, komplexen Zahlenraum \mathbf{C}^n .

f heisst in einem Punkte $x \in X$ *analytisch*, wenn $f \pi^{-1}$ in einer Umgebung $U(x)$ als Potenzreihe darstellbar ist.

f heisst in einer offenen und zusammenhängenden Menge $D \subset X$ – einem *Gebiet* in X – *analytisch*, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ analytisch ist.

Ein Gebiet $D \subset X$ heisst *schlicht*, wenn πD topologisch auf $\pi(D)$ abbildet.

D heisst *maximal schlicht* – oder ein *Blatt* – wenn kein schlichtes Gebiet D' existiert, das D echt enthält.

Sei f eine in einem Gebiet $D \subset \mathbf{C}^n$ analytische Funktion. Durch vollständige analytische Fortsetzung erhalten wir in jedem Punkt x eines Gebietes $D_0 \subset \mathbf{C}^n$ eine höchstens abzählbare Menge analytischer Funktionskeime K_x . Es existiert eine analytische Mannigfaltigkeit (X, π) und eine darauf definierte analytische Funktion \hat{f} derart, dass \hat{f} in x genau die analytischen Funktionskeime K_x erzeugt [6].

2. Reellanalytische, kovariante Funktionen und ihre lokalkovarianten, analytischen Fortsetzungen

Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz A: Sei f eine tensorwertige in einem reellen Gebiet $D_R \subset V^l(\mathbf{R})$ (1.4) analytische (eindeutige) Funktion.

Zu f gehöre eine endlichdimensionale Tensordarstellung einer klassischen Lieschen Gruppe $L(n, \mathbf{R})$ (1.1) (1.2) derart, dass aus

$$\mathbf{k} \in D_R, \mathbf{k}' \in D_R, \mathbf{k}' = A \mathbf{k}, A \in L^{(1)}(n, \mathbf{R}) \tag{1.2}$$

folgt

$$f(\mathbf{k}') = S(A) f(\mathbf{k}).$$

Sei $\{\mathbf{z}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ ein Weg in $V^l(\mathbf{C})$ mit $\mathbf{z}(0) \in D_R$ längs dem sich alle Komponenten von f analytisch fortsetzen lassen. f_1 sei die so durch analytische Fortsetzung erhaltene, in einer Umgebung $U_1(\mathbf{z}(1))$ definierte, analytische (eindeutige) Funktion.

Behauptung: Es existiert eine Umgebung $U_0(\mathbf{z}(1)) \subset U_1(\mathbf{z}(1))$ derart, dass aus

$$\mathbf{w} \in U_0, \mathbf{w}' \in U_0, \mathbf{w}' = A \mathbf{w}, A \in L^{(1)}(n, \mathbf{C})$$

folgt

$$f_1(\mathbf{w}') = S(A) f_1(\mathbf{w}).$$

2.1. Der folgende Abschnitt diene zur Motivierung des in 2.2 formulierten Satzes.

a) Zu $\mathbf{w} \in V^l(\mathbf{C})$ und $\eta > 0$ gibt es im allgemeinen keine solche Umgebung $U(\mathbf{w})$, dass je zwei $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalente Punkte \mathbf{z} und \mathbf{z}' aus $U(\mathbf{w})$ durch ein $A \in L^{(1)}(n, \mathbf{C})$, $|A - 1| < \eta$ aufeinander abgebildet werden können

$$\mathbf{z}' = A \mathbf{z}.$$

Beispiel:

Sei $V(\mathbf{C})$ der zweidimensionale Vektorraum über \mathbf{C} . Das Skalarprodukt der Vektoren $y = (u, v)$ und $y' = (u', v')$ sei $u v' + u' v$. In jeder Umgebung des Nullvektors gibt es $O^{(1)}(2, \mathbf{C})$ -äquivalente Vektoren $z = (\alpha, \beta)$ und $z' = (\beta, \alpha)$, $z' = A z$, $A \in O^{(1)}(2, \mathbf{C})$ die A eindeutig festlegen. Durch geeignete Wahl von α und β kann die Norm von A , $|A|^2 = |\alpha/\beta|^2 + |\beta/\alpha|^2$, beliebig gross gemacht werden.

In $V(\mathbf{C})$ sei das symplektische Skalarprodukt der Vektoren y und y' gegeben:

$$(y, y') = u v' - u' v.$$

In jeder Umgebung des Punktes $\mathbf{w} = ((1, 0), (0, 0)) \in V^2(\mathbf{C})$ können $Sp^{(1)}(2, \mathbf{C})$ -äquivalente Punkte \mathbf{z} und $\mathbf{z}' = A \mathbf{z}$, $A \in Sp^{(1)}(2, \mathbf{C})$ gefunden werden

$$\mathbf{z} = ((1, 0), (\alpha, \beta))$$

$$\mathbf{z}' = ((1, 0), (2\alpha, \beta)).$$

Sie bestimmen A eindeutig. Durch geeignete Wahl von α und β kann die Norm $|A|$ wie im Fall der orthogonalen Geometrie beliebig gross gemacht werden.

b) R. JOST zeigte [7] die folgende stärkere Aussage: Zu $\mathbf{w} \in V^l(\mathbf{C})$ gibt es im allgemeinen keine Umgebung $U(\mathbf{w})$ so, dass zu je zwei $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalenten Punkten \mathbf{z} und \mathbf{z}' aus $U(\mathbf{w})$

$$\mathbf{z}' \sim \mathbf{z}(L^{(1)}(n, \mathbf{C}))$$

ein stetiger Weg $\Lambda(t)$, $t \in [0, 1]$, in $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ existiert, und, dass gilt:

$$\Lambda(0) = 1 \quad \Lambda(1) = \Lambda \quad \mathbf{z}' = \Lambda \mathbf{z}$$

$$\Lambda(t) \mathbf{z} \in U(\mathbf{w}), \quad t \in [0, 1].$$

Im dreidimensionalen Vektorraum $V(\mathbf{R})$ sei ein orthogonales Skalarprodukt mit dem Trägheitsindex (1.3) $\tau = 1$ gegeben,

$$V(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \perp \langle \mathbf{r} \rangle \quad (\mathbf{p}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 1$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1 \quad (\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (\mathbf{q}, \mathbf{r}) = 0.$$

Wir definieren in $V^2(\mathbf{R})$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{p}, 0)$$

$$\mathbf{k} = (\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q} + \beta \mathbf{r}) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q} - \beta \mathbf{r}).$$

Angenommen in einer Umgebung $U(\mathbf{w}) \subset V^2(\mathbf{R})$ existiere zu jedem $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ ein Weg

$$\{\mathbf{z}(t) = \Lambda(t) \mathbf{k} \mid \Lambda(t) \in L^{(1)}(n, \mathbf{C}), \quad t \in [0, 1]\}$$

derart, dass

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{z}(1) = \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{z}(t) \in U(\mathbf{w}), \quad t \in [0, 1].$$

Aus Satz 1 (2.2) folgt dann die Existenz einer Umgebung $U_0(\mathbf{w}) \supset U(\mathbf{w})$ und eines Weges

$$\{\mathbf{z}_0(t) = \Lambda_0(t) \mathbf{k} \mid \Lambda_0(t) \in L(n, \mathbf{C}, \mathbf{w})^4, \quad t \in [0, 1]\}$$

so, dass gilt

$$\mathbf{z}_0(0) = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{z}_0(1) = \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{z}_0(t) \in U_0(\mathbf{w}), \quad t \in [0, 1].$$

Die kleine Gruppe $L(3, \mathbf{C}; \mathbf{w})$ ist einparametrig; darum ist es einfach zu zeigen, dass zu jedem $N > 0$ α und β so gefunden werden können, dass $\text{Max}_{t \in [0, 1]} |\mathbf{z}_0(t) - \mathbf{k}| > N$ ist.

Zum Beweis von Satz A benötigen wir die folgenden beiden Sätze:

2.2. *Satz 1:* Sei $V(\alpha)$ der n -dimensionale Vektorraum über den reellen oder komplexen Zahlen und \mathbf{k} ein Punkt aus $V^m(\alpha)$ (1.4). Sei weiter die Dimension d des linearen Raumes $\langle \mathbf{k} \rangle = \langle k_1, \dots, k_m \rangle$ maximal, das heisst $d = \text{Min}(n, m)$. Dann gibt es zu jeder Umgebung N der Einheit in einer klassischen Liegruppe $L(n, \alpha)$ (1.1) (1.2) eine Um-

⁴⁾ $L(n, \mathbf{C}; \mathbf{w})$ bezeichnet die Kleine Gruppe zu \mathbf{w} (2.3).

gebung $U(\mathbf{k})$ derart, dass zu zwei $L^{(1)}(n, \alpha)$ -äquivalenten Punkten (1.4) \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' in $U(\mathbf{k})$ ein Element $\Lambda \in N$ existiert, das \mathbf{k}' in \mathbf{k}'' abbildet,

$$\mathbf{k}'' = \Lambda \mathbf{k}' .$$

Beweis: a) Wenn in $V(\alpha)$ die Gruppe $GL(n, \alpha)$ oder $SL(n, \alpha)$ operiert, ist die Aussage trivial.

b) Sei in $V(\alpha)$ ein orthogonales oder symplektisches Skalarprodukt gegeben, wobei wir vorerst noch den Fall der orthogonalen Geometrie im reellen Vektorraum $V(\mathbb{R})$ mit Trägheitsindex $\tau = 0$ ausschliessen.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach m bei festem n .

Wenn $m \geq n$ ist, folgt die Aussage unmittelbar wie folgt:

Es existiert eine Umgebung $U_1(\mathbf{k})$ derart, dass aus $\mathbf{k}_1 \in U_1(\mathbf{k})$ folgt

$$\dim \langle \mathbf{k} \rangle = \dim \langle \mathbf{k}_1 \rangle = n .$$

Zwei $L^{(1)}(n, \alpha)$ -äquivalente Punkte \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' aus $U_1(\mathbf{k})$ definieren ein $\Lambda \in L^{(1)}(n, \alpha)$ eindeutig. Λ hängt stetig von \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' ab.

Sei $m \leq n - 1$ und die Behauptung für $m + 1$ bewiesen. Wir werden zeigen, dass sie dann auch für m gilt. Die Vektoren $k_1 \dots k_m$ können zu einer Basis $k_1 \dots k_m, u, v_{m+2}, \dots, v_n$ ergänzt werden. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, u sei ein Nullvektor

$$(u, u) = 0 .$$

Dann ist, falls nur \mathbf{k}' nahe genug bei \mathbf{k} liegt, auch $k'_1 \dots k'_m, u, v_{m+2}, \dots, v_n$ eine Basis, ebenso $k''_1 \dots k''_m, u, v_{m+2}, \dots, v_n$. Wir setzen jetzt $k_{m+1} = u$. Damit $(\mathbf{k}', u) \sim (\mathbf{k}'', u')$ ($L^{(1)}(n, \alpha)$) gilt, ist zu verlangen:

$$(k''_\alpha, u') = (k'_\alpha, u) \quad \alpha = 1 \dots m$$

$$(u', u') = 0 .$$

Eine Lösung des nicht linearen Gleichungssystems kann in zwei Schritten folgendermassen gefunden werden. Wir suchen zuerst eine Familie von Lösungen des linearen Systems

$$(k''_\alpha u') = (k'_\alpha u), \quad \alpha = 1 \dots m .$$

Die allgemeine Lösung $s(\lambda)$ der $n - 1$ -Gleichungen

$$(k''_\alpha, s) = (k'_\alpha, u) \quad \alpha = 1 \dots m \quad (A)$$

$$(v_\beta, s) = (v_\beta, u) \quad \beta = m + 2 \dots n$$

setzt sich aus einer partikulären Lösung s_1 von (A) und einer Lösung $\lambda s_2, \lambda \in \alpha$, des homogenen Systems (A_{hom}) zusammen:

$$s(\lambda) = s_1 + \lambda s_2 .$$

Das System A und die Gleichung

$$(u, s_1) = 0$$

bestimmen s_1 eindeutig. s_1 hängt stetig von \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' ab. s_2 sei die Lösung des inhomogenen Systems (A_{hom}) und

$$(u, s_2) = 1 .$$

$s(\lambda)$ erfüllt (A) für alle $\lambda \in \alpha$.

Der zweite Schritt besteht darin, ein λ zu finden, so, dass gilt:

$$(s(\lambda), s(\lambda)) = 0 .$$

Im Fall der symplektischen Geometrie in $V(\alpha)$ ist jedes $s(\lambda)$ ein Nullvektor. Wenn in $V(\alpha)$ ein orthogonales Skalarprodukt vorliegt, so ist eine quadratische Bestimmungsgleichung für λ zu lösen:

$$\lambda^2(s_2, s_2) + 2\lambda(s_1, s_2) + (s_1, s_1) - (s_1, u) = 0 .$$

Alle Koeffizienten hängen stetig von \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' ab. Bei passender Wahl von $U(\mathbf{k})$ existiert eine Lösung, die beliebig nahe an Null liegt.

Im Ausnahmefall der reellen, orthogonalen Geometrie mit Trägheitsindex $\tau = 0$ kann der Beweis ebenso durchgeführt werden, wenn statt des Nullvektors u ein auf 1 normierter Vektor u'' zu $k_1 \dots k_m$ adjungiert wird. ■

2.3. Satz 2: Die kleine Gruppe $L(n, \alpha; \mathbf{z})$

$$L(n, \alpha; \mathbf{z}) = \{ \Sigma \mid \Sigma \in L^{(1)}(n, \alpha)^5, \quad \Sigma \mathbf{z} = \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in V^l(\alpha) \}$$

einer klassischen, reellen ($\alpha = R$) oder komplexen ($\alpha = C$) Liegruppe (1.1) (1.2) ist zusammenhängend.

Beweis: Da für die allgemeine und die spezielle lineare Gruppe die Behauptung trivial ist, nehmen wir an, in $V(\alpha)$ sei eine orthogonale oder symplektische Geometrie gegeben.

Zuerst setzen wir ein symmetrisches Skalarprodukt voraus. Sei T eine reguläre lineare Abbildung, die \mathbf{z} auf Normalform (1.6) transformiert:

$$\mathbf{z} T = (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_b, 0 \dots 0) = (\mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{o})$$

$$\text{rad } \langle \mathbf{z} \rangle = \langle p_1 \dots p_b \rangle$$

$$\text{rad } \langle \mathbf{t} \rangle = 0 .$$

$V(\alpha)$ zerfällt in die direkte Summe der orthogonalen Teilräume $W = \langle t_1 \dots t_r \rangle$ und W^\perp

$$V(\alpha) = W \perp W^\perp .$$

Die Elemente aus $O(n, \alpha; \mathbf{z})$ bilden W identisch in sich ab. Es genügt daher, die kleine Gruppe der b Nullvektoren p_1, \dots, p_b im $n - r$ dimensionalen Teilraum W^\perp zu untersuchen. In W^\perp existiert ein zu $\text{rad } \langle \mathbf{p} \rangle$ gleichdimensionaler isotroper Raum $\langle q_1, \dots, q_b \rangle$ (1.3) und es gilt

$$(p_i, q_k) = \delta_{ik} \quad i, k = 1 \dots b .$$

Der $2b$ dimensionale Raum $\langle p_1 \dots p_b, q_1 \dots q_b \rangle \subset W^\perp$ ist nicht singulär und zerfällt in die direkte Summe von b zueinander orthogonalen, hyperbolischen Ebenen (1.3),

$$\langle p_1 \dots p_b, q_1 \dots q_b \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle \perp \dots \perp \langle p_b, q_b \rangle .$$

⁵⁾ Definition der Bezeichnung in (1.2).

Das orthogonale Komplement in W^\perp

$$\langle p_1 \dots p_b, q_1 \dots q_b \rangle^\perp \cap W^\perp$$

zerfällt in die direkte Summe der zueinander orthogonalen 1-dimensionalen Teilräume $\langle g_i \rangle$, $i = 1 \dots c$, und zusammenfassend gilt:

$$W^\perp = \langle p_1, q_1 \rangle \perp \dots \perp \langle p_b, q_b \rangle \perp \langle g_1 \rangle \perp \dots \perp \langle g_c \rangle.$$

$\theta \in O(n, \alpha; \mathbf{z})$ induziert in $\langle \mathbf{g} \rangle = \langle g_1, \dots, g_c \rangle$ eine orthogonale Transformation $\theta_0 \in O(c, \alpha)$

$$\theta_0 g_i = \theta g_i - \sum_{k=1}^b (\theta g_i, q_k) p_k, \quad i = 1 \dots c.$$

Wir definieren $\tilde{\theta}_0$ als Identität in $\langle \mathbf{g} \rangle^\perp$ und als θ_0 in $\langle \mathbf{g} \rangle$. $\tilde{\theta}_0^{-1} \theta$ ist von der Form

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t \\ p &\rightarrow p \\ q &\rightarrow p A + q + g B \\ g &\rightarrow p C + g. \end{aligned}$$

Zwischen den Matrizen A , B und C bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} A + A^T + B B^T &= 0 \\ C + B^T &= 0. \end{aligned}$$

Es zeigt sich somit, dass $\tilde{\theta}_0^{-1} \theta$ durch B und den antisymmetrischen Teil von A festgelegt ist. Die Transformationen von der Form $\tilde{\theta}_0^{-1} \theta$ bilden eine $cb + b(b-1)/2$ dimensionale zusammenhängende Untergruppe von $O(n, \alpha; \mathbf{z})$.

Es genügt jetzt noch zu zeigen, dass $\tilde{\theta}_0$ aus der Einskomponente der kleinen Gruppe $\theta(n, \alpha; \mathbf{p})$ ist.

Sei α der Körper der komplexen Zahlen. Da $\tilde{\theta}_0^{-1} \theta$ in der Einskomponente von $\theta(n, \mathbf{C}; \mathbf{z})$ liegt und $\det \theta = 1$ ist, folgt, dass gilt $\det \theta_0 = 1$.

Sei α der Körper der reellen Zahlen und σ der Homomorphismus der $O_+(n, \mathbf{R})$ auf $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ abbildet⁶⁾. Der Kern der Abbildung σ besteht aus der Einskomponente in $O_+(n, \mathbf{R})$. Da $\sigma(\theta) = \sigma(\tilde{\theta}_0) \sigma(\tilde{\theta}_0^{-1} \theta) > 0$ und $\sigma(\tilde{\theta}_0^{-1} \theta) > 0$ ist, folgt $\sigma(\tilde{\theta}_0) > 0$ und damit, dass $\tilde{\theta}_0$ in der Einskomponente von $O(n, \mathbf{R})$ liegt.

Der Beweis kann ebenso geführt werden, wenn in $V(\alpha)$ ein schiefsymmetrisches Skalarprodukt vorliegt, wird aber etwas kürzer, weil die Zusammenhangsverhältnisse der symplektischen Gruppen einfacher sind (vgl. Anhang).

W^\perp zerfällt jetzt in die direkte Summe zueinander orthogonaler hyperbolischer Ebenen (1.3)

$$W^\perp = \langle p_1, q_1 \rangle \perp \dots \perp \langle p_b, q_b \rangle \perp \langle g_1, h_1 \rangle \perp \dots \perp \langle g_{c/2}, h_{c/2} \rangle.$$

⁶⁾ Vgl. E. ARTIN, Geometrical algebra, p. 196.

θ induziert in $\langle g_1, h_1 \rangle \perp \dots \perp \langle g_{c/2}, h_{c/2} \rangle$ eine symplektische Abbildung θ_0

$$\theta_0 = \theta / \langle g_1, h_1 \rangle \perp \dots \perp \langle g_{c/2}, h_{c/2} \rangle.$$

$\tilde{\theta}_0$ definieren wir wie im vorausgehenden Fall der orthogonalen Geometrie. $\tilde{\theta}_0^{-1} \theta$ ist von der Form

$$\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$$

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p} A + \mathbf{q} + \mathbf{g} B_1 + \mathbf{h} B_2$$

$$\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{p} C_1 + \mathbf{g}$$

$$\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{p} C_2 + \mathbf{h}.$$

Zwischen den Matrizen A, B_1, B_2, C_1 und C_2 bestehen die Beziehungen

$$A - A^T + B_2^T B_1 - B_1^T B_2 = 0$$

$$C_1 + B_2^T = 0$$

$$C_2 - B_1^T = 0.$$

Sie zeigen, dass $\tilde{\theta}_0^{-1} \theta$ durch B_1, B_2 und den symmetrischen Teil von A festgelegt ist. Die Transformationen von der Form $\tilde{\theta}_0^{-1} \theta$ bilden eine $c b + 1/2 b(b+1)$ dimensionale, zusammenhängende Untergruppe von $Sp(n, \alpha; \mathbf{z})$. Da die symplektischen Gruppen zusammenhängend sind und da das insbesondere für $Sp(c, \alpha)$ gilt, gehört $\tilde{\theta}_0$ der Einskomponente der kleinen Gruppe $Sp(n, \alpha; \mathbf{z})$ an.

Nebenbei liefert der Beweis die Dimensionen der kleinen Gruppen

$$\dim O(n, \alpha; \mathbf{z}) = \dim O(n - (r + b), \alpha) = \frac{1}{2} (n - (r + b)) (n - (r + b) - 1)$$

$$\dim Sp(n, \alpha; \mathbf{z}) = \dim Sp(n - (r + b), \alpha) = \frac{1}{2} (n - (r + b)) (n - (r + b) + 1). \blacksquare$$

2.4. Beweis von Satz A:

Sei N eine Umgebung der Einheit in $L(n, \mathbf{C})$. Es ist einfach zu zeigen, dass dann eine Umgebung $U(\mathbf{z}(1))$ existiert, in der f_1 eindeutig und analytisch ist und aus $\mathbf{w} \in U(\mathbf{z}(1)), \mathbf{w}' \in U(\mathbf{z}(1)), \mathbf{w}' = A \mathbf{w}, A \in N$ folgt

$$f_1(\mathbf{w}') = S(A) f_1(\mathbf{w}).$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, dass in $\mathbf{z}(1)$ nur die ersten d linear unabhängigen Vektoren $z_1 \dots z_d$ von Null verschieden sind:

$$\mathbf{z}(1) = (z_1 \dots z_d, 0 \dots 0) = (\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{o}^{(2)})$$

(Diese Form kann immer durch eine Transformation $T \in GL(l, \mathbf{C})$ erreicht werden.)

Wir zerlegen $V^l(\mathbf{C})$ in die direkte Summe $V^d(\mathbf{C}) \oplus V^{l-d}(\mathbf{C})$. Es existieren Umgebungen $U(\mathbf{z}^{(1)})$ und $U(\mathbf{o}^{(2)})$ der Punkte

$$\mathbf{z}^{(1)} = (z_1, \dots, z_d) \in V^d(\mathbf{C})$$

und

$$\mathbf{o}^{(2)} = (0, \dots, 0) \in V^{l-d}(\mathbf{C})$$

so, dass

$$U(\mathbf{z}^{(1)}) \oplus U(\mathbf{o}^{(2)}) \subset U(\mathbf{z}^{(1)}) .$$

Jetzt wählen wir zur Umgebung der Einheit N in $L(n, \mathbf{C})$ konvexe Umgebungen $U'(\mathbf{z}^{(1)}) \subset U(\mathbf{z}^{(1)})$, $U'(\mathbf{o}^{(2)}) \subset U(\mathbf{o}^{(2)})$ so, dass gilt:

1. $N U'(\mathbf{z}^{(1)}) \subset U(\mathbf{z}^{(1)})$, $N U'(\mathbf{o}^{(2)}) \subset U(\mathbf{o}^{(2)})$,
2. Zu zwei $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalenten Punkten

$$\mathbf{p} \in U'(\mathbf{z}^{(1)}) \text{ und } \mathbf{p}' \in U'(\mathbf{z}^{(1)})$$

existiert ein $\Sigma \in N$, das \mathbf{p} auf \mathbf{p}' abbildet:

$$\mathbf{p}' = \Sigma \mathbf{p} .$$

Eine solche Wahl ist nach Satz 1 immer möglich.

Zu zwei $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalenten Punkten $\mathbf{w} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ und $\mathbf{w}' = (\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ aus $U'(\mathbf{z}^{(1)}) \oplus U'(\mathbf{o}^{(2)})$ existiert ein $\Sigma \in N$ so, dass

$$\mathbf{p}' = \Sigma \mathbf{p} , \quad \Sigma \mathbf{w} \in U(\mathbf{z}^{(1)}) \oplus U(\mathbf{o}^{(2)}) .$$

$\Sigma \mathbf{w}$ und \mathbf{w}' sind $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalent (1.4)

$$\mathbf{w}' = \theta^{-1} \Sigma \mathbf{w} , \quad \theta \in L^{(1)}(n, \mathbf{C}) .$$

θ ist ein Element der kleinen Gruppe $L(n, \mathbf{C}; \mathbf{p}')$ (2.3).

Nach Satz 2 existiert ein Weg $\theta(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, in $L(n, \mathbf{C}; \mathbf{p}')$, der θ mit der Einheit verbindet.

Wir definieren

$$h(t, \tau) = S^{-1}(\theta(\tau)) f_1(\mathbf{p}', t \theta(\tau) \mathbf{q}') .$$

$h(t, \tau)$ ist analytisch in t und τ , wenn $t \in [0, \varepsilon_1]$ und $\tau \in [0, 1]$ für ein geeignetes $\varepsilon_1 > 0$; denn $\theta(\tau) \mathbf{q}'$, $\tau \in [0, 1]$, ist eine kompakte Punktmenge und daher liegt der Weg $t \theta(\tau) \mathbf{q}'$ für genügend kleines t ganz in $U(\mathbf{o}^{(2)})$ und wegen der Konvexität auch für jeden kleineren nicht negativen Wert von t . In diesem Gebiet ist ausserdem $h(t, \tau)$ von τ unabhängig. Weiter ist $h(t, \tau)$ analytisch in $t \in [0, 1]$ und $\tau \in [0, \varepsilon_2]$ für ein passendes $\varepsilon_2 > 0$ und schliesslich auch in $t \in [0, 1]$ und $\tau \in [1 - \varepsilon_3, 1]$ für ein passendes $\varepsilon_3 > 0$.

$h(t, \tau)$ kann daher in das ganze Quadrat $t \in [0, 1]$, $\tau \in [0, 1]$ analytisch fortgesetzt werden, und es ist $h(t, \tau)$ im ganzen Quadrat von τ unabhängig.

Insbesondere gilt $h(1, 0) = h(1, 1)$, was für g bedeutet

$$f_1(\mathbf{w}') = S(A) f_1(\mathbf{w}) . \quad \blacksquare$$

3. Reellanalytische, kovariante Funktionen und ihre global kovarianten, analytischen Fortsetzungen

Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des in 3.2 formulierten Satzes.

3.1. Wir wollen annehmen, dass in $V(\alpha)$ eine orthogonale oder symplektische Geometrie gegeben sei. Der folgende Begriff wird eine wesentliche Rolle spielen:

Definition: Zwei Punkte $\mathbf{x} \in V^l(\mathbf{R})$ und $\mathbf{x}' \in V^l(\mathbf{R})$ heißen *Limespunkte* (3.5), wenn Folgen $\{\mathbf{z}^\nu\}$ und $\{\mathbf{z}'^\nu\}$, $\mathbf{z}^\nu \in V^l(\mathbf{C})$ so existieren, dass

$$\mathbf{z}^\nu \sim \mathbf{z}'^\nu \quad (L^{(1)}(n, \mathbf{C}))$$

$$\mathbf{x} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{z}^\nu \quad \mathbf{x}' = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{z}'^\nu .$$

3.2. *Satz B*: Sei f eine tensorwertige, im reellen Gebiet $D_R \subset V^l(\mathbf{R})$ (1.4) analytische (eindeutige) Funktion.

Zu f gehöre eine endlichdimensionale Tensordarstellung S einer symplektischen oder orthogonalen Gruppe $L(n, \mathbf{R})$ (1.2), derart, dass aus

$$\mathbf{k} \in D_R, \mathbf{k}' \in D_R, \mathbf{k}' = A \mathbf{k}, A \in L^{(1)}(n, \mathbf{R}) \quad (1.2)$$

folgt

$$f(\mathbf{k}') = S(A) f(\mathbf{k}) .$$

Je zwei reelle Limespunkte (3.1) (3.5) $\mathbf{x} \in D_R$ und $\mathbf{x}' \in D_R$ seien $L^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent (1.4).

Behauptung: Es existiert zu jeder kompakten Menge $C_R \subset D_R$ eine $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -invariante, komplexe, offene Umgebung $U(C_R) \subset V^l(\mathbf{C})$ und eine analytische Fortsetzung \hat{f} von f auf $U(C_R)$ mit den Eigenschaften:

1. \hat{f} ist auf $U(C_R)$ eindeutig,
2. aus $\mathbf{z} \in U(C_R)$, $\mathbf{z}' \in U(C_R)$, $\mathbf{z}' = A \mathbf{z}$, $A \in L^{(1)}(n, \mathbf{C})$

folgt

$$\hat{f}(\mathbf{z}') = S(A) \hat{f}(\mathbf{z}) .$$

Bemerkungen: a) Die Voraussetzung, je zwei reelle Limespunkte $\mathbf{x} \in D_R$, $\mathbf{x}' \in D_R$ sind $L^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent ist notwendig.

Sei $V(\mathbf{R})$ der zweidimensionale, reelle Vektorraum mit symmetrischem Skalarprodukt und Trägheitsindex $\tau = 1$,

$$V(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \quad (\mathbf{p}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1 .$$

In $V^2(\mathbf{R})$ definieren wir das reelle Gebiet

$$D_R = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}, \alpha' \mathbf{p} + \beta' \mathbf{q}) \quad \alpha, \beta, \alpha', \beta' \text{ reell} \} .$$

Die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \alpha \sqrt{\beta^2 + \beta'^2}$$

ist in D_R analytisch und $L^{(1)}(2, \mathbf{R})$ -invariant.

Die Abbildung J :

$$J p = - p$$

$$J q = - q$$

gehört zu $L^{(1)}(2, \mathbb{C})$. Da aber

$$f(J \mathbf{x}) = - f(\mathbf{x})$$

ist, kann die Behauptung von Satz B nicht richtig sein.

b) Wenn Satz B gilt, kann $U(C_R)$ maximal-schlicht gewählt werden. Sei $U'(C_R)$ ein Gebiet in $V'(\mathbb{C})$ das $U(C_R)$ enthält und gleichzeitig dieselben Eigenschaften 1 und 2 wie $U(C_R)$ aufweist. Wir bezeichnen mit M die Menge der $U'(C_R)$. M ist partiell geordnet. Jede geordnete Teilmenge X von M (Kette) ist durch die Vereinigungsmenge der Mengen in X beschränkt. Diese gehört zu M . Nach dem Zornschen Lemma existiert in M ein maximales Element B , d.h. aus $C \supset B$, $C \in M$ folgt $C = B$. B ist $L^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -invariant, da

$$B' = \{ \mathbf{z}' \mid \mathbf{z}' = A \mathbf{z}, A \in L^{(1)}(n, \mathbb{C}), \mathbf{z} \in B \}$$

in M liegt und B enthält. B ist maximal schlicht. Sei $B \cup U$ schlicht, aber nicht in M und sei f in U $L^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -kovariant (Satz A)

$$f(\mathbf{w}') = S(A) f(\mathbf{w}) \quad \mathbf{w}' = A \mathbf{w} \in U, \mathbf{w} \in U, A \in L^{(1)}(n, \mathbb{C}).$$

In $B \cup U$ existieren Punkte \mathbf{z} und \mathbf{z}' und es gilt:

$$\mathbf{z}' = A \mathbf{z} \quad A \in L^{(1)}(n, \mathbb{C})$$

$$f(\mathbf{z}') \neq S(A) f(\mathbf{z}).$$

Das widerspricht aber den Annahmen, da B $L^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -invariant ist.

3.3. Beweis von Satz B:

a) Es genügt, folgende schwächere Behauptung zu beweisen: Zu C_R existiert eine komplexe, offene Umgebung $U'(C_R)$ mit einer darauf definierten analytischen Fortsetzung f' von f und es gelten die Aussagen 1 und 2 von Satz B.

f' kann dann analytisch und eindeutig von $U'(C_R)$ auf das $L^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -invariante Gebiet

$$U(C_R) = [\mathbf{z}'' \mid \mathbf{z}'' = A \mathbf{z}', A \in L^{(1)}(n, \mathbb{C}), \mathbf{z}' \in U'(C_R)]$$

fortgesetzt werden. Die analytische Fortsetzbarkeit folgt aus den Argumenten, die schon in 2.4 verwendet wurden [8]. Wäre die analytische Fortsetzung nicht eindeutig, so gäbe es ein

$$\mathbf{w} \in U'(C_R) \quad \mathbf{w} = A_1 \mathbf{w}_1 = A_2 \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_i \in U'(C_R) \quad i = 1, 2$$

$$f(A_1 \mathbf{w}_1) \neq f(A_2 \mathbf{w}_2) \quad A_i \in L^{(1)}(n, \mathbb{C}),$$

und dann müsste gelten:

$$f(\mathbf{w}_1) \neq S(A_1^{-1} A_2) f(\mathbf{w}_2).$$

b) Weil C_R als kompakte Menge in D_R vorausgesetzt wurde, existiert eine komplexe Umgebung $U_0(C_R)$ und eine analytische Fortsetzung f_0 von f auf $U(C_R)$.

Wir machen die Gegenannahme: In jeder komplexen Umgebung $U(C_R) \subset U_0(C_R)$ existieren $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalente Punkte \mathbf{z} und $\mathbf{z}' = A \mathbf{z}$, $A \in L^{(1)}(n, \mathbf{C})$, und es gilt:

$$f_0(\mathbf{z}') \neq S(A) f_0(\mathbf{z}) .$$

Die Punkte $\{\mathbf{z}\}$ und $\{\mathbf{z}'\}$ haben auf C_R Häufungspunkte \mathbf{x} und \mathbf{x}' . Nach Voraussetzung sind Limespunkte (3.1) $L^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent (1.4). Daher existiert ein $\Sigma \in L^{(1)}(n, \mathbf{R})$ derart, dass $\mathbf{x}' = \Sigma \mathbf{x}$. Wir definieren die in einer komplexen Umgebung von \mathbf{x}' definierte analytische Funktion

$$g(\mathbf{w}) = S(\Sigma) f_0(\Sigma^{-1} \mathbf{w}) .$$

Sie ist in einer reellen Umgebung von \mathbf{x}' mit f_0 identisch und daher auch in einer komplexen $U(\mathbf{x}')$:

$$f_0(\mathbf{w}) = S(\Sigma) f_0(\Sigma^{-1} \mathbf{w}) \quad \mathbf{w} \in U(\mathbf{x}') . \quad (10)$$

$U(\mathbf{x}')$ enthält nach Satz A eine komplexe Umgebung $U'(\mathbf{x}')$ so, dass aus $\mathbf{w} \in U'(\mathbf{x}')$, $\mathbf{w}' \in U'(\mathbf{x}')$, $\mathbf{w}' = A \mathbf{w}$, $A \in L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ folgt,

$$f_0(\mathbf{w}') = S(A) f_0(\mathbf{w}) . \quad (11)$$

Seien \mathbf{z} und \mathbf{z}' $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalente Punkte mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= A \mathbf{z} & A &\in L^{(1)}(n, \mathbf{C}) \\ \mathbf{z}' &\in U'(\mathbf{x}') & \Sigma \mathbf{z} &\in U'(\mathbf{x}') \\ f_0(\mathbf{z}') &\neq S(A) f_0(\mathbf{z}) . \end{aligned} \quad (12)$$

Aus (11) folgt

$$f_0(\mathbf{z}') = S(A) S(\Sigma^{-1}) f_0(\Sigma \mathbf{z})$$

und aus (10)

$$f_0(\Sigma \mathbf{z}) = S(\Sigma) f_0(\mathbf{z})$$

was mit (12) im Widerspruch steht.

3.4. *Charakterisierung von Limespunkten durch Eigenschaften des reellen Gebietes*
Lemma 1: Sei $\mathbf{x} \in V^l(\mathbf{R})$ und $\mathbf{x}' \in V^l(\mathbf{R})$ und es gelte

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l .$$

Dann existiert ein $T \in GL(l, \mathbf{R})$ derart, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{x} T &= (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_b, 0 \dots 0, 0 \dots 0) \\ \mathbf{x}' T &= (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, 0 \dots 0, p'_{s+1} \dots p'_{b'}, 0 \dots 0) \\ \text{rad } \langle \mathbf{x} \rangle &= \langle p_1 \dots p_b \rangle & \text{rad } \langle \mathbf{x}' \rangle &= \langle p'_1 \dots p'_{b'} \rangle \\ \dim \langle \mathbf{x} \rangle &= r + b & \dim \langle \mathbf{x}' \rangle &= r + b' . \end{aligned}$$

Definition: $\mathbf{x} T$, $\mathbf{x}' T$ heisst die *Normalform des Punktepaares* \mathbf{x} , \mathbf{x}' (1.4).

Beweis: Es existiert ein $T^{(1)} \in GL(l, \mathbb{R})$ das \mathbf{x} auf Normalform (1.4) und \mathbf{x}' in die folgende spezielle Gestalt transformiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} T^{(1)} &= (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_b, 0 \dots 0, 0 \dots 0) \\ \mathbf{x}' T^{(1)} &= (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, 0 \dots 0, p'_{s+1} \dots p'_c, 0 \dots 0) \\ \text{rad } \langle \mathbf{x} \rangle &= \langle p_1 \dots p_s \rangle \quad \dim \langle \mathbf{x} \rangle = r + b \quad p'_i \neq 0 \quad i = 1 \dots c. \end{aligned}$$

Offenbar kann $T^{(1)}$ so gewählt werden, dass $p'_{s+1} \dots p'_c$ linear unabhängig sind, und $p'_1 \dots p'_d, p'_{s+1} \dots p'_c$ für ein geeignetes d ein maximales linear unabhängiges System von $p'_1 \dots p'_c$ bilden.

Es existiert ein $T^{(2)} \in GL(l, \mathbb{R})$ derart, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{x} T^{(1)} T^{(2)} &= (t_1 \dots t_r, \tilde{p}_1 \dots \tilde{p}_b, 0 \dots 0, 0 \dots 0) \\ \mathbf{x}' T^{(1)} T^{(2)} &= (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_d, 0 \dots 0, p'_{s+1} \dots p'_c, 0 \dots 0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Offenbar gilt das folgende

Lemma 2: $\mathbf{x} \in V^l(\mathbb{R})$ (1.4) und $\mathbf{x}' \in V^l(\mathbb{R})$ können nur dann Limespunkte sein, wenn

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l.$$

Im Fall der symplektischen Gruppe gilt der stärkere

Satz 3: In $V(\mathbb{R})$ sei eine symplektische Geometrie (1.2) gegeben. Die beiden Aussagen über die reellen Punkte $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_l) \in V^l(\mathbb{R})$ (1.4) und $\mathbf{x}' = (x'_1 \dots x'_l) \in V^l(\mathbb{R})$ sind äquivalent:

- a) $(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l.$
- b) \mathbf{x} und \mathbf{x}' sind Limespunkte.

Beweis: $\alpha)$ a) ist nach dem voranstehenden Lemma eine Folge von b).

$\beta)$ Es existiert ein $T \in GL(l, \mathbb{R})$ das \mathbf{x} und \mathbf{x}' in die Normalform abbildet:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} T &= (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_b, 0 \dots 0, 0 \dots 0) \\ \mathbf{x}' T &= (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, 0 \dots 0, p'_{s+1} \dots p'_{b'}, 0 \dots 0). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von WITT existiert ein $\Lambda \in Sp(n, \mathbb{C})$ derart, dass

$$\begin{aligned} t'_i &= \Lambda t_i \quad i = 1 \dots r \\ p'_k &= \Lambda p_k \quad k = 1 \dots s. \end{aligned}$$

Sei $\{\varepsilon^i\}$ eine Nullfolge. Wir definieren \mathbf{z}^i und \mathbf{z}'^i durch

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^i T &= (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_s, p_{s+1} \dots p_b, \varepsilon^i \Lambda^{-1} p'_{s+1} \dots \varepsilon^i \Lambda^{-1} p'_{b'}, 0 \dots 0) \\ \mathbf{z}'^i T &= (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, \varepsilon^i \Lambda p_{s+1} \dots \varepsilon^i \Lambda p_b, p'_{s+1} \dots p'_{b'}, 0 \dots 0). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $\mathbf{z}'^i \sim \mathbf{z}^i (Sp(n, \mathbb{C}))$

$$\mathbf{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{z}^i \quad \mathbf{x}' = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{z}'^i. \quad \blacksquare$$

Im Fall der orthogonalen Geometrie ist die Satz 3 entsprechende Aussage komplizierter.

Satz 4: Für $L(n, \mathbf{C}) = O(n, \mathbf{C})$ (1.2) folgt aus

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l,$$

dass \mathbf{x} und \mathbf{x}' Limespunkte (3.1) (3.5) sind, sofern nicht

$$\text{Dim } \langle x_1 \dots x_l \rangle = \text{Dim } \langle x'_1 \dots x'_l \rangle \geq n - 1.$$

Beweis: α) Sei $\dim \langle \mathbf{x} \rangle \neq \dim \langle \mathbf{x}' \rangle$.

Das Punktepaar \mathbf{x}, \mathbf{x}' kann durch ein $T \in GL(l, \mathbf{R})$ auf Normalform (3.4) gebracht werden.

$$\mathbf{x} T = (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_b, 0 \dots 0, 0 \dots 0) \quad (13)$$

$$\mathbf{x}' T = (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, 0 \dots 0, p'_{s+1} \dots p'_{b'}, 0 \dots 0)$$

$$\text{rad } \langle \mathbf{x} \rangle = \langle p_1 \dots p_b \rangle$$

$$\text{rad } \langle \mathbf{x}' \rangle = \langle p'_1 \dots p'_{b'} \rangle.$$

Seien $q_1 \dots q_b$ und $q'_1 \dots q'_{b'}$ die zu $p_1 \dots p_b$ und $p'_1 \dots p'_{b'}$ konjugierten Vektoren (1.3) in $V(\mathbf{R})$.

$$(p_d, q_f) = \delta_{df} \quad d, f = 1 \dots b \quad (p'_g, q'_h) = \delta_{gh} \quad g, h = 1 \dots b'$$

$$(q_d, q_f) = (q_d, t_k) = 0 \quad (q'_g, q'_h) = (q'_g, t'_k) = 0 \quad k = 1 \dots r.$$

Wir setzen voraus, dass $b' < b$ ist, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bewirkt.

Sei $\{\varepsilon^i\}$, $\varepsilon^i \in \mathbf{C}$, $i \in Z_+$, eine Nullfolge. Wir definieren

$$\mathbf{z}^i T = (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_s, p_{s+1} \dots p_{b'}, p_{b'+1} \dots p_b, \varepsilon^i q_{s+1} \dots \varepsilon^i q_{b'}, 0 \dots 0)$$

$$\mathbf{z}'^i T = (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, \varepsilon^i q'_{s+1} \dots \varepsilon^i q'_{b'}, \pi_{b'+1} \dots \pi_b, p'_{s+1} \dots p'_{b'}, 0 \dots 0).$$

Die Nullvektoren $\pi_{b'+1} \dots \pi_b$ können so gewählt werden, dass

$$\mathbf{z}'^i \sim \mathbf{z}^i (O^{(1)}(n, \mathbf{C})).$$

β) Sei $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle < n - 1$ und $\text{rad } \langle \mathbf{x} \rangle = \text{rad } \langle \mathbf{x}' \rangle = 0$.

Aus dem Satz von WITT folgt

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' (O(n, \mathbf{C})).$$

Da $\langle x_1 \dots x_l \rangle^\perp \neq 0$ und $\text{rad}(\langle x_1 \dots x_l \rangle^\perp) = 0$ ist, folgt sogar

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' (O^{(1)}(n, \mathbf{C})).$$

γ) Sei $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle < n - 1$ und $\dim \text{rad } \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \text{rad } \langle \mathbf{x}' \rangle = 1$.

Aus $r + b < n - 1$ und $b = 1$ folgt $r \leq n - 3$. $\langle x_1 \dots x_l \rangle^\perp$ enthält daher einen zum mindesten eindimensionalen nichtsingulären Unterraum. Es existiert daher ein

$$\Sigma \in O(n, \mathbf{C}) \quad \det \Sigma = -1 \quad (14)$$

derart, dass

$$\Sigma x = x .$$

Im Fall $x \sim x'(O(n, \mathbb{C}))$ ist die Behauptung trivial.

Seien also x und x' bezüglich $O(n, \mathbb{C})$ nicht äquivalent. Wir benützen wieder die Normalform:

$$x T = (t_1 \dots t_r, p, 0 \dots 0)$$

$$x' T = (t'_1 \dots t'_r, 0, p', 0 \dots 0) .$$

Analog wie in $\alpha)$ definieren wir z^i und z'^i durch

$$z^i T = (t_1 \dots t_r, p, \varepsilon^i q, 0 \dots 0)$$

$$z'^i T = (t'_1 \dots t'_r, \varepsilon^i q', p', 0 \dots 0) .$$

Nach dem Satz von WITT ist

$$z^i \sim z'^i (O(n, \mathbb{C}))$$

und wegen (14)

$$z^i \sim z'^i (O^{(1)}(n, \mathbb{C})) .$$

$\delta)$ Sei $\dim \langle x \rangle = \dim \langle x' \rangle < n - 1$ und $\dim(\text{rad } \langle x \rangle) = \dim(\text{rad } \langle x' \rangle) \geq 2$. Wieder verwenden wir die Normalform von x und x' :

$$x T = (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_s, p_{s+1} \dots p_b, 0 \dots 0)$$

$$x' T = (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, 0 \dots 0, p'_{s+1} \dots p'_b, 0 \dots 0) .$$

Wir definieren z^i und z'^i durch

$$z^i T = (t_1 \dots t_r, p_1 \dots p_s, p_{s+1} \dots p_b, \varepsilon^i q_{s+1} \dots \varepsilon^i q_b, 0 \dots 0)$$

$$z'^i T = (t'_1 \dots t'_r, p'_1 \dots p'_s, \varepsilon^i q'_{s+1} \dots \varepsilon^i q'_b, p'_{s+1} \dots p'_b, 0 \dots 0) .$$

Nach dem Satz von WITT existiert ein $A^i \in O(n, \mathbb{C})$ derart, dass

$$z'^i = A^i z^i .$$

Durch Vertauschen der $q'_{s+1} \dots q'_b$ in $z'^i T$ kann immer erreicht werden, dass

$$z^i \sim z'^i (O^{(1)}(n, \mathbb{C})) . \quad \blacksquare$$

Satz 5: Für $L(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C})$ (1.2) folgt aus

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l$$

und

$$\dim \langle x_1 \dots x_l \rangle = \dim \langle x'_1 \dots x'_l \rangle = n ,$$

x und x' sind genau dann Limespunkte (3.1) (3.5), wenn $x \sim x'(O^{(1)}(n, \mathbb{C}))$ (1.4).

Beweis: $\alpha)$ x und x' sind offensichtlich Limespunkte, wenn

$$x \sim x' (O^{(1)}(n, \mathbb{C})) .$$

β) Seien \mathbf{x} und \mathbf{x}' bezüglich $O^{(1)}(n, \mathbf{C})$ nicht äquivalent. Sie legen eindeutig ein $A \in O(n, \mathbf{C})$ fest so, dass gilt

$$\mathbf{x}' = A \mathbf{x}.$$

Für \mathbf{w} und \mathbf{w}' , die in geeigneten Umgebungen $U(\mathbf{x})$ und $U(\mathbf{x}')$ liegen, ist die obige Aussage immer noch wahr. $A(\mathbf{w}, \mathbf{w}')$ hängt stetig von \mathbf{w} und \mathbf{w}' ab. ■

Die Behandlung des letzten Falles verlangt zwei vorbereitende Hilfssätze:

Lemma 3: Sei $(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k)$ $i, k = 1 \dots l$

$$\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle = n - 1$$

und das Punktepaar \mathbf{x}, \mathbf{x}' sei nicht $O(n, \mathbf{C})$ -äquivalent.

Dann existiert ein $T \in GL(l, \mathbf{R})$ so, dass

$$\mathbf{x} T = (r_1 \dots r_{n-2}, p, 0 \dots 0) \quad (15)$$

$$\mathbf{x}' T = (r'_1 \dots r'_{n-2}, 0, q', 0 \dots 0)$$

$$(r_i, r_k)^2 = (r'_i, r'_k)^2 = \delta_{ik} \quad i, k = 1 \dots n - 2$$

$$(p, r_i) = (p, p) = 0$$

$$(q', r'_i) = (q', q') = 0$$

$\mathbf{x} T, \mathbf{x}' T$ heisst Normalform (3.4) des Punktepaares \mathbf{x}, \mathbf{x}' .

Beweis: Nach (1.4) existiert ein $T \in GL(l, \mathbf{R})$ derart, dass

$$\mathbf{x} T = (r_1 \dots r_{n-2}, p, 0 \dots 0).$$

Aus

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l$$

folgt die Behauptung. ■

Lemma 4: Sei (15) die Normalform (3.4) des Punktepaares \mathbf{x}, \mathbf{x}' .

In $V(\mathbf{R})$ existieren eindeutig Nullvektoren q und p' so, dass

$$(q, r_i) = (p', r'_i) = 0 \quad i = 1 \dots n - 2$$

$$(p, q) = (p', q') = 1.$$

Beweis: In $V(\mathbf{R})$ existiert mindestens ein Nullvektor q bzw. p' (1.3). Seien q_1 und q_2 zwei Nullvektoren und es gelte:

$$(q_t, r_i) = 0 \quad (p, q_t) = 1 \quad t = 1, 2 \quad i = 1 \dots n - 2.$$

Da

$$V(\mathbf{R}) = \langle r_1 \dots r_{n-2} \rangle \perp \langle p, q_t \rangle$$

kann q_2 als Linearkombination von q_1 und p dargestellt werden:

$$q_2 = \lambda p + \mu q_1 \quad \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}.$$

Aus $(p, q_2) = 1$ folgt $\mu = 1$ und aus $(q_2, q_2) = 0$ $\lambda \mu = 0$. ■

Den letzten und schwierigsten Fall in der Diskussion der Limespunkte erledigt der folgende

Satz 6: a) Sei $\dim \langle x_1 \dots x_l \rangle = \dim \langle x'_1 \dots x'_l \rangle = n - 1$ und

$$x \sim x' (O(n, \mathbb{C})).$$

Dann sind x und x' Limespunkte (3.1) (3.5).

b) Sei $\dim \langle x_1 \dots x_l \rangle = \dim \langle x'_1 \dots x'_l \rangle = n - 1$, und x bezüglich $O(n, \mathbb{C})$ nicht äquivalent zu x' ,

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l$$

und (15) die Normalform (3.4) des Punktepaares x, x' .

x und x' sind genau dann Limespunkte, wenn

$$\text{Det}(r_1 \dots r_{n-2}, p, q) = \text{Det}(r'_1 \dots r'_{n-2}, p', q').$$

Beweis: a) Seien x und x' bezüglich $O^{(1)}(n, \mathbb{C})$ nicht äquivalent, da sonst die Behauptung trivial ist. Aus $\text{rad} \langle x \rangle = \text{rad} \langle x' \rangle = 0$ folgt $\text{rad}(\langle x_1 \dots x_l \rangle^\perp) = 0$. Durch eine Spiegelung in $\langle x_1 \dots x_l \rangle^\perp$ kann daher immer erreicht werden, dass $x \sim x' (O^{(1)}(n, \mathbb{C}))$.

Wenn $\dim(\text{rad} \langle x \rangle) = \dim(\text{rad} \langle x' \rangle) = 1$ ist, kann für x, x' die folgende Normalform (1.4) gefunden werden:

$$x T = (r_1 \dots r_{n-2}, p, 0 \dots 0)$$

$$x' T = (r'_1 \dots r'_{n-2}, p', 0 \dots 0)$$

Sei $\{\varepsilon^i\}$ eine Nullfolge. Wir definieren

$$z^i T = (r_1 \dots r_{n-2}, p + \varepsilon^i q, (\varepsilon^i)^2 p + (\varepsilon^i)^2 q, 0 \dots 0)$$

$$z'^i T = (r'_1 \dots r'_{n-2}, p' + \varepsilon^i q', \varepsilon^i p' + (\varepsilon^i)^3 q', 0 \dots 0).$$

Nach Konstruktion ist

$$z^i \sim z'^i (O^{(1)}(n, \mathbb{C}))$$

und

$$x = \lim_{i \rightarrow \infty} z^i \quad x' = \lim_{i \rightarrow \infty} z'^i.$$

b) Es existiert ein $\Sigma \in O(n, \mathbb{C})$ derart, dass

$$r'_i = \Sigma r_i \quad i = 1 \dots n - 2$$

$$p' = \Sigma p$$

$$q' = \Sigma q$$

Σ ist durch x und x' eindeutig festgelegt, da q und p' durch x und x' bestimmt sind.

Wir betrachten den Spezialfall $n = 2$. Es gibt Umgebungen $U(x)$ und $U(\Sigma^{-1} x')$ derart, dass $O(n, \mathbb{C})$ -äquivalente Punkte $w \in U(x)$, $w' \in U(\Sigma^{-1} x')$ auch $O^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -äquivalent sind.

Zusammen mit Satz 2 folgt die Behauptung. ■

3.5. Die in 3.4 gewonnenen Resultate gestatten den Begriff «Limespunkte» derart neu zu definieren, dass dabei weder eine Einbettung von $V(\mathbf{R})$ in $V(\mathbf{C})$ noch eine Punktfolge nötig ist.

Definition: a) In $V(\mathbf{R})$ sei eine symplektische Geometrie gegeben. $\mathbf{x} \in V^l(\mathbf{R})$ und $\mathbf{x}' \in V^l(\mathbf{R})$ heissen *Limespunkte* (3.1), wenn

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l.$$

b) In $V(\mathbf{R})$ sei eine orthogonale Geometrie gegeben. $\mathbf{x} \in V^l(\mathbf{R})$ und $\mathbf{x}' \in V^l(\mathbf{R})$ heissen *Limespunkte* (3.1), wenn ausser

$$(x_i, x_k) = (x'_i, x'_k) \quad i, k = 1 \dots l$$

eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\dim \langle \mathbf{x} \rangle \neq \dim \langle \mathbf{x}' \rangle$
2. $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle \leq n - 2$
3. $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle = n \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{x}' (O^{(1)}(n, \mathbf{C}))$
4. $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle = n - 1 \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{x}' (O(n, \mathbf{C}))$
5. $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle = n - 1, \text{Det}(r_1 \dots r_{n-2}, p, q) = \text{Det}(r'_1 \dots r'_{n-2}, p', q') \cdot 7)$

3.6. *Satz 7:* In $V(\mathbf{R})$ sei ein symmetrisches Skalarprodukt mit Trägheitsindex $\tau = 0$ (1.3) gegeben.

Zwei Limespunkte (3.1) (3.5) $\mathbf{x} \in V^l(\mathbf{R})$ und $\mathbf{x}' \in V^l(\mathbf{R})$ sind $O^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent (1.4).

Beweis: Aus $\text{rad} \langle \mathbf{x} \rangle = \text{rad} \langle \mathbf{x}' \rangle = 0$ folgt $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle$. Nach dem Satz von WITT ist $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' (O(n, \mathbf{C}))$. Die Behauptung ist offenbar für $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = n$ richtig. Wenn $\dim \langle x_1 \dots x_l \rangle < n$ ist, kann durch eine Spiegelung in $\langle x_1 \dots x_l \rangle^\perp$ immer erreicht werden, dass

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' (O^{(1)}(n, \mathbf{C})). \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Satz B gilt für die reelle orthogonale Gruppe mit Trägheitsindex $\tau = 0$ ohne die Voraussetzung, je zwei Limespunkte $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{R}}, \mathbf{x}' \in D_{\mathbf{R}}$ sind $L^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent.

3.7. *Satz 8:* In $V(\mathbf{R})$ sei ein symmetrisches Skalarprodukt (1.2) mit Trägheitsindex $\tau = 1$ (1.3) gegeben. Die folgenden Aussagen über das Gebiet $D_{\mathbf{R}} \subset V^l(\mathbf{R})$ (1.4) sind äquivalent:

1. Je zwei Limespunkte (3.1) (3.5) $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{R}}, \mathbf{x}' \in D_{\mathbf{R}}$ sind $L^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent (1.2) (1.4).
2. Je zwei $L^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalente Punkte sind $L^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent.

Beweis: Aus 1 folgt 2 als unmittelbare Konsequenz der Resultate in (3.4). $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{R}}$ und $\mathbf{x}' \in D_{\mathbf{R}}$ seien Limespunkte. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\dim \langle \mathbf{x}' \rangle \leq \dim \langle \mathbf{x} \rangle$ voraus.

⁷⁾ Vgl. Satz 6 (3.4).

Sei $\dim \langle \mathbf{x}' \rangle < \dim \langle \mathbf{x} \rangle$. Es existiere ein $T \in GL(l, \mathbb{R})$ das \mathbf{x} und \mathbf{x}' in Normalform transformiert⁸⁾:

$$\mathbf{x} T = (t_1 \dots t_r, p, 0 \dots 0)$$

$$\mathbf{x}' T = (t'_1 \dots t'_r, 0, 0 \dots 0) .$$

In allen Umgebungen $U(\mathbf{x})$ und $U(\mathbf{x}')$ existieren $L^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -äquivalente Punkte $\mathbf{k} \in U(\mathbf{x})$ und $\mathbf{k}' \in U(\mathbf{x}')$ die nicht $L^{(1)}(n, \mathbb{R})$ -äquivalent sind.

Sei $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle$ und das Punktepaar \mathbf{x}, \mathbf{x}' nicht $L(n, \mathbb{C})$ -äquivalent. Wieder kann ein $T \in GL(l, \mathbb{R})$ gefunden werden, das \mathbf{x} und \mathbf{x}' in die Normalform transformiert:

$$\mathbf{x} T = (t_1 \dots t_r, p, 0 \dots 0)$$

$$\mathbf{x}' T = (t'_1 \dots t'_r, 0, q', \dots 0) .$$

Nur der Fall $\dim \langle \mathbf{x} \rangle = \dim \langle \mathbf{x}' \rangle = n - 1$ ist nicht trivial. In allen Umgebungen $U(\mathbf{x})$ und $U(\mathbf{x}')$ existieren nach Satz 6 $L^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -äquivalente Punkte \mathbf{k}, \mathbf{k}' ,

$$\mathbf{k} T = (t_1 \dots t_r, p, \varepsilon q, 0 \dots 0)$$

$$\mathbf{k}' T = (t'_1 \dots t'_r, \varepsilon p', q', 0 \dots 0)$$

die nicht $L^{(1)}(n, \mathbb{R})$ -äquivalent sind. ■

Bemerkung: In $V(\mathbb{R})$ sei ein symmetrisches Skalarprodukt mit Trägheitsindex $\tau > 1$ gegeben. Aussage 2 ist immer noch eine Folge von Aussage 1, aber nicht umgekehrt.

Wir betrachten die direkte Summe zweier hyperbolischer Ebenen,

$$V(\mathbb{R}) = \langle p_1 q_1 \rangle \perp \langle p_2 q_2 \rangle$$

und definieren

$$\mathbf{x} = (p_1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{x}' = (0, 0, q_1, 0) .$$

\mathbf{x} und \mathbf{x}' sind in $V^4(\mathbb{R})$ Limespunkte und nicht $L(4, \mathbb{R})$ -äquivalent. In allen Umgebungen $U(\mathbf{x})$ und $U(\mathbf{x}')$ existieren $L^{(1)}(n, \mathbb{C})$ -äquivalente Punkte \mathbf{k} und \mathbf{k}'

$$\mathbf{k} = (p_1, \varepsilon p_2, \varepsilon q_1, \varepsilon q_2)$$

$$\mathbf{k}' = (\varepsilon p_1, \varepsilon q_2, q_1, \varepsilon p_2)$$

die nicht $L^{(1)}(n, \mathbb{R})$ -äquivalent sind.

Satz 8 erlaubt eine neue Formulierung von Satz B:

Satz von H. STAPP: Sei f eine tensorwertige, in einem reellen Gebiet $D_R \subset V^l(\mathbb{R})$ (1.4) analytische (eindeutige) Funktion.

Zu f gehöre eine endlichdimensionale Tensorarstellung der orthogonalen Gruppe $O(n, \mathbb{R})$ (1.2) mit dem Trägheitsindex $\tau = 1$ (1.3) derart, dass aus

$$\mathbf{k} \in D_R, \mathbf{k}' \in D_R, \mathbf{k}' = \Lambda \mathbf{k}, \Lambda \in O^{(1)}(n, \mathbb{R})$$

⁸⁾ Der allgemeine Fall kann ebenso behandelt werden,

folgt

$$f(\mathbf{k}') = S(\Lambda) f(\mathbf{k}) .$$

Je zwei $O^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -äquivalente (1.2) (1.4) Punkte seien $O^{(1)}(n, \mathbf{R})$ -äquivalent.

Behauptung: Es existiert zu jeder kompakten Menge $C_R \subset D_R$ eine $O^{(1)}(n, \mathbf{C})$ -invariante, komplexe, offene Umgebung $U(C_R)$ und eine analytische Fortsetzung \hat{f} von f auf $U(C_R)$ mit den Eigenschaften:

1. \hat{f} ist auf $U(C_R)$ eindeutig,
2. aus $\mathbf{z} \in U(C_R)$, $\mathbf{z}' \in U(C_R)$, $\mathbf{z}' = \Lambda \mathbf{z}$, $\Lambda \in O^{(1)}(n, \mathbf{C})$ folgt

$$\hat{f}(\mathbf{z}') = S(\Lambda) \hat{f}(\mathbf{z}) .$$

Anhang

Die Zusammenhangskomponenten der klassischen, reellen Liegruppen [9].

Es ist bekannt, dass die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, \mathbf{R})$ in die beiden Zusammenhangskomponenten $GL_+ = \{A \mid A \in GL(n, \mathbf{R}), \det A > 0\}$ und $GL_- = \{B \mid B \in GL(n, \mathbf{R}), \det B < 0\}$ zerfällt. Die Gruppe der speziellen linearen Transformationen $SL(n, \mathbf{R})$ ist einfach zusammenhängend. Wir fragen jetzt nach den Zusammenhangskomponenten der reellen symplektischen und reellen orthogonalen Gruppen.

1. Die reelle symplektische Gruppe wird von den *symplektischen Transvektionen* [3] erzeugt. Jedes Element $\Sigma \in Sp(n, \mathbf{R})$ kann als endliches Produkt dargestellt werden

$$\Sigma = \tau_{A_1} \dots \tau_{A_N} \quad A_i \in V(\mathbf{R})$$

$$\tau_{A_i}(x) = x + (x, A_i) A_i \quad x \in V(\mathbf{R}) .$$

$V(\mathbf{R})$ ist zusammenhängend und daher auch $Sp(n, \mathbf{R})$.

2. Die orthogonalen Gruppen $O^\tau(n, \mathbf{R})$ sind durch die Dimension n des Vektorraumes $V(\mathbf{R})$ und den Trägheitsindex τ des symmetrischen Skalarproduktes charakterisiert. Mit $\Omega^\tau(n, \mathbf{R})$ bezeichnen wir die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe in $O^\tau(n, \mathbf{R})$

$$\Omega^\tau(n, \mathbf{R}) = \{A \mid A = \prod_{i=1}^N A_i \Sigma_i A_i^{-1} \Sigma_i^{-1}, A_i \in O^\tau(n, \mathbf{R}), \Sigma_i \in O^\tau(n, \mathbf{R})\}$$

$\Omega^\tau(n, \mathbf{R})$ wird auch von allen Quadraten in $O^\tau(n, \mathbf{R})$ erzeugt [3].

a) Die Einskomponente $O^{\tau(1)}(n, \mathbf{R})$ von $O^\tau(n, \mathbf{R})$ ist in der Kommutatorgruppe $\Omega^\tau(n, \mathbf{R})$ enthalten

$$O^{\tau(1)}(n, \mathbf{R}) \subset \Omega^\tau(n, \mathbf{R}) .$$

Sei $\Lambda \in O^{\tau(1)}(n, \mathbf{R})$. Dann existiert die Produktdarstellung

$$A = \prod_{i=1}^N \exp \alpha_i$$

α_i gehört zur Liealgebra von $O_\tau(n, \mathbb{R})$. A kann daher auch als endliches Produkt von Quadraten geschrieben werden

$$A = \prod_{i=1}^N \left[\exp \frac{1}{2} \alpha_i \right]^2.$$

b) Die Kommutatorgruppe $\Omega^\tau(n, \mathbb{R})$ ist in der Einskomponente enthalten

$$\Omega^\tau(n, \mathbb{R}) \subset O^{\tau(1)}(n, \mathbb{R}).$$

Zu jedem $B \in O(n, \mathbb{R})$ existiert ein stetiger Weg $B(t)$, $t \in [0, 1]$, in $O^\tau(n, \mathbb{R})$ derart, dass gilt:

$$B(0) = \begin{pmatrix} \eta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_n \end{pmatrix} \eta_i^2 = 1 \quad B(1) = B.$$

Jedes Quadrat in $O^\tau(n, \mathbb{R})$ kann daher durch einen stetigen Weg mit der Einheit verbunden werden. Da die Quadrate in $O^\tau(n, \mathbb{R})$ die Kommutatorgruppe erzeugen, ist die Behauptung bewiesen.

Aus a) und b) folgt

$$\Omega^\tau(n, \mathbb{R}) = O^{\tau(1)}(n, \mathbb{R}).$$

c) Die Untergruppe $O_+(n, \mathbb{R})$ der orthogonalen Gruppe $O^{\tau=0}(n, \mathbb{R}) \equiv O(n, \mathbb{R})$

$$O_+(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A \in O(n, \mathbb{R}), \det A = 1\}$$

ist zusammenhängend und daher gleich der Einskomponente. $O(n, \mathbb{R})$ zerfällt in zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten $O_+(n, \mathbb{R})$ und $O_-(n, \mathbb{R})$

$$O_-(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A \in O(n, \mathbb{R}), \det A = -1\}.$$

d) Sei der Trägheitsindex τ des Skalarproduktes nicht Null. Die zugehörigen Isometriegruppen sollen im folgenden *Pseudoorthogonale Gruppen* heissen. Dann gilt zwischen der Gruppe $O_+^\tau(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A \in O^\tau(n, \mathbb{R}), \det A = 1\}$, der Kommutatorgruppe, sowie der *zyklischen Gruppe* der Ordnung 2, Z_2 , die Beziehung [3]

$$O_+^\tau(n, \mathbb{R}) / \Omega^\tau(n, \mathbb{R}) \cong Z_2.$$

In $V(\mathbb{R})$ existiert eine Hyperbolische Ebene H (1.3)

$$H = \langle p, q \rangle.$$

Wir definieren ein Element J aus $O_+^\tau(n, \mathbb{R})$ wie folgt:

$$\begin{aligned} Jp &= -p & Jx &= x \quad \forall x \in H^\perp \\ Jq &= -q \end{aligned}$$

J gehört nicht zur Kommutatorgruppe. Wenn $A \in O_+^\tau(n, \mathbb{R})$ nicht zur Kommutatorgruppe gehört, so ist $JA \in \Omega^\tau(n, \mathbb{R})$. Es existiert also ein stetiger Weg in $\Omega^\tau(n, \mathbb{R})$ von JA nach 1. A kann daher durch einen stetigen Weg mit J verbunden werden. $O_+^\tau(n, \mathbb{R})$ zerfällt somit in zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten,

$$O_+^\tau(n, \mathbb{R}) = \Omega^\tau(n, \mathbb{R}) \cup J \Omega^\tau(n, \mathbb{R})$$

$$J \Omega^\tau(n, \mathbb{R}) = \{B \mid B = JA, A \in \Omega^\tau(n, \mathbb{R})\}.$$

Mit K_4 bezeichnen wir das direkte Produkt $Z_2 \otimes Z_2$ (Kleinsche Vierergruppe). Die Gruppe $O^\tau(n, \mathbf{R})$ zerfällt in vier disjunkte Zusammenhangskomponenten und es gilt:

$$O^\tau(n, \mathbf{R})/\Omega^\tau(n, \mathbf{R}) \cong K_4.$$

e) Zusammenfassung:

Die spezielle lineare und die symplektische Gruppe (1.1) (1.2) sind einfach zusammenhängend.

Die allgemeine lineare und die orthogonale Gruppe ($\tau = 0$) zerfallen in zwei Zusammenhangskomponenten und es gilt:

$$GL(n, \mathbf{R})/GL_+(n, \mathbf{R}) \cong Z_2 \quad O(n, \mathbf{R})/O_+(n, \mathbf{R}) \cong Z_2.$$

Die Pseudoorthogonalen Gruppen $O^\tau(n, \mathbf{R})$, $\tau > 0$, zerfallen in vier Zusammenhangskomponenten und es gilt:

$$O^\tau(n, \mathbf{R})/O^{\tau(1)}(n, \mathbf{R}) \cong K_4. \quad ^9)$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. P. STAPP, *Studies in the Foundations of S-Matrix Theory*, University of California, Lawrence Radiation Laboratory Report, UCRL-10843.
- [2] J. DIEUDONNÉ, *La géométrie des groupes classique*, Erg. der Math., Bd. 5.
- [3] E. ARTIN, *Geometrical Algebra*, Interscience tracts 1957.
- [4] K. HEPP, *Klassische komplexe Liesche Gruppen und kovariante analytische Funktionen*, Math. Ann. 152.
- [5] D. N. WILLIAMS, *Construction of Invariant Scalar Amplitudes without Kinematical Singularities for Arbitrary-Spin Non-Zero-Mass Two-Body Scattering Processes*, University of California, Lawrence Radiation Laboratory Report, UCRL 11, 113.
- [6] B. A. FUKS, *Analytic Function of Several Complex Variables* (AMS).
- [7] P. MINKOWSKI, D. N. WILLIAMS, and R. SEILER, *On Stapp's Theorem, Lectures in Theoretical Physics*, Univ. of Colorado press, Boulder 1964.
- [8] D. HALL und A. S. WIGHTMANN, *Mat.-fys. Medd.* 31, No. 5 (1957).
- [9] HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic press (1962).

⁹⁾ Vgl. Abschnitt d.