Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 47 (1974)
Heft: 6

Artikel: Das Zweikörperproblem der Elektrodynamik
Autor: Scherrer, Willy
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-114587

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Helvetica Physica Acta
Vol. 47, 1974.

Birkhäuser Verlag Basel

Das Zweikörperproblem der Elektrodynamik

by **Willy Scherrer**

Bern, Justingerweg 18

(25. IV. 74)

Zusammenfassung. Die klassische, im Newton'schen Rahmen definierte Wechselwirkung zwischen Elektron und Positron wird direkt in die spezielle Relativitätstheorie übertragen.

Als entscheidend bei diesem Vorhaben erweist sich *das Problem der korrespondierenden Phasen:* Die klassische *Gleichzeitigkeit* muss durch die relativistische *Signalverbundenheit* ersetzt werden.

Anschliessend wird ein Wirkungsprinzip in Gestalt eines invarianten Linienintegrals eingeführt, das neben den bekannten kinetischen Gliedern ein *relativistisches Coulombpotential* enthält.

Die resultierenden Bewegungsgleichungen sind im Prinzip vollständig berechenbar. Wichtigstes Ergebnis ist, abgesehen von einer unwesentlichen Einschränkung, ein Beweis für folgende Aussage:

Es existiert eine Fülle von stationären Lösungen mit grosser, resp. kleiner Totalenergie, falls nur der totale Drehimpuls genügend gross ist.

Diese Aussage ist nur eine Folge der Relativitätstheorie und daher unabhängig von der Quantentheorie. Offen bleibt also die Frage, ob eine Quantisierung nötig, respektive möglich ist.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] habe ich die Leitgedanken zu einer relativistischen Theorie der Wechselwirkung von geladenen Teilchen entwickelt. Insbesondere wurde, gestützt auf ein Wirkungsprinzip, die Theorie für zwei Teilchen von verschiedener Masse durchgeführt bis zur Aufstellung der Gleichungen für Energie, Translationsimpuls und Drehimpuls.

Kurz ausgedrückt ist die Theorie die direkte Uebertragung der klassischen, im Newton'schen Rahmen definierten Elektrodynamik in die Relativitätstheorie. Im klassischen Rahmen sind die für die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen einander korrespondierenden Phasen durch *Gleichzeitigkeit* definiert. Diese Definition ist in der Relativitätstheorie unbrauchbar, weil hier die Gleichzeitigkeit vom Bewegungszustand des Beobachters abhängt.

Der Grundgedanke der Theorie ist, die korrespondierenden Phasen durch *Signalverbundenheit* zu definieren. Was damit gemeint ist, soll anhand von zwei punktartigen Massen m_1 und m_2 kurz erläutert werden.

Eine *Phase* der Masse m_1 ist definiert durch einen Punkt ihrer Weltlinie, also einen *Weltpunkt* P_1. Entsprechend sei P_2 eine Phase von m_2. Korrespondierende Phasen werden nun am einfachsten wie folgt definiert:

> Der Zukunftskegel aus dem Zentrum P_1 trifft die Weltlinie von m_2 in höchstens einem Punkt P_2, den wir nun als '*die P_1 korrespondierende Phase*' bezeichnen.
>
> Der Vergangenheitskegel aus dem Zentrum P_2 trifft die Weltlinie von m_1 in dem einzigen Punkt P_1, der somit '*die P_2 korrespondierende Phase*' darstellt.

Es handelt sich also um eine eindeutige Korrespondenz. Dieselbe setzt sich bei kontinuierlicher Durchlaufung der Weltlinien fort, es sei denn, dass ein Teilchen entweder durch Strahlung oder im Unendlichen verschwindet.

Gemäss der gegebenen Beschreibung wirkt das Teilchen m_1 in die Zukunft und soll daher '*progressiv*' genannt werden (p-Teilchen).

Umgekehrt wirkt m_2 in die Vergangenheit und heisse dementsprechend '*regressiv*' ($\bar{p}$-Teilchen).

Die beiden Teilchenarten müssen streng auseinandergehalten werden, weil andernfalls die eindeutige Umkehrbarkeit der Korrespondenz verloren ginge.

Die definierte Signalverbundenheit ist invariant gegenüber Lorentz-transformation, weil die Nullstrecke $P_1 P_2$ diese Eigenschaft besitzt.

Die Erfahrung hat gezeigt, dass Elektron und Positron die einzigen Elementarteilchen sind, die nicht weiter zerlegt, sondern nur noch zerstrahlt werden können. Einzig diese beiden Teilchen kommen daher vielleicht als letzte Bausteine der Materie in Betracht.

Um dieser Frage näher zu kommen, beschränken wir die weiteren Untersuchungen auf diese beiden '*Primärteilchen*'. Nach dem Vorausgehenden zerfallen sie in zwei Klassen:

Die Klasse der p-Teilchen (progressiv) und die Klasse der $\bar{p}$-Teilchen (regressiv).

Um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, treffen wir weiter folgende Definition:

1) Zwei Primärteilchen heissen '*kontragressiv*', wenn sie in entgegengesetzten Zeitrichtungen wirken (ein p-Teilchen und ein $\bar{p}$-Teilchen).
2) Zwei Primärteilchen heissen '*kogressiv*', wenn sie in der gleichen Zeitrichtung wirken ($2p$-Teilchen oder $2\bar{p}$-Teilchen).

Offenbar ist die ganze Begriffsbildung darauf angelegt, um für kontragressive Teilchen eine *Fernwechselwirkung* definieren zu können.

Für eine *Fern-Wechselwirkung* kogressiver Teilchen besteht meines Wissens kein befriedigender Ansatz. Ich habe daher in [1] nur einen direkten Zusammenstoss in's Auge gefasst gemäss folgendem *Postulat*, das ich ausdrücklich als provisorisch bezeichnet habe:

Stossen zwei kogressive Primärteilchen zusammen, so ändern sich ihre Vierergeschwindigkeiten unter Erhaltung von Energie und Impuls.

Die hier gegebene Beschreibung von Elektron und Positron weicht wesentlich ab von der im Gebrauch stehenden. Ob sich diese neue Beschreibung bewähren wird, kann natürlich erst die weitere Ausgestaltung des vorgeschlagenen Modell's zeigen.

In [1] wurde ein Wirkungsprinzip für zwei verschiedene Massen gewählt, um den Anschluss an die Sommerfeldlösung zu gewinnen. Lässt man eine dieser beiden Massen nach ∞ streben, so ergibt ein Grenzübergang ein Wirkungsprinzip, das diesen Anschluss an das Bewährte liefert.

Die Theorie ist damit soweit gerechtfertigt, dass ein Angriff auf das allgemeine Zweikörperproblem für gleiche Massen verantwortet werden kann. Dieser wird im nächsten Abschnitt eingeleitet.

2. Vorbereitung

Wir beschränken uns jetzt also auf zwei Teilchen m_1 und m_2 von der Masse eines Elektrons, wählen diese Masse als Einheit und setzen überdies die Lichtgeschwindig-

keit gleich 1:

$$\left.\begin{aligned} m_1 = m_2 = m = 1 \\ c = 1 \end{aligned}\right\} \tag{1_0}$$

Für den klassischen Elektronenradius erhalten wir also den Ausdruck

$$a = e^2 \tag{1_1}$$

Weiter legen wir ein pseudoorthogonales Koordinatensystem zugrunde und umgehen die Indexrechnung, indem wir die Weltvektoren in ihrer Zerspaltung durch Vektorsymbole charakterisieren:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U} = (u; \mathfrak{u}) \\ \mathfrak{V} = (v; \mathfrak{v}) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Grössen u and v stellen also die Zeitkoordinaten von m_1 und m_2 dar, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Raumvektoren dazu.

Die zu den kontragredienten Vektoren (2) gehörigen kogredienten sind also gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{U}} = (u; -\mathfrak{u}), \\ \bar{\mathfrak{V}} = (v; -\mathfrak{v}), \end{aligned}\right\} \tag{$\bar{2}$}$$

und die pseudoeuklidische Bilinearform erscheint als skalares Produkt

$$\mathfrak{U}\bar{\mathfrak{V}} \equiv uv - \mathfrak{u}\mathfrak{v} \equiv \bar{\mathfrak{U}}\mathfrak{V}, \tag{3_0}$$

dessen Rechenregeln leicht zu überblicken sind.

Der von m_2 zum korrespondierenden m_1 führende Nullvektor ist gegeben durch

$$\mathfrak{U} - \mathfrak{V} = (u - v; \mathfrak{u} - \mathfrak{v}) \tag{3_1}$$

und erfüllt die Identität

$$(\mathfrak{U} - \mathfrak{V})(\bar{\mathfrak{U}} - \bar{\mathfrak{V}}) \equiv (u - v)^2 - (\mathfrak{u} - \mathfrak{v})^2 \equiv 0, \tag{3_2}$$

welche die Signalverbundenheit zum Ausdruck bringt.

Als Systemparameter wählen wir eine Variable s, die auf eine Länge normiert werden kann, und bilden dann die dimensionslosen Vierergeschwindigkeiten

$$\mathfrak{U}' = \frac{d\mathfrak{U}}{ds}; \quad \mathfrak{V}' = \frac{d\mathfrak{V}}{ds} \tag{4}$$

Weiter definieren wir die fundamentale Länge

$$R = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{U}' + \mathfrak{V}')(\bar{\mathfrak{U}} - \bar{\mathfrak{V}}) \tag{5_1}$$

Wegen den aus (5_1) und (3_2) folgenden Relationen

$$R \equiv \mathfrak{U}'(\bar{\mathfrak{U}} - \bar{\mathfrak{V}}) \equiv \mathfrak{V}'(\bar{\mathfrak{U}} - \bar{\mathfrak{V}}) \tag{5_2}$$

stellt R die Distanz von m_2 nach m_1 sowohl im Ruhsystem von m_1 als auch im Ruhsystem von m_2 dar, gemessen vermittels der später zu normierenden Länge s (Abschnitt 3, (2_2) und (2_3).

Man beachte:

$$R_0 = (\mathfrak{U} - \mathfrak{V})\,(\bar{\mathfrak{U}} - \bar{\mathfrak{V}}) \tag{$3_2'$}$$

und R sind immer zwei invariante Längen. Aber nur im Falle (3_2), also $R_0 = 0$, tritt R dank (5_2) als einzige Distanz zwischen m_2 und m_1 in Erscheinung.

3. Ein Wirkungsprinzip

Wir wählen als Lagrangefunktion

$$L = -\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2} - \Phi \tag{1_0}$$

mit

$$L_1 = \mathfrak{U}'\,\bar{\mathfrak{U}}'; \quad L_2 = \mathfrak{V}'\,\bar{\mathfrak{V}}' \tag{1_1}$$

und dem Potential

$$\Phi = -\frac{a(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2}{4R} \tag{1_2}$$

und fordern das Verschwinden der ersten Varianten

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} L ds = 0 \tag{2_0}$$

des Linienintegrals

$$W = \int L ds \tag{2_1}$$

für irgend ein Segment der Systembahn.

Die beiden ersten Terme von (1_0) sind wegen (1_1) homogen und vom ersten Grad in bezug auf die Komponenten der Geschwindigkeiten. Nach der Definition von R gemäss Abschnitt 2 (5_1) gilt dasselbe auch für das Potential (1_2).

Das Integral (2_1) ist daher invariant gegenüber Parametertransformation und kann somit durch die Bedingung

$$L = 2 \tag{2_2}$$

direkt als Länge respektive Zeit

$$W = 2 \int ds, \tag{2_3}$$

die *Eigenzeit des Systems*, interpretiert werden.

Nun noch eine Bemerkung zur Wahl von (1_2). Um die erwähnten Invarianzforderungen zu erfüllen, steht natürlich eine Auswahl zur Verfügung, nämlich die lineare Kombination

$$Z^* = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 \sqrt{L_1}\,\sqrt{L_2} + a_4\,\mathfrak{U}'\,\bar{\mathfrak{V}}' \tag{3_0}$$

für den Zähler, falls man am Coulombpotential festhalten will, wobei die a_i konstante Längen sind.

Der Spezialfall

$$Z^* = 4a\mathfrak{U}'\,\overline{\mathfrak{V}}' \tag{3_1}$$

liefert das Potential von [1], Abschnitt 3 (6_3), falls man sich auf Elektronenmassen beschränkt.

Der Spezialfall

$$Z^* = 2a(L_1 + L_2) \tag{3_2}$$

liefert genau die gleichen direkten Kollisionen wie (3_1). In beiden Fällen aber stehen der allgemeinen Lösung grosse Schwierigkeiten entgegen.

Die Wahl von (1_2) ergab sich aus der Vermutung, dass die genaue Wiederholung der Wurzelsumme von (1_0) im Potential (1_2) die Lösungschancen verbessere.

Tatsächlich ist das so spezialisierte Problem im Prinzip vollständig lösbar. Allerdings ist zu vermuten, dass seine erschöpfende Auswertung grosse Rechenarbeiten erfordern wird.

Ich muss mich daher damit begnügen, die wesentlichen Züge des Lösungsverfahrens zu schildern.

Wir beginnen mit einer Vektortransformation:

$$\mathfrak{Y} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{U} + \mathfrak{V}); \quad \mathfrak{X} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{U} - \mathfrak{V}), \tag{4_1}$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{X}; \qquad \mathfrak{V} = \mathfrak{Y} - \mathfrak{X}, \tag{4_2}$$

welche die Weltvektoren der beiden Teilchen ersetzt durch diejenigen des Schwerpunkts und des halben Nullvektors. Die Letzteren werden anschliessend zerspalten gemäss

$$\mathfrak{Y} = (t; \mathfrak{y}), \tag{5_1}$$

$$\mathfrak{X} = (\epsilon r; \mathfrak{x}), \tag{5_2}$$

$$r = |\sqrt{\mathfrak{x}^2}|; \quad \epsilon^2 = 1. \tag{5_3}$$

Der Vergleich mit den Zerspaltungen Abschnitt 2 (2) ergibt

$$\left.\begin{aligned} u &= t + \epsilon r; \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \\ v &= t - \epsilon r; \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{y} - \mathfrak{x} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Durch die Relationen (5) wird also die Korrespondenzbedingung Abschnitt 2 (3_2) erfüllt und wir haben nur noch eine unabhängige Zeitkoordinate t. Weiter folgt aus (6):

Für $\epsilon = 1$ ist das Teilchen $m_1(\mathfrak{U})$ regressiv, das andere progressiv; für $\epsilon = -1$ gerade umgekehrt. Es gilt also der Satz

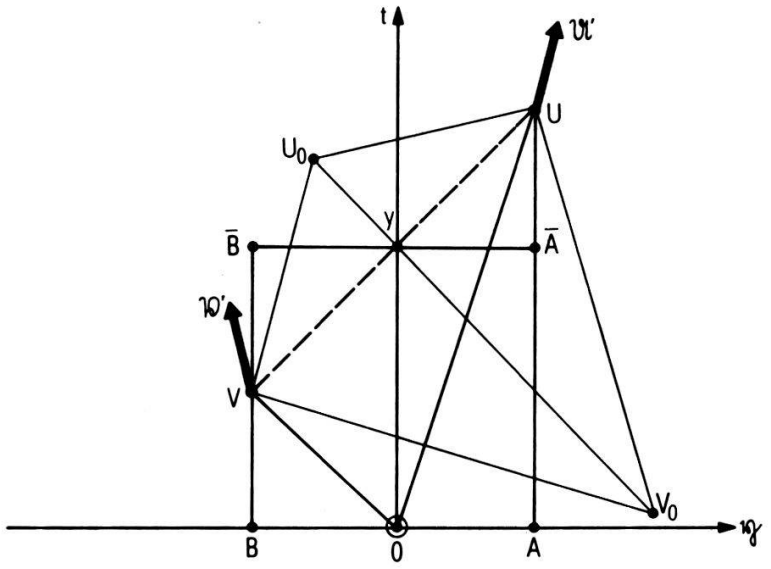
S_1: *Beim Vorzeichenwechsel von ϵ vertauschen die beiden Teilchen ihre Rollen (Zeitrichtungen).*

Führen wir jetzt die neuen Variabeln gemäss (6) ein in L_1, L_2 und R, so folgen

$$L_1 = t'^2 - \mathfrak{y}'^2 + 2(\epsilon t' r' - \mathfrak{y}'\mathfrak{x}') - (\mathfrak{x}'^2 - r'^2), \tag{7_1}$$

$$L_2 = t'^2 - \mathfrak{y}'^2 - 2(\epsilon t' r' - \mathfrak{y}'\mathfrak{x}') - (\mathfrak{x}'^2 - r'^2), \tag{7_2}$$

$$R = 2\mathfrak{Y}'\,\overline{\mathfrak{X}} = 2(\epsilon t' r - \mathfrak{y}'\mathfrak{x}). \tag{7_3}$$



Figur 1
Erläuterung in Abschnitt 9, unter B.

Da nach diesen Relationen die Lagrangefunktion explizit unabhängig ist von t und $\mathfrak{y}$, erhalten die aus (2_0) fliessenden Differentialgleichungen folgende Gestalt:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t'}\right)' = 0, \tag{8_0}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{y}'}\right)' = 0, \tag{8_1}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}'}\right)' - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}} = 0. \tag{8_2}$$

Dabei mache ich von einer abgekürzten Schreibweise für einen Gradienten Gebrauch nach den Mustern

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}'} &= \left(\frac{\partial L}{\partial x_1'}, \frac{\partial L}{\partial x_2'}, \frac{\partial L}{\partial x_3'}\right), \\ \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}} &= \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial x_3}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Aus (8_0) und (8_1) ergeben sich unmittelbar folgende Zwischenintegrale:

$$\frac{\partial L}{\partial t'} = c_0, \tag{10_0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}'} = \mathfrak{c}, \tag{10_1}$$

wo nun

$$\mathfrak{C} = (c_0; \mathfrak{c}) \tag{11_0}$$

den konstanten Energieimpulsvektor des Systems darstellt. Weiter schliessen wir auf das Bestehen der Ungleichung

$$\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}} = c_0^2 - \mathfrak{c}^2 > 0, \tag{11_1}$$

denn andernfalls hätten wir es mit einem Licht- oder einem Ueberlichtsystem zu tun.

Dank der Ungleichung (11_1) können wir also unser primäres Bezugssystem auf Ruhe transformieren, d.h. die Zwischenintegrale von vorneherein in der Gestalt

$$\frac{\partial L}{\partial t'} = c_0, \tag{12_0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{y}'} = 0, \tag{12_1}$$

annehmen.

Wir befinden uns damit im *Ruhsystem des Teilchensystems*, das der Beobachter natürlich nur dann gebrauchen kann, wenn er die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{w} = \frac{\bar{\mathfrak{c}}}{c_0} \tag{13}$$

des Teilchensystems vernachlässigen darf.

4. Die Zwischenintegrale

Wir gehen jetzt an die Auswertung der Zwischenintegrale Abschnitt 2 (12_0), (12_1), schreiben aber in Aenderung des Vorzeichens der Energie

$$-\frac{\partial L}{\partial t'} = \Gamma, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{y}'} = 0. \tag{2}$$

Die Berechnung der linken Seiten ergibt

$$-\frac{\partial L}{\partial t'} = F_0 t' + G_0 \epsilon r' + J \epsilon r = \Gamma, \tag{I_0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{y}'} = F_0 \mathfrak{y}' + G_0 \mathfrak{x}' + J \mathfrak{x} = 0, \tag{II_1}$$

wobei als Abkürzungen gebraucht werden

$$F_0 = \left(1 - \frac{a(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})}{2R}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{L_1}} + \frac{1}{\sqrt{L_2}}\right), \tag{3_0}$$

$$G_0 = \left(1 - \frac{a(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})}{2R}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{L_1}} - \frac{1}{\sqrt{L_2}}\right), \tag{3_1}$$

$$J = \frac{a(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2}{2R^2}. \tag{3_2}$$

Weiter benötigen wir die aus Abschnitt **3** (5_3) herleitbaren Relationen

$$\frac{\partial r}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}}{r}, \tag{4_0}$$

$$\frac{\partial r'}{\partial \mathfrak{x}'} = \frac{\mathfrak{x}}{r}, \tag{4_1}$$

$$\frac{\partial r'}{\partial \mathfrak{x}} = \left(\frac{\mathfrak{x}}{r}\right)'. \tag{4_2}$$

Mit ihrer Hilfe ergeben sich:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}'} \equiv G_0 \mathfrak{y}' + F_0 \mathfrak{x}' - K\mathfrak{x}, \tag{III_0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}} \equiv J\mathfrak{y}' - K\mathfrak{x}' - M_0\mathfrak{x}, \tag{IV_0}$$

mit den weiteren Abkürzungen

$$K = \frac{G_0 \epsilon t' + F_0 r'}{r}, \tag{5_1}$$

$$M_0 = \frac{J\epsilon t' - Kr'}{r}. \tag{5_2}$$

Schliesslich empfiehlt es sich, die zu L gehörige Hamiltonfunktion herzuleiten.

Nach *Leonhard Eulers* partieller Differentialgleichung für homogene Funktionen gilt für L die Identität

$$t'\frac{\partial L}{\partial t'} + \mathfrak{y}'\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{y}'} + \mathfrak{x}'\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}'} \equiv L,$$

oder

$$-\frac{\partial L}{\partial t'} \equiv \frac{\mathfrak{y}'}{t'}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{y}'} + \frac{\mathfrak{x}'}{t'}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{x}'} - \frac{L}{t'} \tag{6}$$

womit die linke Seite von (I_0) als Hamiltonfunktion erscheint.

Damit erhalten wir einen Anlass, die *Systemeigenzeit* s durch die *Koordinatenzeit* t zu ersetzen gemäss

$$\left.\begin{aligned} &\int L ds \equiv \int \Lambda dt \\ &\text{also} \\ &L \equiv \Lambda t' \end{aligned}\right\} \tag{7_0}$$

Die mit der inhomogenen Wirkungsfunktion Λ verkoppelten Grössen sind dann zu definieren durch

$$\left.\begin{aligned} L_1 &\equiv \Lambda_1 t'^2 \\ L_2 &\equiv \Lambda_2 t'^2 \\ \Phi &\equiv \psi t' \\ R &\equiv 2Nt' \end{aligned}\right\} \tag{7_1}$$

Bezeichnen wir die Ableitung t durch einen Punkt, so erhalten wir

$$\Lambda = -\sqrt{\Lambda_1} - \sqrt{\Lambda_2} - \psi \tag{8_0}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= \dot{u}^2 - \dot{\mathfrak{u}}^2 \\ \Lambda_2 &= \dot{v}^2 - \dot{\mathfrak{v}}^2 \\ \psi &= -\frac{a(\sqrt{\Lambda_1} + \sqrt{\Lambda_2})^2}{8N} \\ N &= \epsilon r - \dot{\mathfrak{y}}\mathfrak{x} \end{aligned}\right\} \tag{8_1}$$

Explizit insbesondere

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= 1 + \epsilon\dot{r}; \quad \dot{\mathfrak{u}} = \dot{\mathfrak{y}} + \dot{\mathfrak{x}} \\ \dot{v} &= 1 - \epsilon\dot{r}; \quad \dot{\mathfrak{v}} = \dot{\mathfrak{y}} - \dot{\mathfrak{x}} \end{aligned}\right\} \tag{8_2}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1 - \dot{\mathfrak{y}}^2 + 2(\epsilon\dot{r} - \dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{x}}) - (\dot{\mathfrak{x}}^2 - \dot{r}^2) \\ \Lambda_2 &= 1 - \dot{\mathfrak{y}}^2 - 2(\epsilon\dot{r} - \dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{x}}) - (\dot{\mathfrak{x}}^2 - \dot{r}^2) \end{aligned}\right\} \tag{8_3}$$

Unter Beachtung von (6) können also die Gleichungen (I_0)–(IV_0) übergeführt werden in

$$H = F + G\epsilon\dot{r} + J\epsilon r = \Gamma, \tag{I}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\mathfrak{y}}} = F\dot{\mathfrak{y}} + G\dot{\mathfrak{x}} + J\mathfrak{x} = 0, \tag{II}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\mathfrak{x}}} = G\dot{\mathfrak{y}} + F\dot{\mathfrak{x}} - K\mathfrak{x}, \tag{III}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\mathfrak{x}} = J\dot{\mathfrak{y}} - K\dot{\mathfrak{x}} - M\mathfrak{x}, \tag{IV}$$

mit den Abkürzungen

$$F = \left(1 - \frac{a(\sqrt{\Lambda_1} + \sqrt{\Lambda_2})}{4N}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\Lambda_2}}\right) \tag{9_0}$$

$$G = \left(1 - \frac{a(\sqrt{\Lambda_1} + \sqrt{\Lambda_2})}{4N}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda_2}}\right) \tag{9_1}$$

$$J = \frac{a(\sqrt{\Lambda_1} + \sqrt{\Lambda_2})^2}{8N^2}, \tag{9_2}$$

$$K = \frac{G\epsilon + F\dot{r}}{r}, \tag{9_3}$$

$$M = \frac{J\epsilon - K\dot{r}}{r} \tag{9_4}$$

während (6) in der Gestalt

$$H = \dot{\mathfrak{y}} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{y}}} + \dot{\mathfrak{x}} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{x}}} - \Lambda \tag{10}$$

erscheint.

An die Stelle der Gleichung Abschnitt 3 (8_2) tritt nun

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{x}}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{x}} = 0 \tag{11}$$

Wir können jetzt ein drittes Zwischenintegral, den *Drehimpulssatz* herleiten. Aus (II)–(IV) folgt unmittelbar

$$\left[\dot{\mathfrak{y}}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{y}}}\right] + \left[\dot{\mathfrak{x}}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{x}}}\right] + \left[\mathfrak{x}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{x}}\right] \equiv 0 \tag{12_0}$$

Wegen der rechten Seite von (II) folgt daraus

$$\left[\dot{\mathfrak{x}}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{x}}}\right] + \left[\mathfrak{x}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{x}}\right] = 0 \tag{12_1}$$

und in Verbindung mit (11) schliesst man auf

$$\left[\epsilon, \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\epsilon}}\right]^{\cdot} = 0 \tag{12_2}$$

woraus sich das Integral

$$\left[\mathfrak{x}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{x}}}\right] = \delta a \mathfrak{e}; \quad (\mathfrak{e}^2 = 1) \tag{V_1}$$

ergibt. Wegen (III) und (II) erhält man daraus schliesslich die explizite Drehimpulsgleichung

$$\frac{F^2 - G^2}{F} [\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}] = \delta a \mathfrak{e}. \tag{V_2}$$

Darin ist nun δ offenbar die wegen Abschnitt 2 (1_0) dimensionslose Drehimpulszahl.

Unsere Aufgabe ist damit zurückgeführt auf die Integration der drei Zwischenintegrale (I), (II) und (V_2).

Zum Schluss ziehen wir noch eine Folgerung aus der Energiegleichung (I). Offenbar spielt der Term $J \epsilon r$ in dieser Gleichung die Rolle der potentiellen Energie und es sich der Satz

S_2: *Wechselt ϵ sein Vorzeichen, so auch die potentielle Energie.*

In Verbindung mit dem Satz S_1 von Abschnitt 3 folgt daher weiter

S_3: *Vertauschen die beiden Teilchen ihre Rollen, so wechselt die potentielle Energie ihr Vorzeichen.*

Mit anderen Worten: Im Rahmen dieser Theorie sind Ladungen nicht Qualitäten von Quellen, sondern zeiträumliche Eigenschaften der Wechselwirkung.

5. Die Schlüsselvariabeln

Aus dem Drehimpuls (V_2) in Verbindung mit der Translationsimpulsgleichung (II) von Abschnitt 4 kann man herleiten, dass die räumliche Bewegung des Systems in einer Ebene senkrecht zur Achse $\mathfrak{e}$ stattfindet.

Es genügt daher der Ansatz

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, 0); \quad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, 0), \tag{1}$$

und die Zwischenintegrale liefern miteinander 4 gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung für die 4 Koordinaten in (1) als Funktionen der Zeit.

In Analogie zum klassischen Fall wird man also anstreben, die Drehwinkel der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu eliminieren, um eine Gleichung für 2 Schlüsselvariabeln zu gewinnen. Als solche eignen sich aber nicht die Längen $|\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{y}|$, sondern die *trägen Massen* der beiden Teilchen: $(\sqrt{\Lambda_1})^{-1}$ und $(\sqrt{\Lambda_2})^{-1}$, oder irgend ein denselben eineindeutig zugeordnetes Funktionenpaar.

Wir definieren

$$S = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\Lambda_2}}, \tag{2_1}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda_2}}, \tag{2_2}$$

und

$$z = \frac{T}{S} = \frac{\sqrt{\Lambda_2} - \sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_2} + \sqrt{\Lambda_1}}. \tag{2}$$

Am günstigsten für die Berechnung ist das Paar (S, z), weil sich für dasselbe eine im Prinzip streng lösbare algebraische Gleichung ergibt.

Aus (2_1)–(2_3) folgen

$$\sqrt{\Lambda_1} = \frac{2}{S(1+z)}; \quad \sqrt{\Lambda_2} = \frac{2}{S(1-z)} \tag{3}$$

Führt man diese Werte gemäss Abschnitt 4 (9_0)–(9_2) ein in die Zwischenintegrale (I), (II) und (V_2), so erhält man folgende Zusammenstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} H &\equiv F + G\epsilon\dot{r} + J\epsilon r = \Gamma, && \text{(I)}\\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{y}}} &\equiv F\dot{\mathfrak{y}} + G\mathfrak{x} + T\dot{\mathfrak{x}} = 0, && \text{(II)}\\ \left[\mathfrak{x}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathfrak{x}}}\right] &\equiv (1 - z^2)\, F[\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}] = \delta a \mathfrak{e}, && (V_2) \end{aligned}}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} F &\equiv S - \frac{a}{(1 - z^2)\, N}\\ G &\equiv zF\\ J &\equiv \frac{2a}{S^2(1 - z^2)^2 N^2} \end{aligned}} \qquad (4)$$

Schliesslich noch eine Vorbereitung für spätere Eliminationen. Aus (3) ergeben sich

$$\tfrac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) = \frac{4(1 + z^2)}{S^2(1 - z^2)^2}, \qquad (5_1)$$

$$\tfrac{1}{4}(\Lambda_1 - \Lambda_2) = -\frac{4z}{S^2(1 - z^2)^2}, \qquad (5_2)$$

und in Verbindung mit Abschnitt 4 (8_3) folgen die Gleichungen

$$1 - \dot{\mathfrak{y}}^2 - (\dot{\mathfrak{x}}^2 - \dot{r}^2) = \frac{4(1 + z^2)}{S^2(1 - z^2)^2}, \qquad (6_1)$$

$$\epsilon r - \dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{x}} = -\frac{4z}{S^2(1 - z^2)^2}. \qquad (6_2)$$

Aus der Zusammenstellung der Zwischenintegrale ersieht man, dass der potentiellen Energie $J\epsilon r$ ein *potentieller Impuls* zur Seite steht. Derselbe kompensiert die Summe aus kinetischem Schwerpunktsimpuls $F\mathfrak{y}$ und kinetischem Radialimpuls $G\mathfrak{x}$ zum totalen Translationsimpuls Null.

Durch diese Gleichungen ist also – wie schon einmal erwähnt wurde – das Ruhsystem des Teilchensystems ausgezeichnet. Von diesem System verschieden ist im Allgemeinen das Ruhsystem des Beobachters mit dem konstanten Energieimpulsvektor

$$\mathfrak{C} = (\Gamma_0; \gamma_0 \mathfrak{e}), \qquad (7_0)$$

gemäss

$$\Gamma^2 = \Gamma_0^2 - \gamma_0^2$$

6. Polarkoordinaten

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e} &= (0, 0, 1) \\ \mathfrak{y} &= s(\cos\chi, \sin\chi, 0) \\ \mathfrak{x} &= r(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und gebrauchen die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \chi - \varphi \\ \Phi_1 &= \dot{s}\cos\Theta - s\dot{\chi}\sin\Theta \\ \Phi_2 &= \dot{s}\sin\Theta + s\dot{\chi}\cos\Theta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dann liefert die Berechnung

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{y}}\mathfrak{x} &= r\Phi_1 \\ N &= r(\epsilon - \Phi_1) \end{aligned}\right\} \tag{3_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{y}}^2 &= \dot{s}^2 + s^2\chi^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 \\ \dot{\mathfrak{y}}\dot{\mathfrak{x}} &= \Phi_1\dot{\mathfrak{r}} + \Phi_2 r\dot{\varphi} \\ \dot{\mathfrak{x}}^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}\right\} \tag{3_1}$$

$$[\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}] = r^2\dot{\varphi}\mathfrak{e} \tag{3_2}$$

Aus Abschnitt 5 (II) folgt

$$F(\dot{s}\cos\chi - s\dot{\chi}\sin\chi) + G(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi) + Jr\cos\varphi = 0 \tag{II_1}$$

$$F(\dot{s}\sin\chi + s\dot{\chi}\cos\chi) + G(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) + Jr\sin\varphi = 0 \tag{II_2}$$

und daraus vermittels linearer Kombination

$$F\Phi_1 + G\dot{r} + Jr = 0 \tag{II_1'}$$

$$F\Phi_2 + Gr\dot{\varphi} = 0 \tag{II_2'}$$

Aus (3_0) entnehmen wir

$$\Phi_1 = \epsilon - \frac{N}{r} \tag{$3_0'$}$$

Dies ein in $\epsilon(\mathrm{II}_1')$ liefert

$$F + G\epsilon\dot{r} + J\epsilon r = \frac{\epsilon F N}{r} \tag{II_1''}$$

Dann notieren wir Abschnitt 5 (I):

$$F + G\epsilon\dot{r} + J\epsilon r = \Gamma. \tag{I}$$

Der Vergleich liefert

$$\boxed{r = \frac{\epsilon F N}{\Gamma}} \tag{II$''_1$}$$

eine Schlüsselgleichung, weil sie die Elimination von r einleitet.

Aus (II$'_2$) und Abschnitt 5 (4) folgt

$$\Phi_2 = -z r \dot{\varphi} \tag{II$''_2$}$$

Jetzt $r\dot{\varphi}$ aus (3_2), Abschnitt 5 (V), (II$''_1$):

$$r\dot{\varphi} = \frac{\epsilon \Gamma \delta a}{(1-z^2) F^2 N}. \tag{V}$$

Dies ein in (II$''_2$):

$$\Phi_2 = -\frac{\epsilon \Gamma \delta a z}{(1-z^2) F^2 N}. \tag{II$'''_2$}$$

Weiter aus ($3'_1$) und (II$''_1$):

$$\Phi_1 = \epsilon \left(1 - \frac{\Gamma}{F}\right). \tag{4_0}$$

Andererseits Einführung von (3_1) in die Gleichungen Abschnitt 5 (6_1), (6_2):

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 - \frac{4(1+z^2)}{S^2(1-z^2)^2}, \tag{4_1}$$

$$(\epsilon - \Phi_1)\dot{r} - \Phi_2 r \dot{\varphi} = -\frac{4z}{S^2(1-z^2)^2}. \tag{4_2}$$

In diese Gleichungen eingesetzt die obigen Werte für Φ_1, Φ_2 und $r\dot{\varphi}$:

$$\left(1 - \frac{\Gamma}{F}\right)^2 - 1 + \frac{\delta^2 \Gamma^2 a^2 (1+z^2)}{(1-z^2)^2 F^4 N^2} = -\frac{4(1+z^2)}{S^2(1-z^2)^2}, \tag{$4'_1$}$$

$$\frac{\epsilon \Gamma}{F}\dot{r} + \frac{\delta^2 \Gamma^2 a^2 z}{(1-z^2)^2 F^4 N^2} = -\frac{4z}{S^2(1-z^2)^2} \tag{$4'_2$}$$

Weiter (I) mit $G = zF$ und (II$''_1$):

$$F + zF\epsilon\dot{r} + \frac{JFN}{\Gamma} = \Gamma \tag{I$'$}$$

Hierauf (I′) $-zF^2/\Gamma$ $(4_2')$ mit J aus Abschnitt 5 (4):

$$F-\Gamma-\frac{\delta^2\Gamma a^2 z^2}{(1-z^2)F^4N^2}+\frac{2aF}{\Gamma S^2(1-z^2)^2N}=\frac{4z^2F^2}{\Gamma S^2(1-z^2)^2} \tag{$4_2''$}$$

Schliesslich liefert Abschnitt 5 (4) noch

$$F=S-\frac{a}{(1-z^2)N} \tag{5}$$

Die Elimination von F und N aus den Gleichungen $(4_1')$ $(4_2'')$ und (5) ergibt nun also die gesuchte Relation zwischen den 'Schlüsselvariabeln' S und z.

7. Elimination

Die Gleichungen Abschnitt 6 $(4_1')$ $(4_2'')$ und (5) enthalten z nur im Quadrat. Wir setzen daher

$$\lambda=z^2 \tag{1_0}$$

und notieren nun die Gleichungen leicht umgeformt:

$$\frac{a}{(1-\lambda)N}=S-F, \tag{1}$$

$$\frac{\Gamma(\Gamma-2F)}{F^2}+\frac{\delta^2\Gamma^2a^2(1+\lambda)}{(1-\lambda)^2F^4N^2}=-\frac{4(1+\lambda)}{S^2(1-\lambda)^2}, \tag{2_0}$$

$$\frac{\Gamma(F-\Gamma)}{F^2}-\frac{\delta^2\Gamma^2a^2\lambda}{(1-\lambda)^2F^4N^2}+\frac{2a}{S^2(1-\lambda)^2FN}=\frac{4\lambda}{S^2(1-\lambda)^2}. \tag{3_0}$$

Die Operationen $F(\lambda(2_0)+(1+\lambda)(3_0))$ und $F^2((2_0)+2(3_0))$ ergeben:

$$\Gamma(1+\lambda)-\frac{\Gamma^2}{F}+\frac{2a(1+\lambda)}{S^2(1-\lambda)^2N}=0, \tag{$2_0'$}$$

$$-\Gamma^2+\frac{\delta^2\Gamma^2a^2}{(1-\lambda)F^2N^2}+\frac{4aF}{S^2(1-\lambda)^2N}=-\frac{4F^2}{S^2(1-\lambda)} \tag{$3_0'$}$$

Jetzt Elimination von N aus $(2_0')$ und $(3_0')$ vermittels (1) und anschliessende Wegschaffung der Nenner:

$$2(1+\lambda)F^2-(\Gamma(1-\lambda)^2S+2(1+\lambda))SF+\Gamma^2(1-\lambda)S^2=0, \tag{2′}$$

$$4F^3+\Gamma^2(1-\lambda)(\delta^2(1-\lambda)-1)SF^2-2\delta^2\Gamma^2(1-\lambda)^2S^2F+\delta^2\Gamma^2(1-\lambda)^2S^3=0. \tag{3′}$$

Weiter Elimination von F aus (2′) und (3′): Aus (2′) entnimmt man

$$2(1+\lambda)F^2=((\Gamma(1-\lambda)^2S+2(1+\lambda))F-\Gamma^2(1-\lambda)S)S, \tag{2″}$$

und reduziert damit (3′) auf ein in F quadratisches Polynom. Setzt man überdies

$$F = QS, \tag{4_0}$$

so gehen (2′) und (3′) schliesslich über in

$$A_0 Q^2 + A_1 Q + A_2 = 0 \tag{2}$$

$$B_0 Q^2 + B_1 Q + B_2 = 0 \tag{3}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A_0 &\equiv 2(1+\lambda) \\ A_1 &\equiv -(\Gamma(1-\lambda)^2 S + 2(1+\lambda)) \\ A_2 &\equiv \Gamma^2(1-\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{4_1}$$

und

$$\left.\begin{aligned} B_0 &\equiv -4A_1 \\ B_1 &\equiv -A_2((\delta^2(1-\lambda)-1)\,A_1 + 2\delta^2(1-\lambda)\,A_0 + 4) \\ B_2 &\equiv -(1-\lambda)A_2((\Gamma^2-2)\,\delta^2 - \Gamma^2 - (\Gamma^2+2)\,\delta^2\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{4_2}$$

Mit den Abkürzungen

$$D_0 = \begin{vmatrix} A_1, A_2 \\ B_1, B_2 \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} A_2, A_0 \\ B_2, B_0 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_0, A_1 \\ B_0, B_1 \end{vmatrix} \tag{4_3}$$

ergeben sich daher für Q die Relationen

$$Q = \frac{D_0}{D_1} = \frac{D_1}{D_2} \tag{5_0}$$

und als Folge

$$\boxed{\Delta \equiv D_0 D_2 - D_1^2 = 0,} \tag{5_1}$$

d.h. die gesuchte Gleichung zwischen den 'Schlüsselvariabeln' S und z.

Für das Weitere empfiehlt sich statt S die Variable

$$\Sigma = -A_1, \tag{6_0}$$

explizit also

$$\Sigma \equiv \Gamma(1-\lambda)^2 S + 2(1+\lambda) \tag{6_1}$$

Die Berechnung ergibt

$$\Delta \equiv -2\Gamma^2(1-\lambda)^2 \Delta_0, \tag{7}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_0 \equiv\ & 2\delta^2(1+\lambda)\,\Sigma^3 \\ & + \Gamma^2\delta^2(1-\lambda^2)\,Q_1\,\Sigma^2 \\ & - 2\Gamma^2(1-\lambda^2)\,Q_2\,\Sigma \\ & + \Gamma^2(1-\lambda^2)\,Q_3\end{aligned}} \tag{8_0}$$

wobei die Q_i folgende Polynome in λ bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}Q_1 \equiv\ & \delta^2 - 5 \\ & -\lambda \\ & -\delta^2\lambda^2\end{aligned}\right\} \tag{8_1}$$

$$\left.\begin{aligned}Q_2 \equiv\ & (\Gamma^2+2)\,\delta^4 - 2(\Gamma^2-3)\,\delta^2 + \Gamma^2 \\ & - ((\Gamma^2-2)\,\delta^2 - (\Gamma^2+6))\,\delta^2\lambda \\ & - ((\Gamma^2+2)\,\delta^2 - \Gamma^2)\,\delta^2\lambda^2 \\ & + (\Gamma^2-2)\,\delta^4\lambda^3\end{aligned}\right\} \tag{8_2}$$

$$\left.\begin{aligned}Q_3 \equiv\ & (\Gamma^2+2)^2\,\delta^4 - 2\Gamma^2(\Gamma^2-10)\,\delta^2 + \Gamma^2(\Gamma^2+8) \\ & - 2((\Gamma^2-4)\,\delta^2 - \Gamma^2(\Gamma^2+2))\,\delta^2\lambda \\ & - \Gamma^2(8\delta^4 - 2(\Gamma^2-10)\,\delta^2 + \Gamma^2)\,\lambda^2 \\ & + 2((\Gamma^2-4)\,\delta^2 - \Gamma^2(\Gamma^2+2))\,\delta^2\lambda^3 \\ & - (\Gamma^2-2)^2\,\delta^4\lambda^4\end{aligned}\right\} \tag{8_5}$$

8. Die kubische Gleichung

Als letzte Bedingung zur Bestimmung der Lösung ergab sich die Gleichung Abschnitt 7 (5_1). Sie liefert den Zusammenhang zwischen S und z, respektive zwischen Σ und λ.

Da aber nach Abschnitt 7 (7) nur der Faktor Δ_0 von Δ beide Variabeln enthält, ist schliesslich die *kubische Gleichung* Abschnitt 7 (8_0) ausschlaggebend.

$$\Delta_0 = 0 \tag{1_0}$$

Durch diese Gleichung wird nun also Σ als Funktion von λ bestimmt.

Wir erweitern (1_0) gemäss

$$\Delta_1 \equiv 2^2\cdot 3^3\,\delta(1+\lambda)^2\,\Delta_0 \tag{1_1}$$

und setzen

$$2\cdot 3\delta(1+\lambda)\,\Sigma \equiv \Omega. \tag{1_2}$$

Die Gleichung (1_0) geht damit über in

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 \equiv\ & \Omega^3 \\ & + 3\delta\Gamma^2(1-\lambda^2)\,Q_1\,\Omega^2 \\ & - 2^2\cdot 3^2\,\Gamma^2(1+\lambda)\,(1-\lambda^2)\,Q_2\,\Omega \\ & + 2^2\cdot 3^3\,\delta\Gamma^2(1+\lambda)^2\,(1-\lambda^2)\,Q_3 = 0\end{aligned}\right\} \tag{2_0}$$

Mit

$$\Omega = w - \delta\Gamma^2(1-\lambda^2)\,Q_1 \tag{2_1}$$

geht also (2_0) über in die Normalform der kubischen Gleichung:

$$\Delta_1 \equiv w^3 + pw + q = 0, \tag{3_0}$$

wobei gilt

$$p \equiv -3\Gamma^2(1+\lambda)^2\,(1-\lambda)\begin{pmatrix}\delta^2\,\Gamma^2(1-\lambda)\,Q_1^2 \\ +2^2\cdot 3Q_2\end{pmatrix}, \tag{3_1}$$

$$q \equiv 2\delta\Gamma^2(1+\lambda)^3\,(1-\lambda)\begin{pmatrix}\delta^2\,\Gamma^4(1-\lambda)^2\,Q_1^3 \\ +\,2\cdot 3^2\,\Gamma^2(1-\lambda)\,Q_1\,Q_2 \\ +\,2\cdot 3^3\,Q_3\end{pmatrix}. \tag{3_2}$$

Für die Diskriminante

$$D \equiv \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \tag{3_3}$$

ergibt sich

$$D(\lambda) \equiv 2^2\cdot 3^3\,\Gamma^4(1+\lambda)^6(1-\lambda)^2\,\overline{D}(\lambda) \tag{4_0}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\overline{D}(\lambda) \equiv\ & \delta^2\,\Gamma^4(1-\lambda)^2\,Q_1^2(\delta^2\,Q_1\,Q_3 - Q_2^2) \\ & + 2\Gamma^2(1-\lambda)\,Q_2(9\delta^2\,Q_1\,Q_3 - 8Q_2^2) \\ & + 9\delta^2\,Q_3^2\end{aligned}\right\} \tag{4_1}$$

Dieser Faktor entscheidet nach (4_0) über das Vorzeichen der Diskriminante. Wir notieren daher seine für die Diskussion der Lösung ausschlaggebenden Einzelwerte:

$$\left.\begin{aligned}\overline{D}(0) = & -\Gamma^2(\Gamma^2-2)^2\,(\Gamma^2-4)\,\delta^{12} \\ & - (22\Gamma^8 + 157\Gamma^6 + 220\Gamma^4 + 1152\Gamma^2 - 144)\,\delta^{10} \\ & + \Gamma^2(66\Gamma^6 - 599\Gamma^4 - 1760\Gamma^2 - 4167)\,\delta^8 \\ & - \Gamma^2(104\Gamma^6 - 637\Gamma^4 + 6084\Gamma^2 + 3240)\,\delta^6 \\ & + 3\Gamma^4(29\Gamma^4 - 371\Gamma^2 - 756)\,\delta^4 \\ & - \Gamma^4(10\Gamma^4 + 504\Gamma^2 - 81)\,\delta^2 \\ & - 16\Gamma^8\end{aligned}\right\}, \tag{4_2}$$

$$\bar{D}(1) = 2^6 3^2 \Gamma^4 \delta^2, \tag{4_3}$$

sowie das höchste Glied seiner Entwicklung nach fallenden Potenzen von λ:

$$\bar{D}(\lambda) \equiv \Gamma^4 (2\Gamma^2(\Gamma^2 - 1)\,\delta^2 + (\Gamma^2 - 2)^2)\,\delta^{12}\lambda^{11} + \dots. \tag{4_4}$$

Aus den Relationen (4_0)–(4_4) ergeben sich nun leicht nachstehende Folgerungen:

F_1: *Ist $\Gamma > 2$ und δ genügend gross, so existiert genau eine positive Zahl $\lambda_1 < 1$ derart, dass $D(\lambda)$ im Intervall*

$$0 < \lambda < \lambda_1 \tag{5_1}$$

negativ ist und für λ_1 verschwindet.

F_2: *Ist $0 < \Gamma < 1$ und δ genügend gross, so existiert genau eine Zahl $\lambda_2 > 1$ derart, dass $D(\lambda)$ für λ_2 verschwindet und im Bereich*

$$\lambda_2 < \lambda \tag{5_2}$$

negativ ist.

In den Bereichen (5_1) und (5_2) besitzt also die Gleichung (3_0) je drei reelle Lösungen $w(\lambda)$, die in den Stellen λ_1, resp. λ_2 zu zweit oder dritt zusammenfallen. Um aber auf eine stationäre Lösung schliessen zu können, muss man dreifache Nullstellen vermeiden.

Dies bietet keine Schwierigkeit, denn bei einer dreifachen Nullstelle für ein positives $\lambda \neq 1$ müssen die grossen Klammern in (3_1) und (3_2) simultan verschwinden. Diesen Bedingungen genügen aber nur endlich viele Paare (Γ, δ), die man also leicht umgehen kann.

Entsprechend dem Rückgang von $w(\lambda)$ auf $S(z)$ gemäss den Gleichungen (2_1), (1_2) und Abschnitt 7 (6_1) gilt alles, was über $w(\lambda)$ gesagt worden ist, auch für $S(z)$.

Dabei ist aber wohl zu beachten, dass z ursprünglich nach Abschnitt 5 (2_3) durch

$$z = \frac{\sqrt{\Lambda_2} - \sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_2} + \sqrt{\Lambda_1}} \tag{6_0}$$

definiert und erst nachträglich gemäss Abschnitt 7 (1_0) durch

$$z = \sqrt{\lambda} \tag{6_1}$$

ersetzt worden, ist, weil $S(z)$ eine gerade Funktion von z ist:

$$S(-z) \equiv S(z). \tag{6_2}$$

Wir können jetzt leicht zeigen, dass im Falle (5_1) eine stationäre Lösung für $S(z)$ vorliegt. Wir setzen

$$z_1 = |\sqrt{\lambda_1}| \tag{7_0}$$

Dann hat $S(z)$ im Innern des Intervalls

$$-z_1 < z < z_1$$

drei reelle Zweige $S_1(z)$, $S_2(z)$, $S_3(z)$, von denen keiner einen andern trifft. In z_1 aber liegt eine Doppelwurzel vor, etwa gemäss

$$S_1(z_1) \neq S_2(z_1) = S_3(z_1)$$

was sich wegen (6_2) symmetrisch auf

$$S_1(-z_1) \neq S_2(-z_1) = S_3(-z_1)$$

überträgt.

Die beiden Zweige $S_2(z)$ und $S_3(z)$ können die Intervallgrenzen nicht überschreiten, da sie in konjugiert komplexe Werte übergehen würden, im Gegensatz zum Zweig $S_1(z)$, der nach beiden Seiten reell fortgesetzt werden kann.

Die Zweige $S_2(z)$ und $S_3(z)$ bilden also zusammen eine stationäre Lösung, qualitatif genau entsprechend dem klassischen Muster. Es ergibt sich somit folgende Aussage:

S_4: *Ist $\Gamma > 2$ und δ genügend gross, so existiert eine stationäre Lösung sicher dann, wenn die Diskriminante $D(\lambda)$ keine dreifache Nullstelle $(\lambda) \neq 1$ besitzt.*

Eine analoge Aussage ergibt sich im Falle (5_2) mit

$$z_2 = |\sqrt{\lambda_2}| > 1, \tag{8_0}$$

wobei nun aber der Parameter z den gesamten Aussenbereich des Intervalls

$$-z_2 < z < z_2 \tag{8_1}$$

mit Zeichenwechsel im Unendlichen durchläuft.

S_5: *Ist $0 < \Gamma < 1$ und δ genügend gross, so existiert eine stationäre Lösung sicher dann, wenn die Diskriminante $D(\lambda)$ keine dreifache Nullstelle $(\lambda) \neq 1$ besitzt.*

Nach (6_0) haben bei S_4 die trägen Massen gleiche, bei S_5 dagegen verschiedene Vorzeichen.

Auch im Intervall $1 < \Gamma < 2$ existieren stationäre Lösunge, doch geben sie keine Handhabe zu einer einfachen Aussage. Ich begnüge mich daher mit folgendem Hinweis:

Für $\Gamma = 2 - \gamma$ und $0 < \gamma \ll 1$ gibt es stationäre Lösungen, *falls δ nicht zu gross ist*, wie man aus (4_2) und (4_3) schliessen kann. Sie entsprechen vermutlich denjenigen Lösungen, die im klassischen Rahmen für Elektron und Positron existieren.

9. Schlussbemerkungen

A. Gestützt auf die Metrik der speziellen Relativitätstheorie kann man beweisen, dass jedes einfache Elementarteilchen in jedem Moment sowohl einen bestimmten Ort, als auch eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt [2]. Die hier beschriebene Theorie stellt daher eine notwendige Weiterentwicklung der speziellen Relativitätstheorie dar.

Ihr erstes wichtiges Ergebnis ist der Nachweis für die Existenz einer Fülle von stationären Lösungen und deren Aufteilung in 3 Klassen entsprechend der Totalenergie:

1) $2 < \Gamma < \infty$

2) $1 < \Gamma < 2$

3) $0 < \Gamma < 1$,

in Worten also starker, mittlerer und schwacher Wechselwirkung.

Die Theorie ist unabhängig von der Quantentheorie und die grosse, aber vorderhand noch im Dunkeln liegende Frage ist, ob und wie weit die Theorie den bewährten Ergebnissen der Quantentheorie gerecht zu werden vermag.

B. Die Relativitätstheorie hat durch ihre indefinite Metrik, insbesondere ihre Nullgeraden, den Begriff der Nahewirkung teilweise illusorisch gemacht. Um brauchbare räumliche Distanzen zu gewinnen, war sie gezwungen, den starren Körper als Grundgebilde zu verwenden und damit der begrifflichen Analyse zu entziehen. Gerade an dieser Stelle greift Abschnitt 2 ein mit der Definition (5_1) für die räumliche Distanz zweier Primärteilchen, die aber erst dank der Nullstrecke (3_2) ihre unentbehrliche Eindeutigkeit gemäss (5_2) erhält.

Die weiteren Ausführungen ergaben schliesslich in Abschnitt 5 die Energie- und Impulsgleichungen (I), (II) und (V), aus denen folgt, dass die Bewegung der beiden Teilchen innerhalb einer Raumebene verläuft, die sich in Ruhe befindet. Damit ist ein Ruhsystem für das Teilchenpaar definiert, das die Rolle eines starren Körpers übernimmt. Wichtig sind daher noch die Sätze S_4 und S_5 von Abschnitt 8, laut denen es Systeme gibt, die dauernd beieinander bleiben.

Unser Ruhsystem ist $(0, \mathfrak{y}, t)$, so dass also die $\mathfrak{y}$-Achse *konjugiert* ist zur t-Achse und im Bild zugleich *orthogonal* zu derselben.

Um nicht zu viele Linien zu bekommen, habe ich überdies $\mathfrak{Y}'$ auf die t-Achse gelegt, so dass also im Moment t gilt

$$\mathfrak{Y} = (t; 0) \quad \& \quad \mathfrak{Y}' = (t', 0).$$

Weiter wurde konstruiert

$$VU_0 \| \mathfrak{U}' \quad \text{und} \quad U_0 U \text{ konjugiert zu } \mathfrak{U}', \quad \text{also } \| \overline{\mathfrak{U}}'$$

$$V_0 U \| \mathfrak{V}' \quad \text{und} \quad VV_0 \text{ konjugiert zu } \mathfrak{V}', \quad \text{also } \| \overline{\mathfrak{V}}'.$$

Schliesslich gilt die Figur für $\epsilon = 1$ (und $\mathfrak{y} = 0$) und wir haben daher

$$Y\overline{A} = \mathfrak{x}; \quad \overline{A}U = \epsilon r.$$

$$Y\overline{B} = -\mathfrak{x}; \quad \overline{B}V = -\epsilon r.$$

Aus der Figur kann man nun ablesen, dass die Gleichungen (5_1)–(6) erfüllt sind für $\epsilon = 1$ und $\mathfrak{y} = 0$.

LITERATUR

[1] *Ueber elektrodynamische Wechselwirkung*, Manuskript vom 28. Juni 1969, 24 Seiten.
[2] *Grenzfragen der Wissenschaft*, S. 68–72. (Verlag Paul Haupt, Bern 1964).
[3] *Zum Zweikörperproblem der Elektrodynamik*, Manuskript vom November 1970, 46 Seiten.