Ein neues Extremalprinzip für wechselwirkende, relativistische Teilchen

Autor(en): **Tellenbach, U.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **49 (1976)**

Heft 3

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-114772

Ein Neues Extremalprinzip für Wechselwirkende, Relativistische Teilchen[1])

von **U. Tellenbach**

Institut für Reaktortechnik ETHZ, EIR, 5303 Würenlingen, Schweiz

(27. X. 1975)

Zusammenfassung. Das Extremalprinzip von Euler-Maupertuis, welches im nichtrelativistischen Grenzfall äquivalent zu den kanonischen Gleichungen ist, wird auf die relativistische Mechanik übertragen.

I. Einführung

In einer bekannten Arbeit haben H. Van Dam und E. Wigner [1] eine relativistische Mechanik wechselwirkender Teilchen konstruiert, welche als Verallgemeinerung der Newton'schen Mechanik betrachtet werden kann. Sie hebt sich gegenüber anderen Theorien, welche zur Beschreibung relativistischer Teilchen aufgestellt worden sind, dadurch hervor, dass sie in vieler Hinsicht analog zu den klassischen Feldtheorien (Elektrodynamik) ist. (Für einen allgemeinen Ueberblick über die Literatur siehe [5, 6]). Die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik sind äquivalent zu verschiedenen Extremalprinzipien (Hamilton'sches Wirkungsprinzip, Extremalprinzip von Euler–Maupertuis) und so stellt sich naturgemäss die Frage, ob ähnliche Extremalprinzipien auch für die relativistische Mechanik formuliert werden können. Wir zeigen im folgenden, dass dies der Fall ist. Unser Hauptinteresse richtet sich dabei auf die Verallgemeinerung des Prinzips von Euler–Maupertuis, weil dieses im klassischen Fall direkt zu den kanonischen Gleichungen führt. Wir beginnen mit einer kurzen Diskussion der Extremalprinzipien der klassischen Mechanik. Im dritten Abschnitt erfolgt dann die Verallgemeinerung auf die relativistische Mechanik. Zu diesem Zweck benötigen wir einige Resultate der Funktionalanalysis, welche im Appendix erwähnt werden.

II. Herleitung des Extremalprinzips von Euler–Maupertuis im klassischen Fall

Betrachte eine Lagrangefunktion L der Form

$$L = T - V = \sum_{i,\alpha} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_{i\alpha}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(i,j) \tag{1}$$

[1]) Unterstützung dieser Arbeit durch den Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung.

wo $i = 1, 2, \ldots, N$ die Teilchen numeriert, $\alpha = x, y, z$, und $V(i, j)$ repräsentiert die Wechselwirkung zwischen den Teilchen i und j.

Die kanonischen Impulse sind definiert durch

$$p_{i\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = m_i \dot{x}_{i\alpha}. \tag{2}$$

Die Dynamik des N-Teilchen Systems ist enthalten im Hamilton'schen Variationsprinzip:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0. \tag{3}$$

Wir ersetzen nun im Extremalprinzip (3) die Geschwindigkeiten durch die Impulse (gemäss Gleichung (2)), und fassen diese dann als unabhängige Variablen auf. Dies ist erlaubt, falls wir die Gleichungen (2) als Nebenbedingungen auffassen, welche mit Hilfe von Lagrange'schen Multiplikatoren $\lambda_{i\alpha} = \lambda_{i\alpha}(t)$ direkt in das Variationsprinzip eingeführt werden können. Es folgt somit, dass (3) äquivalent ist zu

$$\delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i,\alpha} \frac{p_{i\alpha}^2}{2m_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(i, j) + \sum_{i,\alpha} \lambda_{i\alpha} \left(\dot{x}_{i\alpha} - \frac{p_{i\alpha}}{m_i} \right) \right) dt \right\} = 0. \tag{4}$$

Variation nach $p_{i\alpha}$ ergibt

$$\delta p_{i\alpha} \left(\frac{p_{i\alpha}}{m_i} - \frac{\lambda_{i\alpha}}{m_i} \right) = 0 \tag{5}$$

d.h. es ist

$$p_{i\alpha} = \lambda_{i\alpha} \tag{6}$$

und (4) nimmt die folgende Gestalt an:

$$\delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i,\alpha} \dot{x}_{i\alpha} p_{i\alpha} - H \right) dt \right\} = 0 \tag{7}$$

wo

$$H = \sum_{i,\alpha} \frac{p_{i\alpha}^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(i, j) \tag{8}$$

die Hamiltonfunktion ist. Gleichung (7) wird üblicherweise als das 'Extremalprinzip von Euler–Maupertuis' bezeichnet. Aus (7) ergeben sich sofort die kanonischen Gleichungen

$$\dot{x}_{i\alpha} = \frac{\partial H}{p_{i\alpha}} \tag{9}$$

$$\dot{p}_{i\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial x_{i\alpha}}. \tag{9a}$$

III. Relativistische Mechanik

Entsprechend der allgemeinen Theorie relativistischer Teilchen von H. Van Dam und E. Wigner [1] definieren wir eine Eigenzeit τ_i für jedes Teilchen, und beschreiben die Bahnen parametrisch, mit Hilfe dieser Eigenzeiten:

$$x_{i\alpha} = x_{i\alpha}(\tau_i) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{10}$$

wo die Komponente $\alpha = 0$, d.h. x_{i0}, die Zeit darstellt. Der Parameter τ_i soll wie üblich die Minkovski Distanz entlang der Bahn des Teilchens messen:

$$l_\alpha(\dot{x}_{i\alpha}(\tau_i))^2 = 1; \quad \left(\dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) = \frac{dx_{i\alpha}(\tau_i)}{d\tau_i}\right) \tag{11}$$

wobei die Summation über griechische Indizes nicht explizit angegeben wird, und wo

$$l_0 = -l_1 = -l_2 = -l_3 = 1. \tag{12}$$

Es ist zweckmässig, an dieser Stelle einige Abkürzungen einzuführen:

$$\rho_{ik} = \{-l_\alpha(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{k\alpha}(\tau_k))^2\}^{1/2} \tag{13a}$$

$$\xi_{ik} = l_\alpha \dot{x}_{i\alpha}(\tau_i)\dot{x}_{k\alpha}(\tau_k) \tag{13b}$$

$$\sigma_{ik} = l_\alpha \dot{x}_{i\alpha}(\tau_i)(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{k\alpha}(\tau_k)) \tag{13c}$$

$$\sigma_{ki} = l_\alpha \dot{x}_{k\alpha}(\tau_k)(x_{k\alpha}(\tau_k) - x_{i\alpha}(\tau_i)). \tag{13d}$$

Wir zeigen nun, dass die Dynamik relativistischer Teilchen durch das folgende Extremalprinzip beschrieben wird:

$$\delta\left\{-\sum_i \frac{m_i}{2}\int d\tau_i(-l_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2(\tau_i)) - \frac{1}{2}\sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l\, F_{il}(\rho_{il}^2) l_\beta \dot{x}_{i\beta}(\tau_i)\dot{x}_{l\beta}(\tau_l)\right\} = 0. \tag{14}$$

Beachte, dass in (14) die $x_{i\alpha}(\tau_i)$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) als unabhängige Grössen zu behandeln sind. Es ist jedoch nicht nötig, die Gleichungen (11) mit Hilfe von Lagrange'schen Multiplikatoren explizit in das Variationsprinzip einzuführen, da die aus (14) folgenden Bewegungsgleichungen (wie wir gleich sehen werden) die Nebenbedingungen (11) automatisch respektieren. Die Funktionen $F_{ik}(\rho_{ik}^2)$ charakterisieren die Wechselwirkung der Teilchen. Sie sind invariant bezüglich einer Permutation der Indizes i und k und es ist $F_{ii} = 0$. Wählen wir speziell

$$F_{ik}(\rho_{ik}^2) = e_i e_k \delta(\rho_{ik}^2) \tag{15}$$

so beschreibt (14) geladene Teilchen (e_i ist die Ladung des i-ten Teilchens). Das Variationsprinzip (14) ist dann äquivalent zum (parameterinvarianten) Wirkungsprinzip von Feynman und Fokker [2, 3].

Durch explizite Ausführung der Variation in (14) ergibt sich:

$$\sum_i m_i \int d\tau_i l_\alpha \dot{x}_{i\alpha}(\tau_i)\delta\dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) - \sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l F_{il}(\rho_{il}^2) l_\beta \dot{x}_{l\beta}(\tau_l)$$
$$\times\ \delta\dot{x}_{i\beta}(\tau_i) - \sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l\, \frac{d}{d\rho_{il}^2} F_{il}(\rho_{il}^2)\xi_{il}(-2l_\alpha)(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{l\alpha}(\tau_l))\delta x_{i\alpha}(\tau_i) = 0. \tag{16}$$

Partielle Integration ergibt:

$$\sum_i \int d\tau_i l_\alpha \delta x_{i\alpha}(\tau_i)\left\{-m_i \ddot{x}_{i\alpha}(\tau_i) - \sum_l \int d\tau_l 2\,\frac{d}{d\rho_{il}^2} F_{il}(\rho_{il}^2)\right.$$
$$\left.\times\ \sigma_{il}\dot{x}_{l\alpha}(\tau_l) + \sum_l \int d\tau_l 2\,\frac{d}{d\rho_{il}^2} F_{il}(\rho_{il}^2)\xi_{il}(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{l\alpha}(\tau_l))\right\}. \tag{17}$$

Definieren wir

$$\phi_{il}(\rho_{il}) = 2\frac{d}{d\rho_{il}^2} F_{il}(\rho_{il}^2) \tag{18}$$

so folgt schliesslich

$$m_i \ddot{x}_{i\alpha}(\tau_i) = \sum_{l \neq i} \int d\tau_l \phi_{il}\{\xi_{il}(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{l\alpha}(\tau_l)) - \sigma_{il}\dot{x}_{l\alpha}(\tau_l)\}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (19) sind identisch mit den Bewegungsgleichungen für relativistische Teilchen, welche von H. Van Dam und E. Wigner hergeleitet wurden. Es ist bemerkenswert, dass sie die Bedingungen (11) erfüllen (siehe [1], Formel (12)).

Wir beginnen nun mit der Uebertragung der Resultate von Abschnitt II auf die relativistische Mechanik. Einige Schwierigkeiten bereitet die Definition der kanonischen Impulse. Bestünde keine Wechselwirkung zwischen den Teilchen, so wäre die folgende Definition plausibel:

$$p_{i\alpha}(\tau_i) = m_i \dot{x}_{i\alpha}(\tau_i). \tag{20}$$

Für wechselwirkende Teilchen ist (20) jedoch nicht befriedigend, da sich auf diese Weise keine sinngemässe Verallgemeinerung des Extremalprinzips von Euler–Maupertuis ergibt. Nehmen wir für einen Augenblick an, dass $F_{il}(\rho_{il}^2) = e_i e_l \delta(\rho_{il}^2)$ ist (geladene Teilchen), so zeigt eine Betrachtung der Dimensionen, dass die folgende Definition der kanonischen Impulse naheliegend ist:

$$p_{i\alpha}(\tau_i) = m_i \dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) - \sum_{l \neq i} \int d\tau_l F_{il}(\rho_{il}^2)\dot{x}_{l\alpha}(\tau_l). \tag{21}$$

Wir sehen, dass gemäss (13a) der Impuls des i-ten Teilchens abhängig ist vom Verlauf der Bahnen der übrigen Teilchen.

Führen wir die Bezeichnungen

$$\bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) = \frac{1}{m_i} p_{i\alpha}(\tau_i) \tag{22}$$

$$K_{il}(\tau_i, \tau_l) = -F_{il}(\rho_{il}^2) \tag{23}$$

ein, so ergibt (21)

$$\bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) = \dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) + \sum_{l \neq i} \frac{1}{m_i} \int K_{il}(\tau_i, \tau_l)\dot{x}_{l\alpha}(\tau_l)\, d\tau_l. \tag{24}$$

Wir erkennen, dass der Uebergang von den Impulsen zu den Geschwindigkeiten durch eine verallgemeinerte Fredholm'sche Integralgleichung geschieht. Aus (A13) ergibt sich leicht die Umkehrung von (24):

$$\dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) = \bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) + \sum_{l} \frac{1}{m_i} \int k_{il}(\tau_i, \tau_l)\bar{p}_{l\alpha}(\tau_l)\, d\tau_l. \tag{25}$$

Wir ersetzen nun wiederum im Variationsprinzip (14) die Geschwindigkeiten durch die kanonischen Impulse, und fassen die Gleichungen (25) als Nebenbedingungen auf, welche mit Hilfe von Lagrange'schen Multiplikatoren berücksichtigt werden. Somit ergibt sich aus (14)

$$\delta\left\{\sum_i \frac{m_i}{2}\int d\tau_i l_\alpha \bar{p}_{i\alpha}(\tau_i)\left(\bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) + \frac{1}{m_i}\sum_l \int k_{il}(\tau_i, \tau_l)\bar{p}_{l\alpha}(\tau_l)\, d\tau_l\right) + \sum_i \int d\tau_i l_\alpha \lambda_{i\alpha}(\tau_i)\right.$$
$$\left. \times \left(\dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) - \bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) - \frac{1}{m_i}\sum_l k_{il}(\tau_i, \tau_l)\bar{p}_{l\alpha}(\tau_l)\, d\tau_l\right)\right\} = 0 \tag{26}$$

und weiter

$$\delta\left\{\sum_i \int d\tau_i \left(\frac{m_i}{2} l_\alpha \bar{p}_{i\alpha}(\tau_i)\bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) + l_\alpha \lambda_{i\alpha}(\tau_i)\dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) - l_\alpha \lambda_{i\alpha}(\tau_i)\bar{p}_{i\alpha}(\tau_i)\right)\right.$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l k_{il}(\tau_i, \tau_l) l_\beta \bar{p}_{i\beta}(\tau_i)\bar{p}_{l\beta}(\tau_l) - \frac{1}{m_i}\sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l$$
$$\left. \times \frac{1}{m_i} l_\beta \lambda_{i\beta}(\tau_i)\bar{p}_{l\beta}(\tau_l) k_{il}(\tau_i, \tau_l)\right\} = 0. \tag{27}$$

Variation nach $\bar{p}_{i\alpha}(\tau_i)$ ergibt:

$$l_\alpha \delta\bar{p}_{i\alpha}(\tau_i)(m_i \bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) - \lambda_{i\alpha}(\tau_i) + \sum_l \int k_{il}(\tau_i, \tau_l)\bar{p}_{l\alpha}(\tau_l)\, d\tau_l$$
$$- \sum_l \frac{1}{m_l}\int k_{il}(\tau_i, \tau_l)\lambda_{l\alpha}(\tau_l)\, d\tau_l) = 0. \tag{28}$$

Aus (28) folgt:

$$\lambda_{i\alpha}(\tau_i) = m_i \bar{p}_{i\alpha}(\tau_i). \tag{29}$$

Einsetzen von (29) in (27) führt unmittelbar auf die angestrebte Verallgemeinerung des Extremalprinzips von Euler–Maupertuis:

$$\delta\left\{\sum_i \int d\tau_i (l_\alpha \dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) p_{i\alpha}(\tau_i) - l_\alpha p_{i\alpha}^2(\tau_i)/2m_i)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l \frac{1}{m_i m_l} k_{il}(\tau_i, \tau_l) l_\beta p_{i\beta}(\tau_i) p_{l\beta}(\tau_l)\right\} = 0. \tag{30}$$

Zum Schluss verifizieren wir noch, dass aus dem Variationsprinzip (30) wiederum die grundlegenden Bewegungsgleichungen (19) folgen. Wir bemerken zunächst, dass gemäss den Rechenregeln der Variationsrechnung $\delta F(\ldots, x_{i\alpha}(\tau_i), \ldots)$ definiert ist durch

$$\delta F(\ldots, x_{i\alpha}(\tau_i), \ldots) = \frac{d}{d\epsilon} F(\ldots, x_{i\alpha}(\tau_i, \epsilon), \ldots)\Big|_{\epsilon=0} \tag{31}$$

wo F eine gewisse Funktion der Koordinaten der Teilchen ist, und $x_{i\alpha}(\tau_i, \epsilon)$ stellt eine Schar von virtuellen Bahnen dar, so dass sich für $\epsilon = 0$ die physikalische Bahn ergibt. Im weiteren verwenden wir die Abkürzung

$$\sum_i \int d\tau_i l_\alpha g_{i\alpha}(\tau_i) f_{i\alpha}(\tau_i) = (f, g). \tag{32}$$

Durch Variation nach $p_{i\alpha}(\tau_i)$ folgt aus (30)

$$\dot{x}_{i\alpha}(\tau_i) = \bar{p}_{i\alpha}(\tau_i) + \frac{1}{m_i}\sum_l \int d\tau_l k_{il}(\tau_i, \tau_l)\bar{p}_{l\alpha}(\tau_l) \tag{33}$$

und obige Gleichung ist identisch mit (25). Etwas schwieriger gestaltet sich die Variation nach den Koordinaten. Zunächst erhalten wir aus (30) durch partielle Integration:

$$-\sum_i \int d\tau_i l_\alpha \dot{p}_{i\alpha}(\tau_i)\delta x_{i\alpha}(\tau_i) - \frac{1}{2}\sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l \frac{1}{m_i m_l}\left(\frac{d}{d\epsilon}k_{il}\right) l_\beta p_{i\beta}(\tau_i)p_{l\beta}(\tau_l) = 0. \tag{34}$$

Es ist zweckmässig, an dieser Stelle die im Appendix eingeführte abstrakte Schreibweise zu verwenden. Es ergibt sich

$$\sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l \left(\frac{d}{d\epsilon}k_{il}\right) l_\beta \bar{p}_{i\beta}(\tau_i)\bar{p}_{l\beta}(\tau_l) = \left(\bar{p}, \left(\frac{d}{d\epsilon}k\right)\bar{p}\right)\cdot \tag{35}$$

Aus (A8) folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{d\epsilon}k = \delta k(K)\frac{d}{d\epsilon}K = -(1+k)\left(\frac{d}{d\epsilon}K\right)(1+k). \tag{36}$$

Einsetzen von (36) in (35) ergibt

$$\begin{aligned}\left(\bar{p}, \left(\frac{d}{d\epsilon}k\right)\bar{p}\right) &= -(\dot{x}, (1+K)(1+k)\left(\frac{d}{d\epsilon}K\right)(1+k)(1+K)\dot{x}) \\ &= -\left(\dot{x}, \left(\frac{d}{d\epsilon}K\right)\dot{x}\right)\cdot\end{aligned} \tag{37}$$

Aus (34) und (37) folgt

$$\begin{aligned}&-\sum_i \int d\tau_i l_\alpha \dot{p}_{i\alpha}(\tau_i)\delta x_{i\alpha}(\tau_i) + \sum_{i,l}\int d\tau_i \int d\tau_l l_\beta \dot{x}_{i\beta}(\tau_i) \\ &\quad\times \dot{x}_{l\beta}(\tau_l)(-2)\frac{d}{d\rho_{il}^2}F_{il}(\rho_{il}^2)(-l_\alpha)(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{l\alpha}(\tau_l))\delta x_{i\alpha}(\tau_i) = 0\end{aligned} \tag{38}$$

d.h.

$$\dot{p}_{i\alpha}(\tau_i) = \sum_{l\neq i}\int d\tau_l \phi_{il}(\rho_{il})\xi_{il}(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{l\alpha}(\tau_l)). \tag{39}$$

Aus (39) und (24) ergeben sich nun tatsächlich wiederum die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}m_i\ddot{x}_{i\alpha}(\tau_i) &= \dot{p}_{i\alpha}(\tau_i) + \sum_{l\neq i}\int d\tau_l\left(\frac{d}{d\tau_i}F_{il}(\rho_{il}^2)\dot{x}_{l\alpha}(\tau_l)\right) \\ &= \sum_{l\neq i}\int d\tau_l \phi_{il}(\rho_{il})\{\xi_{il}(x_{i\alpha}(\tau_i) - x_{l\alpha}(\tau_l)) - \sigma_{il}\dot{x}_{l\alpha}(\tau_l)\}.\end{aligned} \tag{19'}$$

Appendix

Sei B ein Banachraum und L eine Banachalgebra. Wir nehmen an, dass auf $L \times B$ eine bilineare Funktion $(K, x) \to K\cdot x$ definiert ist mit Werten in B, so dass

$$K_1\cdot(K_2\cdot x) = (K_1K_2)\cdot x \tag{A1}$$

für jedes $K_1, K_2 \in L$, $x \in B$, wo K_1K_2 die Multiplikation in L bezeichnet. Wir nehmen ferner an, dass eine Kontraktion (K) existiert, welche eine reelle Funktion auf L ist, so dass

$$(K_1K_2) = (K_2K_1). \tag{A2}$$

Wir betrachten dann die Gleichung

$$f = x + K \cdot x \tag{A3}$$

wo $K \in L$, $f \in B$ gegeben sind und $x \in B$ unbekannt ist. Wir bezeichnen (A3) als eine verallgemeinerte Fredholm'sche Integralgleichung, weil jede (gewöhnliche) Fredholm'sche Integralgleichung

$$f(\eta) = x(\eta) + \int_a^b K(\eta, \xi)x(\xi)\, d\xi \tag{A4}$$

auch in der Form (A3) formuliert werden kann. Es ist nun eine bemerkenswerte Tatsache, dass die Fredholm'sche Auflösungstheorie auf die Gleichung (A3) verallgemeinert werden kann (siehe [4]). Sei $d(K)$ die (verallgemeinerte) Fredholm'sche Determinante und $k(K)$ der auflösende Kern. Falls $d(K) \neq 0$, so wird die Gleichung (A3) verifiziert durch

$$x = f + k \cdot f = (1 + k) \cdot f \tag{A5}$$

und es gelten die Auflösungsidentitäten

$$K + k(K) + k(K)K = 0 \tag{A6}$$

$$K + k(K) + Kk(K) = 0. \tag{A7}$$

Ferner ist die Fréchet-Ableitung der Funktion $K \to k(K)$ definiert und es gilt

$$\delta k(K) = -(1 + k)\delta K(1 + k) \tag{A8}$$

wo $\delta k(K)$ die Fréchet-Ableitung von k im Punkte K mit dem Zuwachs δK bezeichnet. Für den Beweis dieser Sätze siehe [4], Kapitel V.

Wir werden die im vorangehenden kurz resümierte Theorie anwenden auf (verallgemeinerte) Systeme von Integralgleichungen der Form

$$f_{i\alpha}(\tau_i) = y_{i\alpha}(\tau_i) + \sum_k \frac{1}{m_i} \int K_{ik}(\tau_i, \tau_k) y_{k\alpha}(\tau_k)\, d\tau_k \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3; \quad i = 1, \ldots, N. \tag{A9}$$

(Der Faktor $1/m_i$ wird deshalb vorangestellt, weil $K_{ik}(\tau_i, \tau_k)$ symmetrisch bezüglich der Indizes i, k sein soll.)

Wir definieren

$$\|K\| = \max_{i,k} \max_{\tau_i, \tau_k} |K_{ik}(\tau_i, \tau_k)| \qquad \text{(Norm)} \tag{A10}$$

$$(K_1K_2)_{jl} = \sum_k \frac{1}{m_k} \int K_{1,jk}(\tau_j, \tau_k) K_{2,kl}(\tau_k, \tau_l)\, d\tau_k \tag{A11}$$

$$(K) = \sum_i \frac{1}{m_i} \int K_{i,i}(\xi, \xi)\, d\xi. \tag{A12}$$

Die Bedingungen (A1) und (A2) können leicht verifiziert werden, und gemäss der allgemeinen Theorie werden die Gleichungen (A9) verifiziert durch

$$y_{i\alpha}(\tau_i) = f_{i\alpha}(\tau_i) + \sum_k \frac{1}{m_i} \int k_{ik}(\tau_i, \tau_k) f_{k\alpha}(\tau_k)\, d\tau_k. \tag{A13}$$

Verdankungen

Der Autor dankt Herrn Prof. W. Hälg und Herrn Dr. A. Furrer für wertvolle Diskussionen und für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

REFERENZEN

[1] H. VAN DAM und E. P. WIGNER, Phys. Rev. *138*, B1576 (1965); *142*, 838 (1966).
[2] J. A. WHEELER und R. P. FEYNMAN, Rev. Mod. Phys. *17*, 157 (1945); *21*, 425 (1949).
[3] A. D. FOKKER, Physica *12*, 145 (1932).
[4] A. D. MICHAL, *Le calcul différentiel dans les espaces de Banach* (Gauthier-Villars, Paris 1958).
[5] R. MARNELIUS, Phys. Rev. *D10*, 2535 (1974).
[6] L. P. HORWITZ und C. PIRON, Helv. Phys. Acta *46*, 316 (1973).