

Minimum radius of particles with spin

Autor(en): **Stueckelberg de Breidenbach, E.C.G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **45 (1972)**

Heft 4

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-114401>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Minimum Radius of Particles with Spin

by E. C. G. Stueckelberg de Breidenbach¹⁾

Universities of Geneva and Lausanne, and CERN

(15. XII. 71)

According to the generalized first law (momentum-energy and centre of energy-angular momentum), the density tensor of any insulated system Σ_{00} satisfies, in restricted relativity (r.r.)

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta}(x) = 0 \quad (\Theta^{\alpha\beta} = \Theta^{(\alpha\beta)})(x). \quad (1)$$

The energy is

$$H = \int_{\infty} (d^3 V h)(\vec{x}\check{t}) = \int_{\infty} (d^3 V \Theta^{44})(x) = \int_{\tau(y)=0} (d\check{\sigma}_\alpha \check{\Theta}^{\alpha 4})(y) \quad (2)$$

and the momentum

$$\check{\vec{P}} = \check{\vec{\Pi}} = \{\check{\Pi}_i\} \quad \check{\Pi}_i = \int_{\tau(y)=0} (d\check{\sigma}_\alpha \Theta_i^\alpha)(y) = \int_{\infty} (d^3 V \pi_i)(\vec{x}\check{t}).$$

The angular momentum $\check{\vec{M}} = \{\check{M}^i = M_{kl}, ikl \cup 123\}$ has the components

$$\check{M}_{ik} = \int_{\tau(y)=0} (d\check{\sigma}_\alpha (y_i \Theta_k^\alpha - y_k \Theta_i^\alpha))(y) = \int_{\infty} (d^3 V (x_i \pi_k - x_k \pi_i))(\vec{x}\check{t}) \quad (3)$$

and the centre of energy is determined by

$$\check{\vec{M}} = \check{\vec{M}} = \left\{ M_i = M_{i4} = \int (d\check{\sigma}_\alpha (y_i \check{\Theta}^{\alpha 4} - y^4 \Theta_i^\alpha))(y) = \int_{\infty} (d^3 V x_i h)(\vec{x}\check{t}) - \check{t} \check{\Pi}_i \right\} \quad (4)$$

the $\check{M}_{\alpha\beta} = \check{M}_{(\alpha\beta)}$ being constants.

$$\left. \begin{aligned} \check{z}(\check{t}) &= \frac{\check{\vec{M}}}{H} + \check{t} \frac{\check{\vec{\Pi}}}{H} = \frac{1}{H} \int_{\infty} (d^3 V \vec{x} h)(\vec{x}\check{t}) \\ \check{z}^4(\check{t}) &= \check{t} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$d\check{z}(\check{t})/d\check{t} = \check{\vec{\Pi}}/H \equiv \check{v}$ is the 3-velocity of the centre of energy (c.e.) $\check{z}(\check{t})$.

¹⁾ Paper presented at the Swiss Physical Society Meeting of Lausanne, 1 May, 1971, see: *Helv. phys. Acta*, **44**, 593 (1971).

In this frame τ (= proper time) $\stackrel{*}{=} \check{t}$, and $\vec{w} \stackrel{*}{=} \check{v}$; $\check{w}^4 \stackrel{*}{=} +1$. So we may write (5) in a covariant way

$$\left. \begin{aligned} z^i(\tau) &= M^i + \tau w^i, \\ \check{z}^4(\tau) &= \tau \check{w}^4. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Now we may choose in this frame $\vec{M} = 0$. Then the *world-line* (w.l.) $x^\alpha = z^\alpha(\tau)$ coincides with the $\check{t} = \check{x}^4$ -axis in this particular frame. Let $\vec{M} \neq 0$ be the intrinsic angular momentum (spin: $|\vec{M}|^2 = \hbar^2 S(S + 1)$) in this frame. Then, in any other frame $'x = Lx$, obtained by homogeneous Lorentz transformations L^2 from x , the w.l. $'x = 'z(\tau)$ is *parallel* (or *anti-parallel*) to the w.l. $x = z(\tau)$ (depending whether 'not' or 'yes' time inversion is included). \vec{M} however, as soon as $\vec{M} \neq 0$, no longer disappears in general. That means *these (anti-)parallels are shifted by an amount*, which can be easily obtained by L :

$$'M'^4_i = 'M'^i_4 (\equiv 'M'^i) = (L'^i_k L'^4_k - L'^i_k L'^4_k) \check{M}^l (ikl \cup 123), \tag{7}$$

where, taking (without time inversion $\text{sig}('t) = \text{sig}(\check{t})$)

$$\left. \begin{aligned} 'x'^1 &= x^1 \\ 'x'^2 &= x^2 \\ 'x'^3 &= (1 - v_0^2)^{-1/2} (x^3 - \check{v}_0 \check{t}) \\ '\check{t} = 'x'^4 &= (1 - v_0^2)^{-1/2} (-\check{v}_0 x^3 + \check{t}) \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

which determines

$$L'^3_3 = L'^4_4 = (1 - v_0^2)^{-1/2} \quad \check{L}'^3_4 = -\check{v}_0 (1 - v_0^2)^{-1/2} = \check{L}'^4_3 \tag{9}$$

all other L'^α_β being zero or one. One thus obtains ($v_0^3 = v_0$; $v_0^2 = v_0^1 = 0$), taking account of $'H = M(1 - v_0^2)^{-1/2}$, for the displacement of the c.e.:

$$\frac{\vec{M}}{'H} = - \frac{[\check{v}_0 \wedge \vec{M}]}{M} \tag{10}$$

The set of all c.e.'s fills a disk, normal to \check{v}_0 and to \vec{M} , whose radius R is given by $|\check{v}_0| = 1 - \epsilon$, $\epsilon \rightarrow +0$:

$$R = \frac{|\vec{M}|}{M} (1 - \epsilon) \Rightarrow \frac{\hbar}{M} \sqrt{s(s + 1)}, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \tag{11}$$

Now $\hbar/M = h/2\pi M = \lambda_c$ ($c = 1$) the *Compton wave length* of a particle with mass M . The result is quite satisfactory, because the optimum location of a particle of mass

²⁾ We choose

$$g^{ii} = g_{ii} = -g^{44} = -g_{44} = 1; \quad g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0 \text{ for } \alpha \neq \beta \tag{7a}$$

$'x = Lx$ is given by

$$'x'^\alpha = L'^\alpha_\beta x^\beta \quad 'g'^{\alpha\beta} = L'^\alpha_\gamma L'^\beta_\delta g^{\gamma\delta} \equiv g'^{\alpha\beta} \tag{7b}$$

M is given by the invariant wave packet $D_{\kappa}^{+}(x)$ ($\kappa = \hbar^{-1} M = \lambda_c^{-1}$), which decreases exponentially for space-like events $x^2 = x_{\alpha} x^{\alpha} > 0$

$$D_{\kappa}^{+}(x) \propto |x|^{-3} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda_c}\right), \quad |x| > \lambda_c \quad (12)$$

while for time-like events, it behaves $t^2 = -x^2 = -x_{\alpha} x^{\alpha} > 0$

$$D_{\kappa}^{+}(x) \propto |t|^{-3} \exp\left(+i \frac{|t|}{\lambda_c}\right), \quad |t| > \lambda_c \quad (13)$$