

Sur la tension superficielle de l'hélium liquide He⁴ au voisinage du point

Autor(en): **Robert, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **55 (1982)**

Heft 4

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-115290>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur la tension superficielle de l'hélium liquide He^4 au voisinage du point λ

Par M. Robert, Baker Laboratory, Cornell University, Ithaca, New York 14853, U.S.A.

(8.VII. 1982; rev. 31. VIII. 1982)

Abstract. It is suggested on theoretical grounds that the apparent discontinuity in slope of the surface tension of liquid helium He^4 at the λ -point, which was observed experimentally, may not be real.

Introduction

Depuis les expériences de van Urk, Keesom et Kamerlingh Onnes [1] en 1925, il a été observé que la tension superficielle de l'hélium liquide He^4 exhibait, en fonction de la température, un changement qualitatif au point λ . Alors que les premières mesures indiquaient l'apparition d'une courbure dans le graphe de la tension superficielle σ en fonction de la température T au voisinage de 2.4°K , les mesures plus détaillées de Allen et Misener [2], en 1938, suggèraient la possibilité d'une légère discontinuité de la pente en $T_\lambda \sim 2.17^\circ\text{K}$. Les expériences suivantes de Atkins et Narahara [3], en 1964, plus précises que les précédentes, révélaient une apparente discontinuité de la pente de $\sigma(T)$ en T_λ . Ces suggestions d'un changement de la pente de $\sigma(T)$ en T_λ ont plus récemment été confirmées par Magerlein et Sanders [4] dans des mesures faites avec une grande résolution dans la région $T_\lambda - 100 \text{ mK} < T < T_\lambda + 100 \text{ mK}$.

Du point de vue théorique, des arguments partiellement contradictoires ont été avancés par Sobyenin [5] et par Hohenberg [6] et récemment Widom [7a] a remarqué que le problème de l'interface de l'hélium liquide He^4 près de T_λ pouvait être étudié par une théorie du type van der Waals [8, 9] à deux densités [10], la tension superficielle étant une tension noncritique près d'un point critique terminal (en anglais: "critical end point").

Alors que les premiers résultats numériques obtenus dans le cadre d'une telle théorie par Ramos-Gómez [7b] suggèraient une discontinuité de $d\sigma/dT$ en T_λ , conformément aux résultats expérimentaux décrits plus haut, des calculs numériques très récents, dus à Tavan et Widom [11], indiquent au contraire que cette discontinuité n'est pas présente.

L'objet de cet article est de présenter une étude analytique du problème de la variation de la tension superficielle de l'hélium au voisinage du point λ dans le cadre de la théorie de van der Waals-Widom. Il sera démontré que suivant cette théorie, la tension superficielle de l'hélium liquide admet nécessairement une dérivée par rapport à la température T qui est continue en T_λ .

Dérivation des résultats

Avant de présenter les détails de la démonstration, il est utile de rappeler la définition du modèle de Ramos-Gómez et Widom [7].

La fonctionnelle d'énergie libre de Helmholtz $F(x, y)$ à deux densités x et y a la forme:

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y)$$

avec:

$$F_1(x, y) = [x^2 - y - (x_0^2 - y_L)]^2 + (y - y_L)^2 + 2(x - x_0)^2(x_0^2 - y_L) \quad (1)$$

et:

$$F_2(x, y) = x^2 + (y - y_G)^2;$$

$(\pm x_0, y_L)$ et $(0, y_G)$ sont les coordonnées des trois "phases" dans le plan des densités (x, y) .

Pour $T > T_\lambda$, $x_0 = 0$ et $y_L < 0$; x est proportionnel au paramètre d'ordre de la phase superfluide et y est proportionnel à la densité de la phase normale, y_L se rapportant à la densité de la phase liquide et y_G à celle de la phase gazeuse.

La tension superficielle σ est donnée par:

$$\sigma = \min_{(x, y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) dz \quad (2)$$

avec:

$$\Psi(z) = F(x(z), y(z)) + \frac{m_1}{2} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{dy}{dz} \right)^2$$

où m_1 et m_2 sont des constantes positives et z est l'axe vertical suivant lequel les densités x et y varient. Les équations de Euler-Lagrange correspondant à ce problème variationnel s'écrivent:

$$m_i \frac{d^2 \phi_i(z)}{dz^2} = \frac{\partial F}{\partial \phi_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

où $\phi_i(z) = x(z), y(z)$. La tension superficielle donnée par (2) peut également s'écrire:

$$\sigma = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x(z), y(z)) dz, \quad (4)$$

où $x(z)$ et $y(z)$ sont maintenant les profils des densités de l'équilibre. L'expression (4) sera celle qui sera utilisée par la suite.

On denotera par ε la grandeur sans dimension $\varepsilon_0 \cdot ((T - T_\lambda)/T_\lambda)$, où ε_0 est une constante positive sans dimension. Pour $\varepsilon \ll 0$, i.e. pour $T \ll T_\lambda$, les solutions de

(3) ont la forme: [11]

$$x_\varepsilon(z) = \begin{cases} x_0(\varepsilon) \cdot \tanh \frac{z}{2\xi_2(\varepsilon)}, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$y_\varepsilon(z) \sim \frac{y_L(\varepsilon) + y_G(\varepsilon)}{2} + \frac{y_L(\varepsilon) - y_G(\varepsilon)}{2} \tanh \frac{z}{2\xi_1(\varepsilon)}, \quad (5)$$

où:

$$x_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{-\varepsilon}{2}},$$

$$y_L(\varepsilon) = \frac{-\varepsilon}{2}, \quad (6)$$

$$y_G(\varepsilon) = -1 + \varepsilon$$

et les longueurs de cohérence ξ_1 et ξ_2 sont données par:

$$\xi_1^{-1}(\varepsilon) \sim 2(1 - \frac{3}{4}\varepsilon)$$

$$\xi_2^{-1}(\varepsilon) \sim \sqrt{-2\varepsilon(1 - 2\varepsilon)} \quad (7)$$

Les expressions (6) et (7) suivent directement de la forme de la fonctionnelle d'énergie libre de Helmholtz F de (1).

Pour $\varepsilon < 0$, les solutions $x(z)$ et $y(z)$ données par (5)–(7) ne sont pas exactes mais approchent bien les solutions numériques [11]; cependant les comportements de ces solutions pour $|z| \rightarrow \infty$ sont exacts et ce sont ces comportements asymptotiques qui constituent un des ingrédients essentiels de la démonstration qui suit.

Pour $\varepsilon > 0$, la phase superfluide n'est plus présente et $x_\varepsilon(z) \equiv 0$. L'interface est alors descriptible par une théorie ordinaire à une densité [10]. Dans ce cas on obtient comme solution exacte de (3) le profil classique $y(z)$:

$$y_\varepsilon(z) = \frac{y_L(\varepsilon) + y_G(\varepsilon)}{2} + \frac{y_L(\varepsilon) - y_G(\varepsilon)}{2} \tanh \frac{z}{2\xi_1(\varepsilon)}$$

avec:

$$y_L(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{4}, \quad (8)$$

$$y_G(\varepsilon) = -1 + \varepsilon,$$

et:

$$\xi_1^{-1}(\varepsilon) \sim 2(1 - \frac{3}{4}\varepsilon);$$

y est désormais proportionnel à la densité ordinaire ρ .

La fonctionnelle F de (1) est par construction du type champ moyen, et les dépendances en ε de x_0 et de y_L dans (6) et (8), qui suivent directement de la forme de F , sont typiques de la théorie du champ moyen. Par ailleurs il existe une analogie entre le présent point critique terminal et le point critique ordinaire de l'équilibre liquide-vapeur [11]. Ici le paramètre d'ordre, x_0 , a, d'après (6), un exposant critique égal à $\frac{1}{2}$, qui est la valeur de l'exposant β du paramètre d'ordre dans la théorie du champ moyen du point critique de l'équilibre liquide-vapeur.

De plus, la discontinuité de $dy_L/d\varepsilon$ en $\varepsilon = 0$ équivaut à la discontinuité de la chaleur spécifique à volume constant suivant l'isochore critique qui caractérise la théorie du champ moyen du point critique de l'équilibre liquide-vapeur. Dans cette analogie, la densité y joue le rôle de la densité d'énergie ou d'entropie à un tel point critique.

En utilisant les valeurs de x_0 , y_L et y_G données par (6), F prend, pour $\varepsilon < 0$, la forme:

$$F(x, y, \varepsilon) = \left[(x^2 - y)^2 + \left(y + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right] [x^2 + (y + 1 - \varepsilon)^2]. \quad (9)$$

En utilisant (4), on a:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 2 \frac{d}{d\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} F_\varepsilon(z) dz, \quad (10)$$

où $F_\varepsilon(z) = F(x_\varepsilon(z), y_\varepsilon(z), \varepsilon)$ est donné par l'expression (9).

Notre résultat sera établi en démontrant que premièrement dans (10) les opérations $d/d\varepsilon$ et $\int dz$ peuvent être échangées pour tout $\varepsilon \neq 0$ fixé et deuxièmement qu'il en est de même des opérations $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ et $\int dz(d/d\varepsilon)$. Nous discutons ici seulement le cas $\varepsilon < 0$, le cas $\varepsilon > 0$ étant beaucoup plus simple et se traitant de la même façon.

Nous commençons avec une identité générale [12] qui suit du principe variationnel (2) et dont la validité n'est pas limitée à la forme spécifique de la fonctionnelle F de (1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\varepsilon} F_\varepsilon(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(z) dz, \quad (11)$$

où:

$$f_\varepsilon(z) = f(x_\varepsilon(z), y_\varepsilon(z), \varepsilon)$$

avec:

$$f(x, y, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x, y, \varepsilon).$$

Cette identité résulte du fait que les profils des densités $x(z)$ et $y(z)$ sont ceux de l'équilibre, et puisque ces derniers minimisent l'intégrale dans (2), cette intégrale est stationnaire par rapport aux variations des profils x et y autour de leur forme d'équilibre. Il n'y a donc finalement de contribution à l'intégrale (2) que par la dépendance explicite de F en ε . Cet argument est le même que celui par lequel se dérive le théorème de Hellmann-Feynman de la mécanique quantique moléculaire [12].

On obtient à partir de (9):

$$f(x, y, \varepsilon) = f^{-1}(x, y, \varepsilon) + f^2(x, y, \varepsilon) \quad (12)$$

où

$$f^1(x, y, \varepsilon) = \left(y + \frac{\varepsilon}{2} \right) [x^2 + (y + 1 - \varepsilon)^2]$$

et:

$$f^2(x, y, \varepsilon) = -2(y + 1 - \varepsilon) \left[(x^2 - y)^2 + \left(y + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right].$$

Le fait que:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} f_\varepsilon^i(z) = 0, \quad i = 1, 2,$$

suggère la décomposition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(z) dz = g_\varepsilon^{1-} + g_\varepsilon^{1+} + g_\varepsilon^{2-} + g_\varepsilon^{2+},$$

où:

$$g_\varepsilon^{1-} = \int_{-\infty}^0 f_\varepsilon^1(z) dz,$$

$$g_\varepsilon^{1+} = \int_0^{+\infty} f_\varepsilon^1(z) dz,$$

$$g_\varepsilon^{2-} = \int_{-\infty}^0 f_\varepsilon^2(z) dz,$$

(13)

et:

$$g_\varepsilon^{2+} = \int_0^{+\infty} f_\varepsilon^2(z) dz.$$

Les fonctions $f_\varepsilon^i(z)$, $i = 1, 2$, sont bornées et décroissent exponentiellement à l'infini; elles sont donc en particulier intégrables. L'idée est alors de majorer, pour chaque f_ε^i , certains facteurs, en s'assurant que les facteurs restants demeurent intégrables.

En utilisant les formes explicites données par les équations (5)–(7), on obtient, pour le terme g_ε^{1-} :

$$y(z) + \frac{\varepsilon}{2} < M^{1-}$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} [x^2(z) + (y(z) + 1 - \varepsilon)^2] = 0,$$

où $M^{1-} < \infty$ est une constante. Or $x(z) = 0$ pour $z < 0$, et donc:

$$\int_{-\infty}^0 f_\varepsilon^1(z) dz < M^{1-} \int_{-\infty}^0 [y(z) + 1 - \varepsilon]^2 dz. \quad (14)$$

En utilisant (5), l'intégrand de (14) s'écrit, pour $z < 0$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 - \frac{3}{2}\varepsilon)^2 \left(1 + \tanh \frac{z}{\xi_1(\varepsilon)}\right)^2.$$

Lorsque ε décroît (en valeur absolue), $\xi_1^{-1}(\varepsilon)$ décroît et par suite $\xi_1(\varepsilon)$ croît. Pour $\varepsilon = 0$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$. Pour tout ε fixé on peut ainsi majorer la fonction $(y(z) + 1 - \varepsilon)^2$ par une fonction qui décroît exponentiellement à l'infini et est donc intégrable en z . De plus, pour tout ε il existe une fonction intégrable en z indépendante de ε , qui majore la fonction $(y(z) + 1 - \varepsilon)^2$. Une telle fonction est par exemple la fonction $(y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon)^2|_{\varepsilon=0}$.

Pour le terme g_ε^{1+} , on a:

$$g_\varepsilon^{1+} = \int_0^{+\infty} \left(y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right) [x_\varepsilon^2(z) + (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon)^2] dz.$$

Or:

$$x_\varepsilon^2(z) + (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon)^2 < M^{1+} < \infty$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,$$

et donc:

$$|g_\varepsilon^{1+}| < M^{1+} \int_0^{+\infty} \left| y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right| dz. \quad (15)$$

Avec (5), l'intégrand de (15) s'écrit:

$$\left(\frac{3\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \tanh \frac{z}{\xi_1(\varepsilon)} \right).$$

L'argument se conclut comme pour le cas précédent du terme g_ε^{1-} . Le majorant intégrable est par exemple la fonction $(y_\varepsilon(z) + \varepsilon/2)|_{\varepsilon=0}$.

Pour le terme g_ε^{2-} , on a:

$$g_\varepsilon^{2-} = -2 \int_{-\infty}^0 (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon) \left[(x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left(y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right] dz.$$

En utilisant:

$$(x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left(y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 < M^{2-} < \infty$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon) = 0,$$

on obtient:

$$|g_\varepsilon^{2-}| < 2M^{2-} \int_{-\infty}^0 |y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon| dz. \quad (16)$$

Mais l'intégrand de (16) est la racine carrée de celui de (14), et l'argument pour ce terme se conclut donc de la même façon que pour (14).

Finalement considérons le terme g_ε^{2+} . On a:

$$g_\varepsilon^{2+} = -2 \int_0^{+\infty} (y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon) \left[(x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left(y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right] dz.$$

Or:

$$+2|y_\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon| < M^{2+} < \infty$$

et:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left[(x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left(y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right] = 0,$$

et donc:

$$|g_\varepsilon^{2+}| < M^{2+} \int_0^{+\infty} \left| (x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z))^2 + \left(y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right| dz. \quad (17)$$

De plus, on a:

$$y_\varepsilon(z) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{4} \right) \tanh \frac{z}{2\xi_1(\varepsilon)},$$

et ce terme s'annule lorsque $z \rightarrow +\infty$. Pour le terme $x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z)$, on obtient:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z) &= -\frac{\varepsilon}{2} \left(\tanh \frac{z}{2\xi_2(\varepsilon)} \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{4} \right) \tanh \frac{z}{2\xi_1(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Ce terme s'annule également lorsque $z \rightarrow +\infty$. Contrairement aux cas précédents, le majorant intégrable n'est pas indépendant de ε . Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Par conséquent, pour tout $\varepsilon^* < 0$ fixé, on peut majorer en module l'intégrand de (17) par une fonction intégrable indépendante de ε pour $\varepsilon < \varepsilon^* < 0$, et donc échanger $d/d\varepsilon$ et $\int dz$.

Nous considérons maintenant l'échange de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et de l'intégration par rapport à z :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(z) dz.$$

Cet échange des processus de limite et d'intégration est légitime si la fonction $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(z)$ existe et si l'intégrand $f_\varepsilon(z)$ est majorable en module par une fonction $h(z)$ dans $L^1(\mathbb{R})$, indépendamment de ε .

L'analyse précédente montre que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(z)$ existe, et que le seul cas où la fonction h n'existe pas est celui du premier terme de l'intégrand de (17). Cependant un calcul explicite va montrer que cette difficulté n'est qu'apparente. On a:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z) &= -\frac{\varepsilon}{2} \left(\tanh \frac{z}{2\xi_2(\varepsilon)} \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{4} \right) \tanh \frac{z}{2\xi_1(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Pour z grand, qui est le régime à contrôler, on a:

$$\tanh x \cong 1 - 2e^{-2x},$$

et donc:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^2(z) &\cong -\frac{\varepsilon}{2}(1-2e^{-z/\xi_2(\varepsilon)})^2 \\ &\cong -\frac{\varepsilon}{2}(1-4e^{-z/\xi_2(\varepsilon)}) \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(z) &\cong \frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{4}\right)(1-2e^{-z/\xi_1(\varepsilon)}) \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} - \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right)e^{-z/\xi_1(\varepsilon)}; \end{aligned}$$

par suite:

$$x_\varepsilon^2(z) - y_\varepsilon(z) \cong 2\varepsilon e^{-z/\xi_2(\varepsilon)} + \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right)e^{-z/\xi_1(\varepsilon)}. \quad (19)$$

Contrairement au second terme de (19), le premier n'est pas majorable en module par une fonction intégrable, indépendamment de ε , au voisinage de $\varepsilon = 0$. Mais on a:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\xi_2^{-1}(\varepsilon) \cdot z} dz \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon(1-2\varepsilon)}} \cdot e^{-\xi_2^{-1}(\varepsilon) \cdot z} \right] \Big|_0^{+\infty} \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'expression explicite (7) pour $\xi_2^{-1}(\varepsilon)$. Donc le terme gênant ne contribue pas à $d\sigma/d\varepsilon$ dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous avons donc vérifié que les conditions permettant l'échange de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et de l'intégration par rapport à z sont satisfaites pour tout $\varepsilon \leq 0$.

On vérifie enfin que les quantités:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(z) dz$$

et:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} f_\varepsilon(z) dz$$

sont égales.

Cette démonstration permet de conclure que, dans le cadre de la théorie de van der Waals-Widom classique, la fonction $d\sigma/d\varepsilon$ est continue en $\varepsilon = 0$, en d'autres termes que la fonction $d\sigma/dT$ est continue en T_λ .

Discussion

Les calculs précédents utilisent les profils des densités $x_\varepsilon(z)$ et $y_\varepsilon(z)$ donnés par la théorie de van der Waals-Widom classique. La question se pose tout d'abord de savoir si un résultat semblable à celui obtenu ici reste valable dans une

formulation non classique [13] de cette théorie et ensuite si le même résultat peut être étendu à un nombre arbitraire [14] de densités [10]. Des calculs préliminaires [15] suggèrent qu'un résultat identique à celui établi ici conserve sa validité dans ces cas plus généraux.

Enfin on peut mentionner que des oscillations, d'origine quantique, du profil de densité de la surface de l'hélium liquide He⁴ dans son état fondamental, ont été prédites par Regge [16] et trouvées dans des calculs variationnels numériques par Liu, Kalos et Chester [17]; de telles oscillations, si elles existent réellement, ne subsistent probablement pas jusqu'au point critique [18]. Si la théorie utilisée ici ne prédit pas de telles oscillations, nous pensons que leur présence n'invaliderait pas la démonstration et le résultat donnés plus haut.

Des mesures expérimentales plus précises que celles qui ont été faites jusqu'ici seront nécessaires pour confirmer ou contredire ces prédictions théoriques.

Remerciements

L'auteur remercie vivement P. Tavan dont les calculs numériques de haute précision ont motivé dans une large mesure le présent travail, et qui lui a communiqué ses résultats avant leur publication. Il remercie également G. V. Chester et B. Widom pour d'utiles discussions, B. Payandeh pour ses critiques du manuscrit et Ch. Pfister pour ses remarques. Ce travail a été effectué pendant que l'auteur était membre du groupe du Professeur Widom et a été soutenu financièrement par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

RÉFÉRENCES

- [1] A. TH. VAN URK, W. H. KEESOM and H. KAMERLINGH ONNES, *Leiden Comm.* 179a, (1925).
- [2] J. F. ALLEN and A. D. MISENER, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 34, 299 (1938).
- [3] K. R. ATKINS and Y. NARAHARA, *Phys. Rev.* 138A, 437 (1965).
- [4] J. H. MAGERLEIN and T. M. SANDERS JR., *Phys. Rev. Lett.* 36, 258 (1976).
- [5] A. A. SOBYANIN, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61, 433 (1971), traduit en anglais dans *Sov. Phys. JETP* 34, 229 (1972).
- [6] P. C. HOHENBERG, *J. Low Temp. Phys.* 13, 433 (1973).
- [7a] B. WIDOM, *J. Chem. Phys.* 67, 872 (1977); voir aussi Ramos-Gómez F. and Widom B., *Physica* 104A, 595 (1980) ainsi que la référence suivante (7b).
- [7b] F. RAMOS-GÓMEZ, thèse de doctorat, Universidad Nacional Autónoma de México (1980), pp. 104-131 et pp. 148-157.
- [8] J. D. VAN DER WAALS, *Verk. d. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam Deel I, Nr. 8* (1893); traduction française dans *Arch. Neerl.* 28, 121 (1894), allemande dans *Z. Phys. Chem.* 13, 657 (1894) et anglaise dans *J. Stat. Phys.* 20, 197 (1979).
- [9] B. WIDOM, *Phys. Rev. Lett.* 34, 999 (1975).
- [10] Le terme "densité" est pris ici au sens de la terminologie de Griffiths et Wheeler (*Phys. Rev.* A2, 1047 (1970)).
- [11] P. TAVAN and B. WIDOM, à paraître dans *Phys. Rev. B* 1 (Jan 1, 1983).
- [12] Cette identité est donnée dans Widom B., *Physica* 95A, 1 (1979) et est dérivée en détail dans la référence (7b) pp. 122-127. Pour le théorème de Hellmann-Feynman, voir par exemple H. Hellmann, *Einführung in die Quantenchemie*, Deuticke, Leipzig, 1937, ou Cohen-Tannoudji C. et al., *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1977, vol. II, p. 1192-3.
- [13] La formulation non classique de cette théorie pour le problème de l'interface d'un fluide simple est donnée par Fisk S. and Widom B., *J. Chem. Phys.* 50, 3219 (1969).
- [14] Voir Ref. (7a) ainsi que Griffiths R. B. *Phys. Rev.* B7, 545 (1973) et Cohen E. G. D., dans

Fundamental Problems in Statistical Mechanics, édité par E. G. D. Cohen, North Holland 1975, vol. 3 pp. 47-79.

[15] M. ROBERT and P. TAVAN, en progrès.

[16] T. REGGE, *J. Low Temp. Phys.* 9, 123 (1972).

[17] K. S. LIU, M. H. KALOS and G. V. CHESTER, *Phys. Rev. B12*, 1715 (1975).

[18] L'auteur remercie G. V. Chester pour une discussion de cette question.