

# Les règles de supersélection continues

Autor(en): **Piron, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **42 (1969)**

Heft 2

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-114070>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Les règles de supersélection continues <sup>1)</sup>

par **C. Piron**

Institut de Physique Théorique Genève

(2 VIII 68)

*Abstract.* Starting from the calculus of propositions, we develop a formalism which allows to treat continuous superselection rules and give some examples of applications of this formalism.

### I. Introduction

WICK, WIGHTMAN et WIGNER [1] ont proposé d'appeler supersélection une règle qui interdit toute transition d'un certain sous-espace dans un autre, quelle que soit l'interaction subie par le système (en particulier lors d'une mesure), par opposition aux règles de sélections qui interdisent certaines transitions au cours de l'évolution du système isolé. Considérant l'espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}$  divisé en sous-espaces cohérents  $\mathfrak{H}_n$  ils ont caractérisé une telle règle par les propriétés suivantes:

1° Un opérateur autoadjoint  $A$  ne correspond à une observable que si ses éléments de matrice

$$\langle \varphi_{n_1} | A | \varphi_{n_2} \rangle \quad \text{où } n_1 \neq n_2 \quad \text{et } | \varphi_{n_i} \rangle \in \mathfrak{H}_{n_i}$$

sont identiquement nuls.

2° On ne peut pas mettre en évidence la phase  $e^{i\lambda}$  de l'état:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (| \varphi_{n_1} + e^{i\lambda} | \varphi_{n_2} \rangle) \quad \text{où } n_1 \neq n_2 \quad \text{et } | \varphi_{n_i} \rangle \in \mathfrak{H}_{n_i}.$$

En d'autres termes, les matrices densités:

$$\varrho = \frac{1}{2} (| \varphi_{n_1} \rangle + e^{i\lambda} | \varphi_{n_2} \rangle) (\langle \varphi_{n_1} | + e^{-i\lambda} \langle \varphi_{n_2} |)$$

et

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{2} (| \varphi_{n_1} \rangle \langle \varphi_{n_1} | + | \varphi_{n_2} \rangle \langle \varphi_{n_2} |)$$

sont équivalentes:

$$\text{tr} (A \varrho) = \text{tr} (A \bar{\varrho}) \quad \forall \text{ l'observable } A.$$

Elles représentent donc le même état, lequel est un mélange. Dans notre formalisme, c'est ces deux propriétés qui nous servent de définition pour les règles de super-

<sup>1)</sup> Recherche, en partie, financée par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

sélection c'est pourquoi nous définirons toutes les grandeurs physiques en termes d'espaces cohérents sans faire appel à un grand espace qui les contiendrait tous [2]. Ainsi nous abandonnons l'aspect dynamique de l'ancienne définition et du même coup l'analogie avec la notion de règle de sélection.

## II. Le formalisme

En général, le système de propositions  $\tau$  (c'est un treillis complet, orthomodulaire, atomique et semi-modulaire) n'est pas irréductible, mais est union directe de sous-systèmes de propositions  $\tau_\alpha$  qui sont eux des sous-treillis irréductibles [3]:

$$\tau = \bigvee_{\alpha} \tau_{\alpha} \quad \alpha \in \Omega. \quad (2.1)$$

Pour chaque  $\alpha \in \Omega$  donné, il existe un morphisme de  $\tau$  dans  $\tau_\alpha$  défini par:

$$\mu_\alpha: \kappa \mapsto \kappa_\alpha \quad (2.2)$$

où  $\kappa_\alpha$  est la proposition qui intervient dans la décomposition canonique de  $\kappa = \bigvee_{\alpha} \kappa_\alpha$ . Ainsi le sous treillis  $\tau_\alpha$  est un rétract de  $\tau$ .

Le centre  $\mathfrak{Z}$  de  $\tau$ , c'est-à-dire le sous-treillis des propositions compatibles avec toutes les autres, est isomorphe au treillis des parties de  $\Omega$ .

Chaque  $\tau_\alpha$  peut être réalisé par les sous-espaces fermés d'un espace vectoriel sur un corps que nous supposons être le corps  $\mathbf{C}$  des complexes. Dans ces conditions nous représenterons les propositions de  $\tau_\alpha$  par les projecteurs d'un espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}_\alpha$ . Les propositions de  $\tau$  sont alors représentées par les familles de projecteurs  $\{\kappa_\alpha\}$ .

Une observable numérique est un  $\sigma$ -morphisme (unitaire)  $A: \Delta \mapsto A(\Delta)$  du treillis des ensembles de Borel  $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$  de la droite réelle  $\mathbf{R}$  dans  $\tau$ :

$$A \left( \bigcup_1^{\infty} \Delta_i \right) = \bigvee_1^{\infty} (\Delta_i) \quad (2.3)$$

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow A(\Delta_1) \perp A(\Delta_2) \quad (2.4)$$

$$A(\mathbf{R}) = I. \quad (2.5)$$

A chaque observable correspond une famille d'observables  $A_\alpha = \mu_\alpha \cdot A$  comme le montre le diagramme suivant:

$$\mathfrak{B}(\mathbf{R}) \xrightarrow{A} \tau \xrightarrow{\mu_\alpha} \tau_\alpha \quad (2.6)$$

et réciproquement, étant donné une famille d'observables  $A_\alpha$  de buts  $\tau_\alpha$ , il existe une observable  $A$  définie par:

$$A(\Delta) = \bigvee_{\alpha} A_\alpha(\Delta). \quad (2.7)$$

Ainsi chaque observable  $A$  peut être représenté par une famille d'opérateurs  $\{A_\alpha\}$  agissant dans les espaces  $\mathfrak{H}_\alpha$ .

Un état est une application  $\mathfrak{W}$  de  $\tau$  dans le segment  $[0, 1]$  satisfaisant aux relations :

$$\mathfrak{W}(I) = 1 \quad (2.8)$$

$$\mathfrak{W} \left( \bigvee_1^{\infty} \kappa_i \right) = \sum_1^{\infty} \mathfrak{W}(\kappa_i) \quad \kappa_i \perp \kappa_j \quad (2.9)$$

$$\mathfrak{W}(\kappa) = \mathfrak{W}(y) = 0 \Rightarrow \mathfrak{W}(\kappa \vee y) = 0. \quad (2.10)$$

$\mathfrak{W}$  restreint au centre  $\mathfrak{Z}$  est une probabilité au sens ordinaire; si c'est un mélange il existe  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$  telle que  $\mathfrak{W}(\mathfrak{z}) \neq 0$  et  $\mathfrak{W}(\mathfrak{z}') \neq 0$ , et ainsi

$$\mathfrak{W}_1(\kappa) = \mathfrak{W}(\kappa \wedge \mathfrak{z}) \mathfrak{W}(\mathfrak{z})^{-1}$$

$$\mathfrak{W}_2(\kappa) = \mathfrak{W}(\kappa \wedge \mathfrak{z}') \mathfrak{W}(\mathfrak{z}')^{-1}$$

sont deux états de  $\tau$  tels que :

$$\mathfrak{W}(\kappa) = \mathfrak{W}(\mathfrak{z}) \mathfrak{W}_1(\kappa) + \mathfrak{W}(\mathfrak{z}') \mathfrak{W}_2(\kappa).$$

Ce qui prouve qu'un état est un mélange si sa restriction sur  $\mathfrak{Z}$  est un mélange. Ainsi tout état pur peut être représenté par un point  $\alpha \in \Omega$  et un vecteur unitaire de l'espace  $\mathfrak{H}_\alpha$  correspondant [4]. En général, un état est représenté par une famille de matrices densités  $\{\rho_\alpha\}$  agissant dans les espaces  $\mathfrak{H}_\alpha$  et une probabilité  $m$  définie sur les parties de  $\Omega$ ; et la valeur moyenne d'une observable  $A$  est donnée par [5]:

$$\langle A \rangle = \int_{\Omega} \text{tr} (\rho_\alpha A_\alpha) m(d\alpha) \quad (2.11)$$

où

$$\int_{\Omega} \text{tr} (\rho_\alpha) m(d\alpha) = 1. \quad (2.12)$$

Si  $\Omega$  a la puissance du continu (si la règle de supersélection est continue), il est utile d'admettre aussi les probabilités  $m$  définies, non pas sur toutes les parties de  $\Omega$ , mais seulement sur une tribu de  $\Omega$ . Dans un tel cas, l'état n'est défini que sur une partie de  $\tau$ , et la valeur moyenne d'une observable  $A$  ne peut être calculée par la formule (2.11) que si la fonction  $\text{tr} (\rho_\alpha A_\alpha)$  est intégrable pour  $m$ .

Une symétrie  $\mathfrak{S}$  est un automorphisme du système de propositions  $\tau$ , c'est-à-dire une application bijective telle que :

$$\mathfrak{S}(\kappa \vee y) = \mathfrak{S}(\kappa) \vee \mathfrak{S}(y) \quad (2.13)$$

$$\kappa \perp y \Rightarrow \mathfrak{S}(\kappa) \perp \mathfrak{S}(y) \quad (2.14)$$

La restriction de  $\mathfrak{S}$  au centre  $\mathfrak{Z}$  est un automorphisme qui induit sur  $\Omega$  une permutation  $f$  selon la formule

$$\mathfrak{S}(I_\alpha) = I_{f(\alpha)} \quad (2.15)$$

La restriction de  $\mathfrak{S}$  au sous-treillis  $\tau_\alpha$  est un isomorphisme de  $\tau_\alpha$  sur  $\tau_{f(\alpha)}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \tau & \xrightarrow{\mu_\alpha} & \tau_\alpha \\
 \mathfrak{S} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{S}_\alpha \\
 \tau & \xrightarrow{\mu_{f(\alpha)}} & \tau_{f(\alpha)}
 \end{array} \tag{2.16}$$

$$\mathfrak{S}_\alpha \cdot \mu_\alpha = \mu_{f(\alpha)} \cdot \mathfrak{S} \tag{2.17}$$

L'ensemble des symétries de  $\tau$  forme un groupe qui agit transitivement sur  $\Omega$  si et si seulement les  $\tau_\alpha$  sont tous isomorphes entre-eux. Dans ce cas les espaces d'Hilbert  $\mathfrak{H}_\alpha$  sont tous isomorphes à un même espace  $\mathfrak{H}$ . C'est ce que nous supposons dans la suite en identifiant les  $\mathfrak{H}_\alpha$  à un même espace  $\mathfrak{H}$ . Une symétrie  $\mathfrak{S}$  est alors représentée, selon un théorème de Wigner, par une famille d'opérateurs semi-unitaires  $\{U_\alpha\}$  et une permutation  $f$  de  $\Omega$ . Il faut remarquer que chacun des  $U_\alpha$  n'est défini qu'à une phase près.

A chaque observable  $A$ , la symétrie  $\mathfrak{S}$  fait correspondre une nouvelle observable  $A^s$  selon le schéma:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{B}(R) & \xrightarrow{A} & \tau \\
 \downarrow A^s & & \downarrow \mathfrak{S} \\
 & & \tau
 \end{array} \tag{2.18}$$

$$A^s(\Delta) = \mathfrak{S} A(\Delta) \tag{2.19}$$

L'observable  $A^s$  étant représentée par  $\{A_\alpha^s\}$ , on en déduit la formule:

$$A_{f(\alpha)}^s = U_\alpha A_\alpha U_\alpha^{-1} \tag{2.20}$$

De même à chaque état  $\mathfrak{W}$ , la symétrie  $\mathfrak{S}$  fait correspondre un nouvel état  $\mathfrak{W}^s$  selon le schéma:

$$\begin{array}{ccc}
 \tau & \xrightarrow{\mathfrak{W}} & [0, 1] \\
 \mathfrak{S} \downarrow & & \uparrow \mathfrak{W}^s \\
 \tau & &
 \end{array} \tag{2.21}$$

$$\mathfrak{W}^s(\mathfrak{S} \kappa) = \mathfrak{W}(\kappa) \tag{2.22}$$

L'état  $\mathfrak{W}^s$  étant représenté par  $\{\varrho_\alpha^s\}$  et  $m^s$ , on en déduit les formules:

$$\varrho_{f(\alpha)}^s = U_\alpha \varrho_\alpha U_\alpha^{-1} \tag{2.23}$$

$$m^s(f(d\alpha)) = m(d\alpha) \tag{2.24}$$

De l'inspection des diagrammes (2,18) et (2,21) découle la relation:

$$\langle A^s \rangle_s = \langle A \rangle \tag{2.25}$$

qui exprime l'invariance de la valeur moyenne.

Soient  $p, q, r, \dots$  les éléments d'un groupe  $G$  réalisé par les symétries  $\mathfrak{S}(p), \mathfrak{S}(q), \mathfrak{S}(r), \dots$ , à l'équation

$$\mathfrak{S}(p) \mathfrak{S}(q) = \mathfrak{S}(p q)$$

il correspond dans notre représentation à une phase près, la relation:

$$U_{q(\alpha)}(p) U_{\alpha}(q) = \omega_{\alpha}(p, q) U_{\alpha}(p q) \quad (2.26)$$

où  $\omega_{\alpha}(p, q)$  est le facteur de phase, un nombre complexe de module 1, qui dépend non seulement de  $p$  et  $q$  mais aussi de  $\alpha$ . Ce facteur n'est d'ailleurs pas quelconque, la loi d'associativité appliquée aux équations [6]:

$$\begin{aligned} U_{qr(\alpha)}(p) U_{r(\alpha)}(q) U_{\alpha}(r) \\ = \omega_{r(\alpha)}(p, q) \omega_{\alpha}(p q, r) U_{\alpha}((p q) r) \\ = \omega_{\alpha}(p, q r) \omega_{\alpha}(q, r) U_{\alpha}(p(q r)) \end{aligned}$$

impose la relation:

$$\omega_{r(\alpha)}(p, q) \omega_{\alpha}(p q, r) = \omega_{\alpha}(p, q r) \omega_{\alpha}(q, r). \quad (2.27)$$

Si on considère une autre représentation de  $\mathfrak{S}(p)$  et qu'on change  $U_{\alpha}(p)$  en  $U'_{\alpha}(p) = \phi_{\alpha}(p) U_{\alpha}(p)$ , on est conduit à un autre facteur de phase:

$$\omega'_{\alpha}(p, q) = \omega_{\alpha}(p, q) \frac{\phi_{\alpha}(p, q)}{\phi_{q(\alpha)}(p) \phi_{\alpha}(q)}. \quad (2.28)$$

Nous dirons, de deux facteurs de phase reliés par une telle relation, qu'ils sont équivalents ou encore qu'ils sont du même type. Ainsi, sans changer de type de facteur, on peut supposer  $\omega_{\alpha}(e, e) = 1$  où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ , ce qui entraîne en vertu de (2.27)

$$\omega_{\alpha}(p, e) = \omega_{\alpha}(e, p) = 1 \quad \forall p \in G. \quad (2.29)$$

Si un facteur de phase est identiquement égal à 1 on dit qu'il est du type trivial. Tout facteur n'est pas du type trivial, néanmoins on a le résultat suivant:

Supposons  $G$  opérant transitivement dans  $\Omega$  [7] et soit  $LG(\alpha_0)$  le stabilisateur de  $\alpha_0 \in \Omega$  (c'est-à-dire le sous-groupe qui laisse  $\alpha_0$  invariant), si:

$$\omega_{\alpha_0}(p, q_0) = 1 \quad \forall p \in G \quad \text{et} \quad q_0 \in LG(\alpha_0) \quad (2.30)$$

alors  $\omega_{\alpha}(p, q)$  est du type trivial.

En effet, la condition (2.30) permet de déduire de la relation (2.27) l'égalité:

$$\omega_{\alpha_0}(p, q) = \omega_{\alpha_0}(p, r) \quad \forall r^{-1} q \in LG(\alpha_0)$$

qui nous permet de poser:

$$\phi_{\alpha}(p) = \phi_{q(\alpha_0)}(p) = \omega_{\alpha}(p, q).$$

Il en résulte:

$$\omega'_{\alpha_0}(p, q) = \omega_{\alpha_0}(p, q) \frac{\phi_{\alpha_0}(p q)}{\phi_{q(\alpha_0)}(p) \phi_{\alpha_0}(q)} = 1$$

d'où, toujours en vertu de (2.27)

$$\omega_{\alpha'}(p, q) = 1 \quad \forall p, q \in G \quad \text{et} \quad \alpha \in \Omega.$$

Jusqu'ici nous n'avons pas introduit de topologie, les symétries agissent algébriquement sur les observables et les états. Or la plus part des symétries ne peuvent s'interpréter que comme transformations passives, c'est-à-dire comme changements de représentation du système physique. Les symétries qui correspondent aux transformations actives et qui fournissent des lois statiques et dynamiques pour le système physique sont particulièrement simples et se caractérisent entre autres par des propriétés de continuité. Soit  $\mathfrak{P}$  l'ensemble des points (des atomes) de  $\tau$ , c'est-à-dire l'ensemble des propositions qui sont représentés par des familles de projecteurs tous nuls à l'exception d'un seul de rang un. On peut définir sur  $\mathfrak{P}$  une topologie à l'aide de la distance:

$$d(x, y) = \sup_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{B}(x) - \mathfrak{B}(y)) \quad (2.31)$$

où  $\sup_{\mathfrak{B}}$  désigne la borne supérieure pour l'ensemble des états purs  $\mathfrak{B}$  définis sur  $\tau$ . C'est bien une distance, car pour tout  $x \in \mathfrak{P}$  il existe un état pur qui vaut un pour  $x$ . Dans notre cas cette topologie est le produit de la topologie discrète sur  $\Omega$  par la topologie induite par le produit scalaire sur les rayons de l'espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}$ . Mais c'est chercher la difficulté que d'introduire une fois pour toute cette topologie sur  $\mathfrak{P}$ . Car le groupe  $G$  qui est donné avec sa topologie, ne pourra opérer continûment que d'une manière, en général, triviale sur  $\Omega$  [8]. Or l'interprétation physique exige bien qu'une suite  $x_1, x_2, x_3, \dots$  converge pour  $\sup_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{B}(x_1) - \mathfrak{B}(x_j))$  tendant vers zéro mais elle n'impose pas la réciproque. C'est pourquoi il est utile d'introduire une autre topologie pourvu qu'elle soit moins fine que celle définie par (2.31).

### III. Applications

Le rôle des règles de superselection discrètes en physique est bien connu, nous ne nous y attarderons pas. Mais il peut paraître difficile de citer un exemple de règle de superselection continue. En fait, les règles de superselection continues se sont introduites en physique quantique bien avant les discrètes et, les physiciens les ont maniées sans le savoir. En effet en mécanique quantique le temps joue le rôle de règle de superselection. Ce rôle se justifie physiquement du fait que la mesure du temps ne perturbe pas le système, en effet l'horloge du laboratoire est en général soigneusement isolée du système étudié par l'expérimentateur. Développons en quelques lignes ce point de vue, posons  $\Omega$  isomorphe à  $\mathbb{R}$  la droite réelle identifié au temps. Le treillis des propositions est alors l'union directe dessous-treillis isomorphes aux treillis des projecteurs des espaces d'Hilbert  $\mathfrak{H}_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . L'état pur du système est entièrement déterminé par la donnée d'un vecteur unitaire  $\psi_{t_0}$  de l'espace  $\mathfrak{H}_{t_0}$  correspondant à l'instant considéré, c'est-à-dire dans notre notation:

$$\varrho_t = |\psi_t\rangle \langle \psi_t| \quad (3.1)$$

$$m(dt) = \delta(t - t_0) dt. \quad (3.2)$$

Une famille d'opérateurs auto-adjoints  $\{A_t\}$  représente une observable dépendant en général explicitement du temps. Par exemple, la famille  $\{t I_t\}$  est l'observable « temps » et sa valeur moyenne dans l'état pur  $\psi_{t_0}$  est donnée selon (2.11) par:

$$\langle t \rangle = \int_{\mathbb{R}} \text{tr} (t I_t | \psi_t \rangle \langle \psi_t |) \delta | t - t_0 \rangle dt = t_0. \quad (3.3)$$

L'évolution est induite par des transformations de symétrie qui forment une représentation du groupe des translations dans le temps [9]. Ainsi à chaque translation du temps  $\tau$  on fait correspondre une symétrie  $\mathfrak{S}(\tau)$  définie par la famille d'opérateurs unitaires  $\{U_i(\tau)\}$  et la permutation  $f_\tau$  de  $\Omega$  définie par :

$$f_\tau: t \mapsto t + \tau. \quad (3.4)$$

En imposant l'homogénéité dans le temps c'est-à-dire  $U_{t_1}(\tau) = U_{t_2}(\tau) = U(\tau)$  et une condition de continuité, le théorème de Stone permet d'affirmer l'existence d'un opérateur autoadjoint  $H$  tel que [10]:

$$U(\tau) = e^{-iH\tau}. \quad (3.5)$$

Un deuxième exemple est celui d'une particule instable [11]. Si l'observation de l'époque de désintégration ne perturbe pas le système, nous pouvons postuler que la propriété d'être désintégrée ou non ainsi que l'époque  $\tau$  de la désintégration éventuelle sont règles de supersélection. Sous cette hypothèse, le système est décrit par un espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}^0$  correspondant à la particule non-désintégrée et une famille de  $\mathfrak{H}_\tau$  correspondant à la particule désintégrée au temps  $\tau$ . L'état général, à un instant  $t$ , est alors représenté par :

$$\begin{pmatrix} \varrho^0(t) \\ \varrho_\tau(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad m_\tau(t) d\tau \quad (3.6)$$

où selon (2.12)

$$\text{tr}(\varrho^0(t)) + \int \text{tr}(\varrho_\tau(t)) m_\tau(t) d\tau = 1. \quad (3.7)$$

$\text{tr}(\varrho^0(t))$  est la probabilité que la particule ne soit pas désintégrée à l'instant  $t$ , et  $\text{tr}(\varrho_\tau(t)) m_\tau(t) d\tau$  est la probabilité que la particule se soit désintégrée entre l'instant  $\tau$  et l'instant  $\tau + d\tau$ . Cette probabilité est évidemment nulle pour  $t < \tau$  et reste constante pour  $t > \tau$ .

Nous supposons que la particule étant non-désintégrée peut, soit évoluer selon un hamiltonien  $H^0$ , soit se désintégrer et ceci avec une probabilité  $\Gamma dt$  indépendante du passé de la particule; d'où l'équation :

$$\dot{\varrho}^0(t) = i [\varrho^0(t), H^0] - \Gamma \varrho^0(t). \quad (3.8)$$

D'autre part, la particule une fois désintégrée évolue selon un hamiltonien  $H$ ; d'où l'équation :

$$\dot{\varrho}_\tau(t) = i [\varrho_\tau(t), H]. \quad (3.9)$$

Si nous posons pour normalisation

$$\text{tr}(\varrho_\tau(t)) = \text{tr}(\varrho^0(\tau)) \quad (3.10)$$

nous trouvons

$$m_\tau(t) d\tau = \Gamma h(t - \tau) d\tau \quad (3.11)$$

où  $h$  est la fonction saut de Heaviside.

Comme dernier exemple nous allons traiter un cas ,moitié classique, moitié quantique. Il s'agit d'une particule classique de masse  $m$  portant un spin quantique  $1/2$ . L'espace des règles de supersélection  $\Omega$  est l'espace réel à 7 dimensions  $(p, q, t)$  et



chaque espace d'Hilbert  $\mathfrak{H}_{p,q,t}$  est à deux dimensions complexes. Un état pur est représenté par un vecteur unitaire  $\psi_{p_0,q_0,t_0}$  d'un espace  $\mathfrak{H}_{p_0,q_0,t_0}$  déterminé. L'évolution de ce système est induite par la symétrie:

$$\psi_{p,q,t} = U_{p_0,q_0,t_0}^{(\tau)} \psi_{p_0,q_0,t_0} \quad (3.12)$$

$$p = p_\tau(p_0, q_0, t_0) \quad (3.13)$$

$$q = q_\tau(p_0, q_0, t_0) \quad (3.14)$$

$$t = t_0 + \tau \quad (3.15)$$

obtenue par intégration des équations:

$$i \dot{\psi}_{p,q,t} = H_{p,q,t} \psi_{p,q,t}; \quad \dot{p} = -\partial_q H_c; \quad \dot{q} = \partial_p H_c \quad (3.16)$$

où  $H_{p,q,t}$  est un opérateur autoadjoint, l'hamiltonien quantique et  $H_c$  une fonction de  $p, q, t$ , l'hamiltonien classique.

En particulier si  $H_{p,q,t} = (k/|q|^2) \sigma^3$  où  $\sigma^3$  est la matrice de Pauli et si  $H_c = p^2/2m + g/|q|$ , cherchons la solution du problème de diffusion. Un état asymptotique rentrant étant donné par un vecteur unitaire  $\psi_{in}$ , la valeur  $S$  du paramètre d'impact et la quantité de mouvement à l'infini  $p_\infty$ , la particule est déviée dans le plan  $S$ ,  $p_\infty$  d'un angle  $\theta_\infty$  donné par la formule bien connue [12]:

$$Cot \frac{\theta_\infty}{2} = \frac{p_\infty^2 |S|}{g m} \quad (3.17)$$

le vecteur unitaire  $\psi_{out}$  s'obtient par intégration de (3.16). On trouve facilement en se rappelant la conservation du moment orbital  $-m q^2 \dot{\theta} = |p_\infty| \cdot |S|$

$$\psi_{out} = e^{-i \frac{k m (\pi - \theta_\infty)}{|p_\infty| \cdot |S|} \sigma^3} \psi_{in} \quad (3.18)$$

Dans cet exemple le lecteur remarquera que la topologie que joue un rôle naturel n'est pas celle donnée par la distance entre atomes selon (2.31) mais celle obtenue comme produit, de la topologie sur les rayons de  $\mathfrak{H}$ , et de la topologie habituelle de  $R^7$ .

### Remerciements

L'auteur remercie très vivement le professeur J. M. JAUCH et ses collègues M. GUENIN, J.-P. MARCHAND et B. MISRA pour les nombreuses et fructueuses discussions sur ce sujet.

### Références

- [1] G. C. WICK, A. S. WIGHTMAN and E. P. WIGNER, Phys. Rev. 88, 101 (1952); J. M. JAUCH, Helv. phys. Acta 33, 711 (1960); J. M. JAUCH and B. MISRA, Helv. phys. Acta 34, 699 (1961).
- [2] Pour un aperçu des difficultés qu'entraîne l'hypothèse d'un seul espace  $\mathfrak{H}$  et pour une manière de les surmonter voir: M. GUENIN, J. math. Phys. 7, 271 (1966).
- [3] C. PIRON, Helv. phys. Acta 37, 439 (1964); M. D. MACLAREN, Pac. J. Math 14, 597 (1964). Pour le lecteur peu familier avec le langage des treillis, voici une sorte de dictionnaire pour le cas habituel, c'est-à-dire sans règles de supersélection:

Proposition:  $a \rightarrow P_a$  un projecteur  
ordre:  $a < b \rightarrow P_a P_b = P_b P_a = P_a$

$$\begin{aligned}
\text{orthocomplément: } & a' \rightarrow P_{a'} = I - P_a \\
\text{Borne inférieure: } & a \wedge b \rightarrow P_{a \wedge b} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_a \wedge P_b)^n \\
\text{Borne supérieure: } & a \vee b \rightarrow P_{a \vee b} = I - P_{a' \wedge b'} \\
\text{Point: } & Q \rightarrow P_Q \text{ de rang un} \\
\text{Orthogonalité: } & a \perp b \rightarrow P_a P_b = P_b P_a = 0 \\
\text{Compatibilité: } & a \leftrightarrow b \rightarrow [P_a, P_b] = 0
\end{aligned}$$

- [4] A. M. GLEASON, *J. Math. Mech.* **6**, 885 (1957).
- [5] Si les  $\mathfrak{S}_\alpha$  sont séparables, cette formule (2.11) est valable pour  $\Omega$  dénombrable et peut être démontrée à l'aide de l'hypothèse du continu si  $\Omega$  a la puissance du continu: B. BIRKHOFF, *Lattice Theory Coll. Publ. Amer. Math. Soc.* (1948), voir le théorème 13 du chapitre XI. Si la probabilité  $m$  n'est pas définie pour toutes les parties de  $\Omega$ , il y a bien d'autres possibilités: C. PIRON, *Les Systèmes de propositions et les mesures généralisées* (1967).
- [6] Pour simplifier, nous supposons les  $U_\alpha$  linéaires. Il n'est pas difficile d'écrire le correspondant de (2.27) dans le cas général.
- [7] Le cas général se ramène à ce cas particulier. Soit  $z_0$  la proposition correspondant au sous-ensemble de  $\Omega$  orbite de  $\alpha_0$ , tout  $\varkappa \in \tau$  peut s'écrire sous la forme  $\varkappa = (\varkappa \wedge z_0) \vee (\varkappa \wedge z_0)'$ ;  $\tau$  est donc union directe du sous-treillis  $\tau_{z_0}$  et  $\tau_{z_0}'$  et  $G$  opère transitivement dans le centre de  $\tau_{z_0}$ .
- [8] C'est ainsi que certains auteurs démontrent que  $G$  doit laisser globalement invariants les sous-espaces cohérents  $\mathfrak{S}_\alpha$  si c'est un groupe connexe opérant continûment. Ce résultat conduit à nier le mouvement comme le faisait Zénon d'Elée au 5ème siècle avant J.-C. (Communication privée. Aristote, *Physique* VI 233a).
- [9] J. M. JAUCH, *Fondations of Quantum Mechanics*, Chapitre X (Addison Wesley 1968).
- [10] Pour le cas non homogène dans le temps le lecteur consultera H. EKSTEIN, *Presymmetry*, *Phys. Rev.* **153**, 1397 (1967).
- [11] E. PITTET, *Désintégration et règles de supersélection* (travail de diplôme 1968).
- [12] Voir par exemple GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, p. 83, (Addison Wesley 1956).