

On the derivation and commutation of operator functionals

Autor(en): **Guenin, Marcel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **41 (1968)**

Heft 1

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113875>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On the Derivation and Commutation of Operator Functionals

by **Marcel Guenin**

Institut de Physique Théorique, Université de Genève

(22. IX. 67)

Abstract. We give compact, formal expressions for $\partial/\partial s f(F(s))$ and $[H, f(A)]$, where $f(\cdot)$ is an arbitrary function analytic in some domain, and $H, A, F(s)$ are arbitrary operators.

Introduction

Operator functions appear every day in a theoretician work, and it is often difficult to compute explicitly their derivatives or their commutator with some other operator. R. WILCOX [1] has recently written a good review of new and old formulas. Since two key formulas which we did derive some time ago do not seem to be known, we think that it might be useful to make them more widely available. These formulas have, of course, only formal significance and their applicability has to be checked by the user.

Notations

We shall denote by $\Omega_n(A, B)$ the multiple commutator of A and B , defined recursively by

$$\Omega_0(A, B) = B \quad \Omega_{n+1}(A, B) = [A, \Omega_n(A, B)]$$

(an other frequently used notation is $\{A^n, B\} \equiv \Omega_n(A, B)$.)

Preliminary Formula

We first show that

$$A B^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j B^{n-j} \Omega_j(B, A) \quad (1)$$

and

$$B^n A = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Omega_j(B, A) B^{n-j} \quad (2)$$

where $\binom{n}{j}$ denotes the usual binomial coefficient. We proceed by induction, clearly, the formula holds for $n = 1$.

Suppose it to be true for $n - 1$, then

$$\begin{aligned} A B^{n-1} B &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j B^{n-j-1} \Omega_j(B, A) B \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j B^{n-j} \Omega_j(B, A) - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j B^{n-j-1} \Omega_{j+1}(B, A) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j B^{n-j} \Omega_j(B, A) . \end{aligned}$$

The formula (2) is derived in exactly the same way.

1st Formula. We want to show that

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} f(F(s)) &= \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j+1)}(F(s)) \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \Omega_j\left(F(s), \frac{\partial}{\partial s} F(s)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} \Omega_j\left(F(s), \frac{\partial}{\partial s} F(s)\right) f^{(j+1)}(F(s)). \end{aligned} \quad (3)$$

Where $f^{(k)}(F(s))$ is the k^{th} functional derivative of $f(F(s))$ with respect to $F(s)$.

We suppose $f(F(s))$ to be given by its power expansion $f(F(s)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F(s)^n$ from which follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n F(s)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} (-1)^j F(s)^{n-j-1} \Omega_j\left(F(s), \frac{\partial}{\partial s} F(s)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \Omega_j\left(F(s), \frac{\partial}{\partial s} F(s)\right) F(s)^{n-j-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F(s)^k \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+k+1} \binom{l+k+1}{l+1} (-1)^l \Omega_l\left(F(s), \frac{\partial}{\partial s} F(s)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+k+1} \binom{l+k+1}{l+1} \Omega_l\left(F(s), \frac{\partial}{\partial s} F(s)\right) F(s)^k \end{aligned} \quad (4)$$

and hence (3).

2nd Formula. It is as elementarily derived as the preceding one

$$[H, f(A)] = \sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}(A) \frac{(-1)^j}{j!} \Omega_j(A, H) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \Omega_j(A, H) f^{(j)}(A). \quad (5)$$

We have

$$\begin{aligned} \left[H, \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^j A^{n-j} \Omega_j(A, H) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \Omega_j(A, H) A^{n-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \sum_{l=1}^{\infty} \binom{l+k}{l} (-1)^l a_{l+k} \Omega_l(A, H) \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \binom{l+k}{l} a_{l+k} \Omega_l(A, H) A^k. \end{aligned} \quad (6)$$

and hence (5).

For applications of these formulas to physical problems, we refer to coming publications of the author together with G. VELO.

Note added in proofs: I have been informed by R. WILCOX and W. BRITTIN that a formula equivalent to (3) has also been derived by W. E. BRITTIN and J. DREITLEIN. I thank R. WILCOX and W. BRITTIN for correspondence.

References

- [1] R. M. WILCOX, Jour. Math. Phys. 8, 962 (1967).