

# Asymptotique de la largeur de la première bande de l'opérateur de Dirac avec potentiel périodique

Autor(en): **Mohamed, A. / Parisse, B. / Outassourt, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **66 (1993)**

Heft 2

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-116568>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Asymptotique de la Largeur de la Première Bande de l'Opérateur de Dirac avec Potentiel Périodique

A. Mohamed<sup>(1)</sup>

B. Parisse<sup>(2)</sup>

A. Outassourt<sup>(1),(3)</sup>

(1) Université de Nantes  
Dpt. de Mathématiques  
C.N.R.S. U.R.A. 758  
2, r. de la Houssinière  
44072 NANTES Cedex 03  
FRANCE

(2) Université de Paris 11  
Dpt. de Mathématiques  
C.N.R.S. U.R.A. 760  
Bât. 425  
91405 ORSAY Cedex  
FRANCE

(3) Université Cadi-ayyad  
Faculté des Sciences  
Marrakech  
MAROC

(3. X. 1992)

**Abstract** The Dirac operator with a periodic potential has a band spectrum. We localize these bands in the semi-classical sense, in particular we obtain a precise asymptotic expansion of the width of the lowest energy band.

### 1) Introduction et énoncé des résultats

On s'intéresse au spectre de l'opérateur de Dirac sur  $\mathbb{R}^n$

$$(1.1) \quad H^h := H_0^h + V(x)\mathbf{1},$$

avec un potentiel électrique  $V(x)$  périodique,

$$(1.2) \quad V(x+\gamma) = V(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^n k_j v_j; k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}, \text{ où } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.$$

L'opérateur non perturbé  $H_0^h$  est différentiel, à coefficients constants et de la forme

$$H_0^h = \begin{bmatrix} 1 & A^*(hD_x) \\ A(hD_x) & -1 \end{bmatrix}, \text{ où } A(hD_x) \text{ est un système } m \times m \text{ différentiel elliptique.}$$

L'opérateur  $A(hD_x)$  est homogène d'ordre 1 et vérifie  $A^*(hD_x)A(hD_x) = -h^2 \Delta 1$ ,

( $\Delta$  est le Laplacien usuel sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $1$  est la matrice identité  $m \times m$  et  $\mathbb{1}$  celle  $2m \times 2m$ ).

Le paramètre  $h$  est réel  $> 0$  et censé être très petit.

On s'intéressera plus particulièrement aux cas suivants:

$$n = 3 \text{ avec } m = 2 \text{ et } A(hD_x) = \sigma(hD_x) = h \sum_{j=1}^3 \sigma_j D_{x_j},$$

$$n = 2 \text{ avec } m = 1 \text{ et } A(hD_x) = h \sum_{j=1}^2 \sigma_j D_{x_j},$$

$$n = 1 \text{ avec } m = 1 \text{ et } A(hD_x) = h \sigma_2 D_x.$$

Les matrices  $\sigma_j$  sont celles bien connues de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On suppose que  $V(x)$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^n$ .

Il est alors bien connu que  $H^h$  est essentiellement auto-adjoint sur

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{2m})$  et que le spectre de  $H^h$  est constitué de l'union des spectres des opérateurs de Floquet:

$$\text{sp}(H^h) = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma^*} \text{sp}(H^{h,\theta}),$$

où  $H^{h,\theta}$  est l'opérateur différentiel défini sur le tore  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ , auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma; \mathbb{C}^{2m})$ , et défini comme  $H^h$  en remplaçant  $A(hD_x)$  par  $A(hD_x + h\theta)$ .

On a noté  $\Gamma^*$  le réseau dual,  $\Gamma^* = \{\omega \in \mathbb{R}^n; \omega \gamma \in 2\pi \mathbb{Z}, \forall \gamma \in \Gamma\}$ .

L'opérateur  $H^{h,\theta}$  est l'unique réalisation auto-adjointe contenant  $C^\infty(\mathbb{R}^n/\Gamma; \mathbb{C}^{2m})$  dans son domaine, il est alors à résolvante compacte, du fait que  $H^h$  est elliptique

et que le tore est compact. Son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres, chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité:

$$\text{sp}(H^{h,\theta}) = \{\lambda_k(h,\theta); k \in \mathbb{Z}^*\},$$

avec  $\lambda_{-k-1}(h,\theta) \leq \lambda_{-k}(h,\theta) < 0 \leq \lambda_k(h,\theta) \leq \lambda_{k+1}(h,\theta)$ , si  $k > 0$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on considère alors la bande

$$(1.3) \quad b_k(h) = \bigcup_{\theta} \lambda_k(h,\theta);$$

$$\text{on a donc } \text{sp}(H^h) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^*} b_k(h).$$

Il est facile de voir que les bandes  $b_k(h)$  sont des intervalles. Si  $n=3$ , pour tout  $\omega \in \Gamma^*$ ,  $H^{h,\theta+\omega}$  est unitairement équivalent (par simple changement de jauge) à  $H^{h,\theta}$ , et comme nous allons le voir  $H^{h,-\theta}$  est aussi unitairement équivalent à  $H^{h,\theta}$ ,  $H^{h,\theta} J = J H^{h,-\theta}$ , où  $J$  est l'opérateur anti-linéaire, unitaire et défini sur  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$  par  $J(z_+, z_-) := (\sigma_2 \bar{z}_+, \sigma_2 \bar{z}_-)$ . On a donc  $\lambda_{2k-1}(h,\theta) = \lambda_{2k}(h,\theta)$  et  $\lambda_{-2k+1}(h,\theta) = \lambda_{-2k}(h,\theta)$ , si  $2\theta \in \Gamma^*$ , ceci  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , et donc les bandes  $b_{2k-1}(h)$  et  $b_{2k}(h)$  se touchent ainsi que celles-ci:  $b_{-2k+1}(h)$  et  $b_{-2k}(h)$ , si  $k > 0$ .

Nous ferons l'hypothèse suivante,

$$(1.4) \quad \sup_x V(x) - \inf_x V(x) < 2,$$

notons alors

$$(1.5) \quad \mu^- := -1 + \sup_x V(x) \quad \text{et} \quad \mu^+ := 1 + \inf_x V(x).$$

Il est facile de voir qu'il y a au moins une lacune, un 'gap', dans le spectre de  $H^h$ ,

$$(1.6) \quad ]\mu^-, \mu^+[ \cap \text{sp}(H^h) = \emptyset.$$

Quitte à rajouter à  $V(x)$  une constante, on peut toujours supposer que

$\mu^- < 0 < \mu^+$ , dans ce cas  $b_{-k}(h) \subset ]-\infty, \mu^-]$  et  $b_k(h) \subset [\mu^+, +\infty[$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Si le minimum de  $V(x)$  ainsi que son maximum sont non dégénérés, en utilisant la théorie de Helffer-Sjöstrand [HE-SJ]<sub>1,2</sub>, (voir les adaptations faites à l'opérateur de Dirac dans [WAN] et dans [MO-PA]), on voit aisément que, pour tout entier  $k > 0$ , au voisinage de  $\mu^-$ , la bande  $b_{-k}(h)$  est localisée dans un



voisinage de la  $k^{\text{ème}}$  valeur propre de l'opérateur  $-[ -h^2 \Delta + W^-(x) ]$ , et qu'au voisinage de  $\mu^+$ , la bande  $b_k(h)$  est localisée dans un voisinage de la  $k^{\text{ème}}$  valeur propre de  $-h^2 \Delta + W^+(x)$ , ces opérateurs étant définis sur  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$  avec

$$(1.7) \quad W^-(x) = 1 - (V(x) - \mu^-)^2 \quad \text{et} \quad W^+(x) = 1 - (V(x) - \mu^+)^2.$$

Plus précisément, on a les résultats suivants.

**Proposition (1.1)<sup>-</sup>.** *On suppose que  $V$  est  $C^\infty$  et que (1.2) et (1.4) sont vérifiés. On suppose de plus qu'il existe  $x_0^- \in \mathbb{R}^n$ , vérifiant*

$$(1.8)^- \quad V(x_0^-) = \text{Sup}\{V(x); x \in \mathbb{R}^n\} \quad \text{et} \quad V(x) = V(x_0^-) \Rightarrow x - x_0^- \in \Gamma.$$

*Si le maximum de  $V$  est non dégénéré, i.e. s'il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que l'on ait*

$$(1.9)^- \quad V(x) - V(x_0^-) \leq -\alpha |x - x_0^-|^2, \quad \text{si} \quad |x - x_0^-| \leq \varepsilon;$$

*Alors, pour tout  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $h_0 > 0$  et  $C > 0$ , tels que, pour tout  $h$ ,  $0 < h < h_0$ ,*

*et tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < k \leq k_0$ , on ait*

$$(1.10)^- \quad b_{-k}(h) \subset ] -h^{3/2}C - he_k^- + \mu^-, \mu^- - he_k^- + h^{3/2}C[ ,$$

*où  $(e_j^-)_{j>0}$  est la suite croissante des valeurs propres de l'oscillateur harmonique*

*$\frac{1}{2}[-\Delta - xV''(x_0^-)x]$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ ,*

*( $V''(y)$  désigne la matrice du hessien d'ordre deux de  $V$  au point  $y$ ).*

**Proposition (1.1)<sup>+</sup>.** *On suppose que  $V$  est  $C^\infty$  et que l'on a (1.2) et (1.4). On suppose de plus qu'il existe  $x_0^+ \in \mathbb{R}^n$  tel que l'on ait*

$$(1.8)^+ \quad V(x_0^+) = \text{inf}\{V(x); x \in \mathbb{R}^n\} \quad \text{et} \quad V(x) = V(x_0^+) \Rightarrow x - x_0^+ \in \Gamma.$$

*S'il existe  $\alpha > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tels que*

$$(1.9)^+ \quad V(x) - V(x_0^+) \geq \alpha |x - x_0^+|^2, \quad \text{si} \quad |x - x_0^+| \leq \varepsilon;$$

*Alors, pour tout  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $h_0 > 0$  et  $C > 0$ , tels que, pour tout  $h$ ,  $0 < h < h_0$ ,*

*et tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < k \leq k_0$ , on ait*

$$(1.10)^+ \quad b_k(h) \subset ]-h^{3/2}C + he_k^+ + \mu^+, \mu^+ + he_k^+ + h^{3/2}C[ ,$$

où  $(e_j^+)_{j>0}$  est la suite croissante des valeurs propres de l'oscillateur harmonique  $\frac{1}{2}[-\Delta + xV''(x_0^-)x]$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ .

Les hypothèses (1.9)<sup>±</sup> peuvent être affaiblies, mais dans ce cas les localisations (1.10) sont différentes.

Notre résultat principal est de donner, dans l'esprit de ce qui s'est fait pour l'opérateur de Schrödinger par [SIM]<sub>2</sub> et par [OUT]<sub>1</sub>, un comportement asymptotique, quand  $h$  est très petit, de la taille de la bande du spectre de  $H^h$  la plus proche de  $\mu^-$  et la plus proche de  $\mu^+$ .

Soient les métriques d'Agmon  $W^-(x)dx^2$  et  $W^+(x)dx^2$ , on désigne  $d^-(x,y)$  et  $d^+(x,y)$  les distances associées entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ . Suivant que

(1.8)<sup>-</sup> ou (1.8)<sup>+</sup> est vérifié, on considère

$$(1.11) \quad S_0^\pm := \inf_{\gamma \in \Gamma^*} d^\pm(x_0^\pm; x_0^\pm + \gamma).$$

On considère les cellules élémentaires  $K^\pm$  centrées en  $x_0^\pm$ ,

$$(1.12) \quad K^\pm := \left\{ x_0^\pm + \sum_{i=1}^n t_i v_i; \text{ avec } t_i \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ \right\}.$$

**Théorème (1.2).** *On se place sous les hypothèses de la proposition (1.1)<sup>±</sup>.*

*On suppose en plus que si  $\gamma \in \Gamma$  est tel que  $d^\pm(x_0^\pm, x_0^\pm + \gamma) = S_0^\pm$ ,*

*alors il existe un nombre fini de géodésiques, pour la métrique  $W^\pm(x)dx^2$ , reliant  $x_0^\pm$  à  $x_0^\pm + \gamma$ , et que deux telles géodésiques sont soit confondues soit d'intersection réduite aux deux points  $x_0^\pm$  et  $x_0^\pm + \gamma$ .*

*Alors la bande du spectre de  $H^h$  la plus proche de  $\mu^\pm$ , qui est  $b_{\pm 1}(h) \cup b_{\pm 2}(h)$  si  $n=3$  et seulement  $b_{\pm 1}(h)$  si  $n < 3$ , est de la forme  $[r_-^\pm(h) + \lambda_D^\pm(h), \lambda_D^\pm(h) + r_+^\pm(h)]$ ,*

Certains résultats partiels de ce travail ont été établis auparavant dans la thèse de l'un des auteurs, A. Outassourt [OUT]<sub>2</sub>.

Nous tenons à remercier vivement B. Helffer pour l'intérêt porté à ce travail.

## II) Démonstration des résultats

Dans toute la suite,  $C$  désignera toute constante  $> 0$  ne dépendant que de  $V(x)$ . Le produit scalaire sur  $\mathbb{C}^k$  sera noté  $(\cdot | \cdot)$  et la norme associée  $|\cdot|$ . L'opérateur gradient sur  $\mathbb{R}^n$  sera noté  $\nabla$ ,  $\nabla = iD_x$ ,  $p(\xi)$  désignera le symbole principal de  $H_0^h$ ,  $H_0^{h,\theta} u = p(hD_x + h\theta)u + (u^+, -u^-)$ . Pour tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle \cdot | \cdot \rangle_\Omega$  désignera le produit scalaire sur  $L^2(\Omega; \mathbb{C}^{2m})$  et  $\|\cdot\|_\Omega$  la norme associée,  $W^k(\Omega; \mathbb{C}^{2m})$  désignera l'espace de Sobolev d'ordre  $k$  sur  $\Omega$  et  $\|\cdot\|_{k,\Omega}$  sa norme, les références à  $\Omega$  seront omises quand il n'y aura pas confusion.

### §2.1 Preuve de (1.6)

Soit  $\lambda \in ]\mu^-, \mu^+[$ , alors  $-1 < V(x) - \lambda < 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Par conséquent l'opérateur  $C_\lambda^h = A^*(hD_x)[1 + \lambda - V(x)]^{-1}A(hD_x) + [1 + V(x) - \lambda]$  est un isomorphisme de  $W^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$  sur  $W^{-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$  et l'image de  $W^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$  est  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ . Pour tout  $f = (f^+, f^-) \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)$ , on détermine

$u = (u^+, u^-) \in \mathcal{H}$  par  $u^- = [1 + \lambda - V(x)]^{-1}[A(hD_x)u^+ - f^-]$  et

$$u^+ = (C_\lambda^h)^{-1}[f^+ + A^*(hD_x)(1 + \lambda - V(x))^{-1}f^-].$$

On a  $u \in \mathcal{H}$  et  $(H^h - \lambda)u = f$ . On vérifie aisément, grâce à l'ellipticité de  $H^h$  que  $u$  est dans son domaine,  $u \in D(H^h) = W^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)$ , ce qui prouve que  $\lambda \notin \text{sp}(H^h)$ .

**S2.2 Preuve de la proposition (1.1)**

On a (cf [WAN] ou [MO-PA]) l'égalité d'énergie

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \|h(D_x + \theta)(e^{\phi/h} u)\|^2 + \int_{K'} e^{2\phi/h} [1 - |\nabla\phi(x)|^2 - (V(x) - \lambda)^2] |u(x)|^2 dx \\ & = \text{Re}(\langle e^{2\phi/h} [H_0^{h,\theta} + (V - \lambda)]u | [H_0^{h,\theta} - (V - \lambda)]u \rangle) - \\ & 2\text{Im}(\langle e^{2\phi/h} [H_0^{h,\theta} + (V - \lambda)]u | \rho(\nabla\phi)u \rangle), \end{aligned} \right.$$

ceci pour tout réel  $\lambda$ , pour toute cellule  $K'$ , pour toute fonction réelle et lipschitzienne  $\phi(x)$  sur  $\mathbb{R}^n$  et vérifiant des conditions sur le bord de  $K$  périodiques, et pour tout  $u \in W^1(K'; \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m)$  vérifiant des conditions au bord périodique sur  $K'$ , (on prendra par exemple  $K' = K$  ou  $K' = K_3 := x_0 + 3(K - x_0)$ ).

L'égalité (2.1) est encore valable sur un ouvert  $\Omega$  en imposant à  $u$  de vérifier les conditions au bord de  $\Omega$  du type de Dirichlet, (on n'impose aucune condition au bord pour  $\phi$ ).

L'estimation (2.1) avec  $K' = K_3$  et  $\phi(x) = (1 - \varepsilon_0)d(x)$ ,  $0 < \varepsilon_0 < 1$ , permet aisément d'établir la Proposition en suivant par exemple la démonstration du théorème (2.6) de [MO-PA]; la distance  $d(x)$  est définie par

$$d(x) := \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x_0 + \gamma, x);$$

dans (1.10),  $C$  est une constante  $> 0$  ne dépendant que de  $K'$ .

En effet si  $\lambda = \mu + \mathcal{O}(h)$  est une valeur propre de  $H^{h,\theta}$ , et si  $u(x)$  est une fonction propre associée, alors  $u(x)$  a toute son énergie concentrée dans un petit voisinage de  $x_0$ , i.e. il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $h$  assez petit, on ait

$$\int_{K'} [h^2 |(D_x + \theta)e^{\phi/h} u|^2 + (|x - x_0|^2 |e^{\phi/h} u|^2)] dx \leq C \int_{K'} |u|^2 dx.$$

Si  $\chi_0(x)$  est une fonction de troncature à support dans  $K$  et égale à 1 dans un voisinage de  $x_0$ , il existe donc  $\eta > 0$  tel que

$$(2.2) \quad \|(H^h - \lambda)\chi_0 u\|_1 = \mathcal{O}(e^{-\eta/h}), \quad \text{si } \int_{K'} |u|^2 dx = 1.$$

La dilatation  $(x - x_0) \rightarrow h^{1/2}(x - x_0)$ , puis la formule de Taylor appliquée en  $x_0$

et on a les développements asymptotiques

$$r_{+}^{\pm}(h) - r_{-}^{\pm}(h) \sim h^{2 - \frac{n}{2}} e^{-S_0^{\pm}/h} \sum_{j \geq 0} r_j^{\pm} h^j, \text{ avec } r_0^{\pm} > 0, \text{ et } \lambda_D^{\pm}(h) \sim \mu^{\pm} + \sum_{j \geq 1} \rho_j^{\pm} h^j.$$

(Ici  $\pm \lambda_D^{\pm}(h)$  désigne la plus petite valeur propre  $\geq \pm \mu^{\pm}$  du problème de Dirichlet sur un ouvert  $\Omega$  contenant  $\{x; d^{\pm}(x_0^{\pm}, x) \leq \frac{1}{2} S_0^{\pm}\}$  et associé à  $H^h$ ).

Le problème de Dirichlet est l'un des deux suivants définis par l'opérateur  $H_{\Omega}^{h,\pm}$  associé à  $H^h$  sur  $\Omega$ , de domaine

$$D(H_{\Omega}^{h,\pm}) = \{u = (u^+, u^-) \in W^1(\Omega; \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m); u^{\pm} / \partial\Omega = 0\}.$$

L'ouvert  $\Omega$  doit être choisi connexe, borné, à frontière assez régulière, contenant  $\{x; d^{\pm}(x_0^{\pm}, x) \leq \frac{1}{2} S_0^{\pm}\}$  et ne rencontrant pas  $x_0^{\pm} + \Gamma \setminus \{0\}$ .

Remarquons que l'on passe d'un maximum pour  $V(x)$  à un minimum pour  $-V(-x)$  par la transformation unitaire  $\mathcal{J}(f)(x) = (f^-(x), f^+(x))$ , si

$$f(x) = (f^+(x), f^-(x)) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m) \times L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m).$$

En effet on a  $\mathcal{J}^*(H_0^h + V(x)\mathbb{1})\mathcal{J} = -(H_0^h - V(-x)\mathbb{1})$ ;

par conséquent nous démontrerons seulement le cas du minimum pour  $V(x)$ , celui relatif au signe  $+$ , nous omettrons en particulier ce signe  $+$  quand il n'y aura pas confusion.

Dans le chapitre II, nous démontrerons les résultats annoncés et dans le chapitre IV, nous traiterons le cas des potentiels à singularité de type Coulombienne qui ont été étudiés, auparavant dans le cadre de l'opérateur de Schrödinger, par [KNA] et [MOH]. Au cours de la démonstration du théorème (1.2), il apparaît que les deux premières valeurs propres positives  $\lambda_1(h, \theta)$  et  $\lambda_2(h, \theta)$ , de l'opérateur de Floquet  $H^{h, \theta}$  sont asymptotiquement proches quand  $h \rightarrow 0$ . Une question naturelle se pose, à savoir si génériquement  $\lambda_1(h, \theta)$  est une valeur propre simple. Nous répondrons partiellement à cette question dans le chapitre III et nous donnerons un exemple de potentiel  $V(x)$  donnant lieu à un  $\lambda_1(h, \theta)$  simple pour tout  $(h, \theta)$  dans un ensemble dense, en utilisant les techniques de [MO-PA]. Un problème semblable se pose pour les états excités de l'opérateur de Schrödinger, c.f. [COL].

dans l'égalité

$$(2.3) \quad C_\lambda^{h,\theta} u^+ = 0,$$

$$C_\lambda^{h,\theta} = [1 - V(x) + \lambda] A^*(h(D_x + \theta)) [1 - V(x) + \lambda]^{-1} A(h(D_x + \theta)) + 1 - (V(x) - \lambda)^2,$$

permet de voir que

$$(2.4) \quad \|[\frac{1}{2}(-\Delta \pm (x - x_0)V''(x_0)(x - x_0) - h^{-1}(\lambda - \mu)]\chi_0 u\| = \mathcal{O}(h^{1/2}).$$

$$\text{Mais } u^- = [1 - V + \lambda]^{-1} A(h(D_x + \theta)) u^+,$$

alors (2.1) – (2.3) montrent que

$$\|\chi_0 u^-\| \leq C_1 (h \|D_x \chi_0 u^+\| + e^{-\eta/h}) \leq C_2 (\|\chi_0 u^+\| + e^{-\eta/h});$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes  $> 0$ , indépendantes de  $h$ .

On peut donc déduire de (2.4) qu'il existe une valeur propre  $e_k$  de l'oscillateur harmonique, telle que  $|\lambda - \mu - h e_k| = \mathcal{O}(h^{3/2})$ ,

$\lambda$  est proche d'une valeur propre de l'oscillateur harmonique de la Proposition. La réciproque est beaucoup plus facile compte tenu de la décroissance exponentielle des fonctions propres de l'oscillateur harmonique.

On vérifie de même l'égalité des dimensions des images des projecteurs spectraux respectifs, sur un intervalle convenablement choisi et de longueur de l'ordre de  $h^{3/2}$ .

### §2.3 Preuve du théorème (1.2)

On supposera que  $x_0$  se trouve à l'origine de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans toute la suite on écrira

$$f(h) \approx g(h), \text{ s'il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } f(h) = g(h) + \mathcal{O}(e^{-(S_0 + \varepsilon)/h}), \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Soit  $\varepsilon_0$ ,  $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{4}$ , choisi assez petit. Soit  $\Omega$  un ouvert vérifiant

$$Q_{1-2\varepsilon_0} \subset \Omega \subset Q_{1-\varepsilon_0}, \text{ avec } Q_r := \{x; d(x_0, x) < rS_0\}.$$

Soit le sous-ensemble borné de  $\Gamma$ ,

$$\mathcal{K} := \{\gamma \in \Gamma; (\gamma + K) \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset\}.$$

Soit  $\chi(x)$  une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage de  $Q_{1-2\varepsilon_0}$  et à support dans  $\Omega$ .

Rappelons que  $J$  commute avec l'opérateur de Dirichlet  $H_\Omega^h$ , sur  $\Omega$ .

Soit  $\lambda(h)$  la première valeur propre  $\geq 0$  de  $H_{\Omega}^h$ .

$\lambda(h)$  est telle que  $\lambda(h) = \mu + h\varepsilon_1 + \mathcal{O}(h^2)$ .

La valeur propre  $\lambda(h)$  est de multiplicité deux, l'espace propre admet une base orthonormée de la forme  $\{u^h, Ju^h\}$ . On considère comme dans [OUT] les fonctions  $v_1^{h,\theta}(x) = e^{-i\theta x} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\theta\gamma} \chi(x-\gamma) u^h(x-\gamma)$  et  $v_2^{h,\theta}(x) = e^{-i\theta x} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\theta\gamma} \chi(x-\gamma) Ju^h(x-\gamma)$ ;

ce sont deux fonctions périodiques sur  $K$ .

Si pour tout  $\varepsilon_1 \in ]0,1[$  fixé, on utilise (2.1) sur  $\Omega$  avec  $\phi(x) = (1-\varepsilon_1)d(x_0, x)$ , on trouve qu'il existe  $C_{\varepsilon_1} > 0$ , indépendant de  $h$ , tel que l'on ait

$$(2.5) \quad \|hD_x(e^{\phi/h} u^h)\|^2 + \|de^{\phi/h} u^h\|^2 \leq C_{\varepsilon_1}; \text{ avec } d(x) = d(x_0, x).$$

Comme dans [OUT], en utilisant la théorie de Helffer-Sjöstrand [HE-SJ]<sub>1,2</sub> et (2.5), on montre aisément que les valeurs propres  $\lambda_1(h, \theta)$  et  $\lambda_2(h, \theta)$  de l'opérateur de Floquet  $H^{h,\theta}$  sont celles de la matrice  $2 \times 2$

$$(2.6) \quad M(\theta) = \lambda(h) \mathbf{1} + \begin{pmatrix} a_1(h) & \bar{b}(h) \\ b(h) & a_2(h) \end{pmatrix} + R(h), \text{ avec } R(h) = \mathcal{O}(e^{-(S_0 + \eta_0)/h}),$$

pour un  $\eta_0 > 0$  indépendant de  $h$ ,  $\eta_0 = S_0(1-\varepsilon_1)$ ,  $\varepsilon_1$  étant celui choisi dans (2.5).

Les  $a_j(h)$  et  $b(h)$  sont donnés par

$$a_j(h) = \frac{1}{2}(\alpha_{j,j}(h, \theta) + \bar{\alpha}_{j,j}(h, \theta)), \quad b(h) = \frac{1}{2}(\alpha_{2,1}(h, \theta) + \bar{\alpha}_{1,2}(h, \theta)) \text{ et}$$

$$\alpha_{j,k}(h, \theta) = -ih \sum_{\gamma, \rho \in \mathcal{K}} e^{i\theta(\gamma-\rho)} \langle p(\nabla \chi^{\gamma}) u_j^{\gamma} | \chi^{\rho} u_k^{\rho} \rangle;$$

on a noté  $u_1(x)$  le spineur  $u^h(x)$ ,  $u_2(x)$  celui  $Ju^h(x)$  et si  $f$  est une fonction et  $\gamma \in \Gamma$ ,  $f^{\gamma}$  est la fonction  $f^{\gamma}(x) = f(x-\gamma)$ .

Remarquons que  $\alpha_{2,2}(h, \theta) = \bar{\alpha}_{1,1}(h, -\theta)$ .

Etudions d'abord les  $a_j(h)$ . On a

$$(2.7) \quad a_j(h) = h \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\gamma, \rho \in \mathcal{K}} e^{i\theta(\gamma-\rho)} \langle p(\nabla \chi^{\gamma}) u_j^{\gamma} | \chi^{\rho} u_j^{\rho} \rangle \right\}.$$

Le fait que  $u_2 = Ju_1$  et que  $p(\xi)J = -Jp(\xi)$  pour tout réel  $\xi$ , permet de voir, en



utilisant la propriété  $(Jx|y) = -(Jy|x)$ ,

que les  $a_j(h) = a_j(h, \theta)$  vérifient  $a_2(h, \theta) = a_1(h, -\theta)$ .

Remarquons que

$$d(x_0, x) + d(x_0, x - \gamma) \geq d(x_0, x_0 - \gamma) \text{ et } d(x_0, x - \gamma) + d(x_0, x - \rho) \geq d(x_0 - \gamma, x_0 - \rho).$$

Comme  $p(\nabla \chi^\gamma)$  est hermitienne, les termes relatifs à  $\gamma = \rho$  dans (2.7) sont à contribution nulle. Pour estimer (2.7), il suffit donc d'estimer

$$(2.8) \quad a_j(h, \gamma, \rho) := e^{i\theta(\gamma - \rho)} \langle [H^h; \chi^\gamma] u_j^\gamma | \chi^\rho u_j^\rho \rangle + e^{-i\theta(\gamma - \rho)} \langle \chi^\rho u_j^\rho | [H^h; \chi^\gamma] u_j^\gamma \rangle,$$

pour un  $\gamma$  et  $\rho \in \mathcal{K}$  tel que  $\gamma \neq \rho$ .

( $2a_j(h)$  est la somme des  $a_j(h, \gamma, \rho)$  modulo un  $\mathcal{O}(e^{-(S_0 + \eta_0)/h})$ ).

Soit  $\mathcal{D}_\gamma$  la partie du support de  $\nabla \chi^\gamma$  contenue dans  $K$ , alors on a

$$d(x_0, x - \gamma) \geq (1 - 2\varepsilon_0)S_0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_\gamma;$$

par conséquent, si  $\varepsilon_0$  est choisi assez petit, on a

$$d(x_0, x - \gamma) + d(x_0, x - \rho) > S_0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_\gamma, \text{ si } \rho \text{ et } \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}.$$

L'estimation (2.5) montre alors que

$$(2.9) \quad a_j(h, \gamma, \rho) \approx 0, \text{ si } \gamma \neq 0 \text{ et } \rho \neq 0.$$

Comme  $d(x_0, x - \gamma) + d(x_0, x - \rho) = S_0$  implique l'existence d'une géodésique,  $g_{\gamma, \rho}$ , de longueur  $S_0$  reliant  $\gamma$  à  $\rho$  et passant par  $x$ , s'il n'y a pas de géodésique de longueur  $S_0$  reliant  $\gamma$  à  $x_0$ , alors  $a_j(h, \gamma, 0) \approx 0$ .

Dans le cas contraire, on peut trouver un point  $y \in g_{\gamma, 0} \cap K$ ,  $y \neq x_0$ , tel que, dans un voisinage de ce point, l'hyperplan  $F_\gamma$  normal à la géodésique, sépare le support de  $\nabla \chi^\gamma$  du point  $x_0$ . On peut donc trouver un ouvert  $\Omega_\gamma$ , tel que  $\bar{\Omega}_\gamma$  soit contenu dans  $K$  et dans le demi-espace contenant le support de  $\nabla \chi^\gamma$  de frontière  $F_\gamma$ , et tel que  $F_\gamma \cap \partial \Omega_\gamma$  soit un ouvert non vide de la frontière de  $\Omega_\gamma$ ,  $\partial \Omega_\gamma$ , contenant  $y$ .

L'ouvert  $\Omega_\gamma$  étant choisi de façon à ce que l'on ait

$$(2.10) \quad a_j(h, \gamma, 0) \approx a_j(h, \gamma, 0; \Omega_\gamma), \text{ avec}$$

$$a_j(h, \gamma, 0; \Omega_\gamma) := e^{i\theta\gamma} \langle [H^h; \chi^\gamma] u_j^\gamma | u_j^0 \rangle_{\Omega_\gamma} + e^{-i\theta\gamma} \langle u_j^0 | [H^h; \chi^\gamma] u_j^\gamma \rangle_{\Omega_\gamma},$$



Soit  $n^\gamma$  la normale à  $F_\gamma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega_\gamma$ . On a alors facilement, compte tenu de (2.5) et (2.10), que

$$(2.11) \quad a_j(h, \gamma, 0) \approx ih \left[ -e^{i\theta\gamma} \int_{F_\gamma} (p(n^\gamma) u_j^\gamma | u_j^0) ds + e^{-i\theta\gamma} \int_{F_\gamma} (u_j^0 | p(n^\gamma) u_j^\gamma) ds \right],$$

où  $ds$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $F_\gamma$ .

On peut donc écrire que

$$(2.12) \quad a_j(h, \gamma, 0) \approx 2h [\beta_j(h, \gamma) \cos(\theta\gamma) - \alpha_j(h, \gamma) \sin(\theta\gamma)],$$

avec  $\alpha_j(h, \gamma) + i\beta_j(h, \gamma) = \int_{F_\gamma} (p(n^\gamma) u_j^\gamma | u_j^0) ds.$

En utilisant les propriétés  $Jp(n^\gamma)J = p(n^\gamma)$  et  $u_2^\gamma = Ju_1^\gamma$ , on voit que

$$\alpha_2(h, \gamma) = -\alpha_1(h, \gamma) \text{ et } \beta_2(h, \gamma) = \beta_1(h, \gamma).$$

Comme  $u_j = (u_j^+, u_j^-)$ , avec  $u_j^-(x) = [\lambda(h) - V(x) + 1]^{-1} A(hD_x) u_j^+(x)$ ,

on a sur  $F_\gamma$ ,  $(p(n^\gamma) u_j^\gamma | u_j^0) = [\lambda(h) - V(x) + 1]^{-1} \times$

$$\{(A(n^\gamma) u_j^{+\gamma} | A(hD_x) u_j^+) + (A(hD_x) u_j^{+\gamma} | A(n^\gamma) u_j^+)\}.$$

Soit  $\mathcal{U}$  l'ouvert, ensemble des points  $x$  tels qu'il n'existe qu'une géodésique reliant  $x_0$  à  $x$ . Dans [WAN], voir aussi [MO-PA], on montre que la méthode B.K.W. fonctionne sur  $\mathcal{U}$ , i.e. il existe une suite de spineurs  $(u_{j,k}^+(x))_{k \geq 0}$ , telle que

$$u_j^+(x) \sim c(h) e^{-\varphi(x)/h} \sum_{k \geq 0} h^k u_{j,k}^+(x),$$

( $c(h)$  étant une constante de normalisation et  $\varphi(x) = d(x_0, x)$ ).

On peut choisir  $\Omega_\gamma$  de façon à ce que  $\gamma + \bar{\Omega}_\gamma \subset \mathcal{U}$  et  $\bar{\Omega}_\gamma \subset \mathcal{U}$ . Comme dans le cas du "splitting" étudié dans [MO-PA], on montre, en utilisant des estimations établies dans [HE-SJ]<sub>1,2</sub>, que  $a_j(h, \gamma, 0)$  admet un développement asymptotique

$$(2.13) \quad \alpha_j(h, \gamma) + i\beta_j(h, \gamma) \sim c^2(h) \delta(h) e^{-S_0/h} \sum_{k \geq 0} h^k z_{j,k}^\gamma, \text{ avec}$$

$$z_{j,0}^\gamma := -\frac{i}{2} \{ ([A(n^\gamma) u_{j,0}^+])^\gamma | A(\nabla\varphi) u_{j,0}^+ \} - \{ [A(\nabla\varphi) u_{j,0}^+]^\gamma | A(n^\gamma) u_{j,0}^+ \}_{x=y},$$

$$\text{et } \delta(h) := \int_{F_\gamma \cap \bar{\Omega}_\gamma} e^{-[d(x_0, x) + d(x_0, x - \gamma) - S_0]/h} ds.$$

Soient  $m^\gamma$  et  $k^\gamma$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\{n^\gamma, m^\gamma, k^\gamma\}$  soit une base orthonormée et directe. On écrit que

$$\nabla\phi(x) = \nabla d(x_0, x) = \phi_1(x)n^\gamma + \phi_2(x)m^\gamma + \phi_3(x)k^\gamma.$$

Comme  $d(x_0, x) + d(x_0, x - \gamma) = S_0$ ,  $\forall x \in g_{\gamma, 0}$ , et  $d(x_0, x) + d(x_0, x - \gamma) > S_0$ , si  $x \notin g_{\gamma, 0}$ , ( $x$  restant dans un petit voisinage de  $g_{\gamma, 0}$ ), on a

$$(2.14) \quad \phi_k(y) + \phi_k(y - \gamma) = 0, \text{ pour } k = 1, \dots, 3.$$

Mais  $A(\nabla\phi(x)) = \nabla\phi(x)\sigma$  est une matrice hermitienne, on a donc

$$z_{j,0}^\gamma = -\frac{i}{2}([\nabla\phi(y)\sigma](n^\gamma\sigma) - (n^\gamma\sigma)(\nabla\phi(y-\gamma)\sigma)]u_{j,0}^+(y-\gamma)|u_{j,0}^+(y)).$$

Par conséquent, en utilisant (2.14), on trouve

$$(2.15) \quad z_{j,0}^\gamma = -i\phi_1(y)(u_{j,0}^+(y-\gamma)|u_{j,0}^+(y)).$$

Mais  $y$  appartient à la géodésique  $g_{\gamma, 0}$  et  $y \neq x_0$ , comme  $n^\gamma$  est parallèle en  $y$  à cette géodésique et de direction, de  $\gamma$  vers  $x_0$ , on a donc

$$(2.16) \quad \phi_1(y) = n^\gamma \nabla d(x_0, x)|_{x=y} = -|\nabla\phi(y)| = -[1 - (V(y) - \mu)^2] < 0.$$

On remarque maintenant que  $u_{j,0}^+(x)$  est solution, (cf. [MO-PA]), de

$$Xv^+(x) + q(x)v^+(x) = 0, \text{ avec (par exemple) } v^+(x_0) = (1, 0):$$

$X$  est le champ de vecteur tangent à  $g_{\gamma, 0}$ ,  $X = 2\nabla\phi(x)\nabla$ , et

$$q(x) = \Delta\phi(x) + 2\rho_1(V(x) - \mu) - 2(\nabla V(x)|\nabla\phi(x)) - 2i[\nabla V(x) \times \nabla\phi(x)]\sigma,$$

( $\rho_1$  est celui du théorème (1.2) choisi tel que  $q(x_0) = 0$ ).

Mais on a  $\nabla V(x) \times \nabla\phi(x) = 0$ ,  $\forall x \in g_{\gamma, 0}$ .

En effet, si on prend par exemple  $x = y$ , en remarquant que  $\nabla\phi(y) = -|\nabla\phi(y)|n^\gamma$ , on a  $\nabla V(y) \times \nabla\phi(y) = |\nabla\phi(y)|(\nabla V(y)|m^\gamma)k^\gamma - |\nabla\phi(y)|(\nabla V(y)|k^\gamma)m^\gamma$ .

Comme  $|\nabla\phi(x)|^2 = 1 - (V(x) - \mu)^2$ ;

le terme  $|\nabla\phi(y)|(\nabla V(y)|m^\gamma)$  est un multiple de  $m^\gamma \nabla(|\nabla\phi(x)|^2/x=y)$ ,

et comme le champ de vecteur  $m^\gamma \nabla$  est tangent à la 'sphère d'Agmon'

$I_0 = \{x; d(x_0, x) = d(x_0, y)\}$ , on en déduit la nullité du terme considéré.

L'autre terme se traite de la même façon.

Il existe donc une fonction réelle et  $> 0$  sur  $g_{y,0}$ ,  $u_0^+(x)$  telle que

$$u_{1,0}^+(x) = (u_0^+(x), 0) \text{ et } u_{2,0}^+(x) = (0, iu_0^+(x)), \forall x \in g_{y,0}.$$

On en déduit alors facilement que

$$(2.17) \quad (u_{1,0}^+(x-\gamma) | u_{1,0}^+(x)) = (u_{2,0}^+(x-\gamma) | u_{2,0}^+(x)) > 0, \forall x \in g_{y,0}.$$

De plus, dans un petit voisinage de  $y$ , les ensembles  $I_0$  et

$I_\gamma = \{x; d(x_0, x-\gamma) = d(x_0, y-\gamma)\}$  sont deux sous-variétés ayant un unique point

commun,  $y$ , et l'hyperplan  $F_\gamma$  comme tangente commune en  $y$ . Dans la formule

(2.13) on aurait pu faire le raisonnement en remplaçant  $F_\gamma$  par  $I_\gamma$ , comme

$d(x_0, x) + d(x_0, x-\gamma)$  admet sur  $I_\gamma$  en  $y$  un minimum non dégénéré, (pour s'en

convaincre il suffit de voir que dans le voisinage de  $x_0$ ,  $Q_{x_0}$ , on peut trouver un

système de coordonnées  $\{v_1, v_2, v_3\}$  tel que  $d(x_0, x) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$  et

$v(x) = (v_1, v_2, v_3)$  soit normal à  $I_0$ , ceci si  $\varepsilon_0$  est assez petit). On a donc sur  $F_\gamma$ ,

$d(x_0, x) + d(x_0, x-\gamma) - S_0$  qui admet un minimum nul et non dégénéré en  $y$ , par

conséquent, on a dans (2.13),

$$(2.18) \quad \delta(h) \sim h \sum_{k \geq 0} h^k \delta_k, \text{ avec } \delta_0 > 0,$$

de plus on a

$$(2.19) \quad c(h) \sim h^{-n/4} \sum_{k \geq 0} h^k c_k, \text{ avec } c_0 > 0.$$

Les propriétés (2.12), (2.13), (2.16) – (2.19) montrent aisément que

$$(2.20) \quad a_j(h) = h^{2 - \frac{n}{2} - S_0/h} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} [\beta(h, \gamma) \cos(\theta\gamma) \mp \alpha(h, \gamma) \sin(\theta\gamma)],$$

le signe  $-$  étant relatif à  $j=1$  et le  $+$  à  $j=2$ ;  $\mathcal{G}$  désigne l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tel qu'il existe une géodésique entre  $\gamma$  et  $0$  de longueur  $S_0$ .

Les  $\alpha(h, \gamma)$  et  $\beta(h, \gamma)$  de (2.20) vérifient les propriétés suivantes:

$$(2.21) \quad \alpha(h, \gamma) \sim \sum_{k \geq 0} h^k \alpha_k(\gamma) \text{ et } \beta(h, \gamma) \sim \sum_{k \geq 0} h^k \beta_k(\gamma),$$

avec  $\beta_0(\gamma) < 0$ , pour tout  $\gamma \in \mathcal{G}$ .

Le terme  $b(h)$  se traite de la même façon. On utilise les propriétés  $u_2 = Ju_1$  et  $p(\xi)J = -Jp(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}^3$ , pour établir que

$$(2.22) \quad b(h) = -i \sum_{\gamma, \rho \in \mathcal{F}} \delta i \pi(\theta(\gamma - \rho)) \langle \chi^\rho u_2^\rho | [H^h; \chi^\gamma] u_1^\gamma \rangle.$$

On en déduit alors facilement que

$$(2.23) \quad b(h) \approx h \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \delta i \pi(\theta \gamma) \int_{F_\gamma} (u_2^0 | p(n^\gamma) u_1^\gamma) ds.$$

Quand on écrit que  $u_1^\gamma(x) = c(h) e^{-\varphi(x)/h} v^h(x)$ , avec  $v^h(x) \sim \sum_{k \geq 0} h^k u_{1,k}^+(x)$ , on obtient que, pour un  $\gamma \in \mathcal{G}$  fixé, on a

$$(u_2^0(x) | p(n^\gamma) u_1^\gamma(x)) = c^2(h) e^{-(\varphi(x) + \varphi(x-\gamma))/h} w^h(x),$$

$$\text{avec } w^h = -(\sigma_2 \bar{v}^h | (n^\gamma \sigma)(\nabla \varphi^\gamma \sigma)(v^h)^\gamma) - (\sigma_2(\nabla \varphi \bar{\sigma}) \bar{v}^h | (n^\gamma \sigma)(v^h)^\gamma) + \mathcal{O}(h).$$

On utilise alors l'égalité  $(n^\gamma \sigma) \sigma_2(\nabla \varphi(x) \bar{\sigma}) = -(n^\gamma \sigma)(\nabla \varphi(x) \sigma) \sigma_2$ ,

pour voir que  $w^h = (\varphi_1 - \varphi_1^\gamma)(\sigma_2 \bar{v}^h | (v^h)^\gamma) +$

$$i(\varphi_2 + \varphi_2^\gamma)((m^\gamma \sigma) \sigma_2 \bar{v}^h | (v^h)^\gamma) - i(\varphi_3 + \varphi_3^\gamma)((k^\gamma \sigma) \sigma_2 \bar{v}^h | (v^h)^\gamma) + \mathcal{O}(h).$$

En utilisant les propriétés sur le premier terme du développement asymptotique de  $v^h$ , on trouve facilement que le premier terme de celui de  $w^h$  est nul sur la géodésique:  $w^h(y) = \mathcal{O}(h)$ . On déduit alors facilement de (2.23) que

$$(2.24) \quad b(h) = h e^{3-\frac{n}{2} - S_0/h} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \rho(h, \gamma) \delta i \pi(\theta \gamma),$$

et que les  $\rho(h, \gamma)$  ont un développement asymptotique de la forme

$$(2.25) \quad \rho(h, \gamma) \sim \sum_{k \geq 0} h^k \rho_k(\gamma).$$

Les propriétés (2.6), (2.20), (2.21), (2.24) et (2.25) montrent que les deux premières valeurs propres  $> \mu^+$  de  $H^{h,\theta}$  vérifient

$$(2.26) \quad \lambda_j(h, \theta) = \lambda(h) + h^{(4-n)/2} e^{-S_0/h} [v(h, \theta) \mp h \delta(h, \theta)] + \mathcal{O}(e^{-(S_0 + \eta_0^j)/h}),$$

avec  $v(h, \theta) = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \beta(h, \gamma) c \sigma \delta(\theta \gamma)$  et

$$\delta(h, \theta) = [(\sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \alpha(h, \gamma) \delta i \pi(\theta \gamma))^2 + (\sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \rho(h, \gamma) \delta i \pi(\theta \gamma))^2]^{1/2};$$

(le signe - étant relatif à  $j=1$  et le + à  $j=2$ ).

Le théorème est donc démontré, quand  $n=3$ .

Dans le cas où  $n=2$  ou  $n=1$ , la démonstration est plus simple du fait que la matrice  $M(\theta)$  dans (2.5) est d'ordre un, l'indice  $j$  ne prend pour valeur que 1, la méthode BK.W. fonctionne aussi dans ce cas et beaucoup plus simplement.

**Remarque (2.1):** Si  $n=3$  et si  $V(x)$  est paire, i.e.  $V(x)=V(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ , alors les valeurs propres de  $H^{h,\theta}$  sont de multiplicité paire.

Si  $V(x)$  est impaire, i.e.  $V(x)=-V(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , ( $n=1,2$  ou  $3$ ),

alors le spectre de  $H^h$  est symétrique par rapport à l'origine,

$$\lambda \in \text{sp}(H^h) \Rightarrow -\lambda \in \text{sp}(H^h).$$

Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que, si  $V$  est paire,  $H^{h,\theta} \mathcal{A} = \mathcal{A} H^{h,\theta}$ , où  $\mathcal{A}$  est l'isométrie anti-linéaire  $\mathcal{A}u(x) = (\sigma_2 \bar{u}^+(-x), -\sigma_2 \bar{u}^-(-x))$ ,  $\forall u \in \mathcal{H}$ .

Si  $V$  est impaire,  $(H_0^h + V) \mathcal{A} = \mathcal{A} (H_0^h - V)$ ,

comme on a vu que  $-(H_0^h - V)$  et  $H_0^h + V$  sont unitairement équivalents, on retrouve la propriété énoncée.

### III) Etude de la multiplicité du niveau fondamental

Dans toute la suite  $V(x)$  sera un potentiel  $C^\infty$  et  $\Gamma$ -périodique,

$$(3.1) \quad V(x) = \sum_{\omega \in \Gamma} v_\omega e^{i\omega x}, \text{ avec } v_{-\omega} = \bar{v}_\omega \text{ et } v_0 = 0.$$

Pour tout  $(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , on notera  $(\lambda_k(\theta, \tau))_{k \in \mathbb{Z}^*}$  la suite des valeurs propres de l'opérateur  $H_\tau^{h,\theta} = H_0^{h,\theta} + \tau V \mathbb{1}$  défini sur  $L^2(\mathbb{R}^n / \Gamma; \mathbb{C}^{2m})$ .

**Théorème (3.1)** S'il existe  $\rho$  et  $\gamma$  dans  $\Gamma^* \setminus \{0\}$  tels que

$$(3.2) \quad \text{Im}(\bar{v}_{\rho+\gamma} v_\rho v_\gamma) \neq 0,$$

alors l'ensemble des  $(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , tel que toutes les valeurs propres de l'opérateur  $H_\tau^{h,\theta}$  soient simples, est dense dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

**Preuve.** On va faire la démonstration dans le cas  $n=3$ .

Soit  $\theta \in \mathbb{R}^n$  fixé et vérifiant

$$(3.3) \quad |\omega - \theta| \neq |\delta - \theta|, \quad \forall \omega \text{ et } \delta \in \Gamma^*, \omega \neq \delta.$$

Les valeurs propres de  $H_0^{h,\theta}$  sont  $(\pm\mu_\omega)_{\omega \in \Gamma^*}$ ,

$$(3.4) \quad \mu_\omega = (1 + h^2 |\omega - \theta|^2)^{1/2},$$

chaque valeur propre  $\pm\mu_\omega$  est de multiplicité deux,

$$(3.5) \quad \dim(\text{Ker}(H_0^{h,\theta} \pm \mu_\omega \mathbf{1})) = 2.$$

Pour simplifier les notations, on omettra la référence à  $h$  et  $\theta$ , on écrira  $H_\tau$  au lieu de  $H_\tau^{h,\theta}$ :  $H_\tau = H_\tau^{h,\theta}$ .

On va considérer  $H_\tau$  comme une perturbation de  $H_0$ . On considère  $\omega \in \Gamma^*$  fixé. On a

$$(3.6) \quad \text{Ker}(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1}) = \text{Vect}\{e^{i\omega x} \varphi_\omega, e^{i\omega x} J(\varphi_\omega)\},$$

$$\text{où } \varphi_\omega = v_\omega \begin{pmatrix} e \\ hv'_\omega (\omega - \theta) \sigma e \end{pmatrix}, \quad v'_\omega = \frac{1}{1 + \mu_\omega} \text{ et } v_\omega = \frac{\sqrt{1 + \mu_\omega}}{\sqrt{2\mu_\omega}}, \text{ on prend } e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On remarque que } \text{Ker}(H_0 + \mu_\omega \mathbf{1}) = T(\text{Ker}(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})), \text{ si } T \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^- \\ -x^+ \end{pmatrix};$$

$\{\varphi_\omega, J\varphi_\omega, T\varphi_\omega, TJ\varphi_\omega\}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^4$ .

Soit  $\Pi_\omega$  la projection orthogonale sur  $\text{Ker}(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})$ .

Si on veut appliquer les théorèmes de perturbation établis dans [MO-PA] à la valeur propre double  $\mu_\omega$ , et savoir si elle éclate en deux valeurs propres simples, il suffirait pour cela que  $\Pi_\omega V \Pi_\omega$  ou que  $\Pi_\omega V (H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} (1 - \Pi_\omega) V \Pi_\omega$  admette deux valeurs propres simples. Un calcul élémentaire montre que

$$(3.7) \quad \Pi_\omega V \Pi_\omega = 0 \text{ et } \Pi_\omega V (H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} V \Pi_\omega = \sum_\gamma |v_\gamma|^2 \left( \frac{\delta^-(\omega, \gamma)}{\mu_{\omega+\gamma} - \mu_\omega} + \frac{\delta^+(\omega, \gamma)}{\mu_{\omega+\gamma} + \mu_\omega} \right) \Pi_\omega,$$

avec  $\delta^-(\omega, \gamma) = 2(|(J\varphi_\omega | \varphi_{\omega+\gamma})|^2 + |(\varphi_\omega | \varphi_{\omega+\gamma})|^2)$  et

$$\delta^+(\omega, \gamma) = -2(|(T\varphi_\omega | \varphi_{\omega+\gamma})|^2 + |(T\varphi_\omega | J\varphi_{\omega+\gamma})|^2).$$

On ne peut donc pas appliquer les théorèmes de [MO-PA]; on poursuit tout de

même leur méthode à un cran supplémentaire. On est ramené à chercher à savoir si l'opérateur

$$(3.8) \quad R_\omega = \Pi_\omega V(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} (1 - \Pi_\omega) V(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} V \Pi_\omega$$

admet deux valeurs propres simples.

La matrice de  $R_\omega$  dans la base orthonormée  $\{e^{i\omega x} \varphi_\omega, e^{i\omega x} J(\varphi_\omega)\}$  est hermitienne et a ses éléments diagonaux qui sont égaux,

$$(3.9) \quad a_\omega = a_\omega(\theta) := \langle R_\omega(e^{i\omega x} \varphi_\omega) | e^{i\omega x} \varphi_\omega \rangle = \langle R_\omega(e^{i\omega x} J(\varphi_\omega)) | e^{i\omega x} J(\varphi_\omega) \rangle;$$

pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que  $H_0$  commute avec la transformation unitaire  $u(x) \rightarrow J(u)(-x)$  et, le fait de remplacer  $V(x)$  par  $V(-x)$  revient à prendre le conjugué du terme à calculer qui est ici réel.

Notons

$$(3.9') \quad b_\omega = b_\omega(\theta) := \langle R_\omega(e^{i\omega x} \varphi_\omega) | e^{i\omega x} J(\varphi_\omega) \rangle.$$

Si  $b_\omega \neq 0$ , alors  $R_\omega$  a deux valeurs propres simples  $\mu_{\omega,3}^-$  et  $\mu_{\omega,3}^+$  telles que

$$\mu_{\omega,3}^+ - \mu_{\omega,3}^- = 2|b_\omega|.$$

Soient  $u_{\omega,0}^\pm$  les vecteurs propres associés choisis tels qu'ils forment une base orthonormée de  $\text{Ker}(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})$ .

$$\text{On considère les spineurs } u_{\omega}^{\pm, \tau} = \sum_{j=0}^3 \tau^j u_{\omega, j}^\pm$$

$$\text{et le réel } \mu_{\omega}^{\pm, \tau} = \sum_{j=0}^3 \tau^j \mu_{\omega, j}^\pm.$$

Les réels  $\mu_{\omega, j}^\pm$  sont définis par:  $\mu_{\omega, 0}^\pm = \mu_\omega$ ,  $\mu_{\omega, 1}^\pm = 0$ ,  $\mu_{\omega, 2}^\pm = \mu_{\omega, 2}$  est le réel vérifiant

$$\Pi_\omega V(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} V \Pi_\omega = -\mu_{\omega, 2} \Pi_\omega,$$

et les  $\mu_{\omega, 3}^\pm$  sont les deux valeurs propres distinctes de  $R_\omega$ .

On définit les spineurs  $u_{\omega, j}^\pm$  de la façon suivante:

les  $u_{\omega, 0}^\pm$  sont les vecteurs propres définis ci-dessus,

$$u_{\omega, 1}^\pm = -(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} V u_{\omega, 0}^\pm,$$

$$u_{\omega, 2}^\pm = (H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} [V(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} V + \mu_{\omega, 2} \mathbf{1}](u_{\omega, 0}^\pm)$$

$$\text{et, } u_{\omega, 3}^\pm = -(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} \{V(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} [V(H_0 - \mu_\omega \mathbf{1})^{-1} V + \mu_{\omega, 2} \mathbf{1}] - \mu_{\omega, 3}^\pm \mathbf{1}\}(u_{\omega, 0}^\pm).$$

On vérifie facilement que l'on a

$\|u_{\omega}^{\pm, \tau}\| - 1 = \mathcal{O}(\tau)$ ,  $\langle u_{\omega}^{+, \tau} | u_{\omega}^{-, \tau} \rangle = \mathcal{O}(\tau)$  et  $(H_{\tau} - \mu_{\omega}^{\pm, \tau} \mathbf{1})(u_{\omega}^{\pm, \tau}) = \mathcal{O}(\tau^4)$ ,  
 ceci quand  $\tau \rightarrow 0$ .

Par conséquent, si  $b_{\omega}(\theta) \neq 0$ , il existera  $\varepsilon_{\omega}(\theta) > 0$ , tel que, pour tout  $\tau$ ,  $|\tau| \leq \varepsilon_{\omega}(\theta)$ ,  
 $\tau \neq 0$ , on ait la valeur propre double,  $\mu_{\omega}$ , de  $H_0$  qui éclate en deux valeurs  
 propres simples,  $\lambda_{\omega}^{\pm, \tau}$ , pour  $H_{\tau}$ , telles que  $\lambda_{\omega}^{+, \tau} - \lambda_{\omega}^{-, \tau} = 2\tau^3 |b_{\omega}(\theta)| + \mathcal{O}(\tau^4)$ .

Etude de  $b_{\omega}(\theta)$  de (3.9')

Notons  $\pi_{\omega}$  la projection orthogonale de  $\mathbb{C}^4$  sur  $\text{Vect}\{\varphi_{\omega}\}$  et,  $\hat{\pi}_{\omega}$  celle sur  
 $\text{Vect}\{J(\varphi_{\omega})\}$ . On a  $\hat{\pi}_{\omega} = -J\pi_{\omega}J$ .

L'opérateur  $R_{\omega}$  peut être considéré comme un opérateur  $\hat{R}_{\omega}$  sur  $\mathbb{C}^4$ ,

$$\hat{R}_{\omega} = (\pi_{\omega} \oplus \hat{\pi}_{\omega}) \left( \sum_{j=1}^4 R_{\omega, j} \right) (\pi_{\omega} \oplus \hat{\pi}_{\omega}),$$

avec

$$R_{\omega, 1} = \sum_{\rho, \gamma} \frac{\overline{V}_{\rho+\gamma} V_{\rho} V_{\gamma}}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma} - \mu_{\omega})(\mu_{\omega+\rho} - \mu_{\omega})} (\pi_{\omega+\rho+\gamma} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho+\gamma}) (\pi_{\omega+\rho} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho}),$$

$$R_{\omega, 2} = \sum_{\rho, \gamma} \frac{\overline{V}_{\rho+\gamma} V_{\rho} V_{\gamma}}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma} - \mu_{\omega})(\mu_{\omega+\rho} + \mu_{\omega})} (\pi_{\omega+\rho+\gamma} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho+\gamma}) T (\pi_{\omega+\rho} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho}) T,$$

$$R_{\omega, 3} = \sum_{\rho, \gamma} \frac{\overline{V}_{\rho+\gamma} V_{\rho} V_{\gamma}}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma} + \mu_{\omega})(\mu_{\omega+\rho} - \mu_{\omega})} T (\pi_{\omega+\rho+\gamma} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho+\gamma}) T (\pi_{\omega+\rho} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho})$$

$$\text{et } R_{\omega, 4} = \sum_{\rho, \gamma} \frac{\overline{V}_{\rho+\gamma} V_{\rho} V_{\gamma}}{(\mu_{\omega+\rho+\gamma} + \mu_{\omega})(\mu_{\omega+\rho} + \mu_{\omega})} T (\pi_{\omega+\rho+\gamma} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho+\gamma}) T^2 (\pi_{\omega+\rho} \oplus \hat{\pi}_{\omega+\rho}) T ;$$

on a pris la convention de ne considérer dans la somme que les termes donnant  
 lieu à un coefficient de fourier de  $V(x)$  non nul, i.e. seuls le  $\rho$  et  $\gamma$  tels que  $\gamma \neq 0$ ,  
 $\rho \neq 0$  et  $\rho + \gamma \neq 0$  sont à considérer, (remarquer que  $v_0 = 0$  et que  $T^2 = -1$ ).

On trouve alors que

$$(3.10) \quad b_{\omega} = b_{\omega}(\theta) := \langle R_{\omega} (e^{i\omega x} \varphi_{\omega}) | e^{i\omega x} J(\varphi_{\omega}) \rangle = \sum_{\rho, \gamma} \overline{v}_{\rho+\gamma} v_{\rho} v_{\gamma} b_{\omega}(\rho, \rho+\gamma, \theta),$$



$$\text{avec } b_{\omega}(\rho, \rho + \gamma, \theta) = \sum_{j, k \in \{1, 2\}} b_{\omega, j, k}(\rho, \rho + \gamma, \theta) [\mu_{\omega + \rho + \gamma}(\theta) + (-1)^j \mu_{\omega}(\theta)]^{-1} \times \\ [\mu_{\omega + \rho}(\theta) + (-1)^k \mu_{\omega}(\theta)]^{-1}.$$

On omettra la référence à  $\theta$ . On utilise les propriétés suivantes,

$$J^2 = -1, T^2 = -1, TJ = JT \text{ et } (x|Jy) = -(y|Jx),$$

et on trouve les expressions ci-dessous des  $b_{\omega, j, k}(\rho, \rho + \gamma)$ :

$$b_{\omega, 1, 1}(\rho, \rho + \gamma) = (\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega + \rho} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | J\varphi_{\omega}) - \\ (\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | J\varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}) - \\ (\varphi_{\omega + \rho} | J\varphi_{\omega})(J\varphi_{\omega + \rho} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | J\varphi_{\omega}) - \\ (\varphi_{\omega + \rho} | J\varphi_{\omega})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | \varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}),$$

$$b_{\omega, 1, 2}(\rho, \rho + \gamma) = (T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | J\varphi_{\omega})(T\varphi_{\omega + \rho} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}) - \\ (\varphi_{\omega + \rho} | TJ\varphi_{\omega})(\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | T\varphi_{\omega + \rho}) - \\ (T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | TJ\varphi_{\omega + \rho}) - \\ (\varphi_{\omega + \rho} | TJ\varphi_{\omega})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | J\varphi_{\omega})(TJ\varphi_{\omega + \rho} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}),$$

$$b_{\omega, 2, 1}(\rho, \rho + \gamma) = -(\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | TJ\varphi_{\omega})(T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}) + \\ (\varphi_{\omega + \rho} | J\varphi_{\omega})(T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | T\varphi_{\omega + \rho}) + \\ (\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | TJ\varphi_{\omega + \rho}) - \\ (\varphi_{\omega} | J\varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | TJ\varphi_{\omega})(TJ\varphi_{\omega + \rho} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}),$$

et

$$b_{\omega, 2, 2}(\rho, \rho + \gamma) = (T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | TJ\varphi_{\omega})(\varphi_{\omega + \rho} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}) - \\ (\varphi_{\omega + \rho} | TJ\varphi_{\omega})(T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | \varphi_{\omega + \rho}) + \\ (T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho})(T\varphi_{\omega} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma})(\varphi_{\omega + \rho} | J\varphi_{\omega + \rho + \gamma}) + \\ (\varphi_{\omega + \rho} | TJ\varphi_{\omega})(\varphi_{\omega + \rho + \gamma} | TJ\varphi_{\omega})(J\varphi_{\omega + \rho} | \varphi_{\omega + \rho + \gamma}).$$

On vérifie facilement que, pour tout  $\rho, \gamma, j$  et  $k$ , on a

$$(3.11) \quad b_{\omega, j, k}(\rho, \rho + \gamma) = -b_{\omega, k, j}(\rho + \gamma, \rho).$$

Les égalités (3.10) et (3.11) montrent que

$$(3.12) \quad \{V(x) = V(-x), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \Rightarrow \{b_{\omega} = 0, \forall \omega \in \Gamma^*\},$$

et que les  $b_{\omega}$  sont imaginaires,

$$(3.13) \quad b_{\omega} = -\bar{b}_{\omega}, \quad \forall \omega \in \Gamma^*.$$

Remarquons que, pour tout  $\rho$  et  $\gamma \in \Gamma^* \setminus \{0\}$  tels que  $\rho + \gamma \neq 0$ ,

$$(3.14) \quad \{ \theta \rightarrow b_\omega(\rho, \rho + \gamma, \theta) \text{ est analytique et non identiquement nul} \}.$$

La dépendance analytique en  $\tau$  de  $H_\tau^{h\theta}$  entraîne la dépendance analytique en  $\tau$  de toute valeur propre simple de  $H_\tau^{h\theta}$ , le théorème (3.1) se déduit alors aisément du fait que (3.14) et (3.2) entraînent que, pour tout  $\omega \in \Gamma^*$  fixé, la fonction

$\theta \rightarrow b_\omega(\theta)$  est analytique en dehors d'un nombre fini de points et elle est non identiquement nulle ■

**Exemple (3.2)** Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ ,

$$v_\nu(t) = -c \cos(t) + 3\nu \sin(t) - c \cos(2t) - \nu \sin(3t),$$

avec  $0 < |\nu| < \frac{1}{4}$ . La fonction  $v_\nu(t)$  admet un minimum non dégénéré aux points  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Soit le potentiel défini sur  $\mathbb{R}^3$ ,

$$V(x) = \varepsilon_1 v_{\nu_1}(x_1) + \varepsilon_2 v_{\nu_2}(x_2) + \varepsilon_3 v_{\nu_3}(x_3),$$

où les  $\nu_j$  sont des réels donnés vérifiant  $0 < |\nu_j| < \frac{1}{4}$ ,  $j=1, \dots, 3$ ,

et les  $\varepsilon_j$  sont des réels,  $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{8}$ , donnés.

Le potentiel  $V(x)$  est  $\Gamma$ -périodique, si  $\Gamma = 2\pi\mathbb{Z}^3$ , et admet un minimum non dégénéré aux points du réseau  $\Gamma$ , si les  $\varepsilon_j$  sont assez petits, on aura (1.4).

Si on a  $\varepsilon_j < \varepsilon_1$ , pour  $j=2$  et  $j=3$ , il existe une unique géodésique minimale, pour la métrique d'Agmon  $W^+(x)dx^2$ .

Si  $(\lambda_k(\theta))_k$  est la suite des valeurs propres de  $H^{h,\theta} = h\alpha(D - \theta) + \beta + V(x)\mathbb{1}$ , alors, pour presque tout  $\theta \in (]0, \frac{1}{2}[)^3$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , il existe une suite  $(h_j)_j$ ,  $0 < h_j < 1$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ , et  $h_j \rightarrow 0$ , quand  $j \rightarrow +\infty$ , telle que  $\lambda_k(h_j, \theta)$  soit une valeur propre simple pour tout  $j$ .

---

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, pour tout  $\omega \in \mathbb{Z}^3$  et pour presque tout  $\theta \in \mathbb{R}^3 \setminus (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3$ ,  $b_\omega(\theta)$  défini par (3.9') et donné par (3.10),

n'est pas nul. En suivant la démonstration du théorème (3.1), on vérifie facilement que, pour presque tout  $\theta \in \mathbb{R}^3 \setminus (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3$ , pour tout  $h > 0$  fixé et pour tout  $m > 0$  fixé, les valeurs propres,  $(\lambda_j(h, \theta, m, \tau))_j$ , de  $H_{\tau, m}^{h, \theta} = h\alpha(D - \theta) + m\beta + \tau V(x)\mathbb{1}$ , ( $\tau \in \mathbb{R}$ ), sont simples, sauf pour un nombre dénombrable de  $\tau$ . La dépendance analytique en  $m$  montre que  $\lambda_k(h, \theta, m, \tau)$  est simple sauf pour un ensemble dénombrable de  $(m, \tau)$ . En prenant  $m = \tau$ , on voit que  $\lambda_k(\frac{h}{\tau}, \theta)$  est simple sauf pour un ensemble dénombrable de  $\tau$  ■

Remarquons que, si  $V(x)$  n'est pas paire, une question intéressante reste toujours sans réponse, à savoir si le terme  $\delta(h, \theta)$  dans (2.26) n'est pas nul.

#### **IV) Cas d'un potentiel de type Coulombien**

On considère ici seulement le cas  $n = 3$ , et on suppose que le potentiel  $V(x)$  est toujours périodique mais indéfiniment dérivable, seulement sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ , et que

$$(4.1) \quad V(x) = c_0(x) + \frac{c_1(x)}{|x|}, \text{ pour tout } x \text{ tel que } |x| \text{ soit assez petit,}$$

les  $c_j(x)$  étant des fonctions  $C^\infty$  dans un petit voisinage de l'origine et telles que

$$(4.2) \quad -\frac{1}{2} < c_1(0) < 0 \text{ et } \nabla c_1(0) = 0.$$

On vérifie alors aisément, comme dans [MO-PA], que l'opérateur

$$(4.3) \quad P^h := H_0^h + hV(x)\mathbb{1},$$

est essentiellement auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$  à partir des spineurs indéfiniment dérivables et à support compact.

Si on note toujours  $P^h$  la réalisation auto-adjointe, la théorie de Floquet montre que son spectre est constitué de bandes, comme dans le cas  $C^\infty$ .

**Théorème (4.1)** *Sous les hypothèses (4.1) – (4.3) ci-dessus, il existe  $C > 0$  tel que, si  $h_0 > 0$  est choisi assez petit, les propriétés ci-dessous soient satisfaites pour tout  $h$ ,  $0 < h < h_0$ .*

$$(4.4) \quad \text{sp}(P^h) \cap ]-1 - h\ell_n(h)C, 0] = \emptyset.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, il existe un entier  $N$ , et une constante  $C$ , ne dépendant que de  $\varepsilon$ , tel que

$$(4.5) \quad \text{sp}(P^h) \cap ]0, 1 - \varepsilon[ = \bigcup_{k=1}^N b_k(h), \quad b_k(h) \subset [h\ell_n(h)C + e_k, e_k - h\ell_n(h)C],$$

où les  $b_k(h)$  sont des intervalles fermés,  $b_k(h) = [b_k^-(h), b_k^+(h)]$ , et  $(e_k)_{k>0}$  est la suite croissante des valeurs propres dans  $] -1, 1[$  de l'opérateur de Dirac

$$H_0^1 + c_1(0)|x|^{-1} \mathbb{1}, \text{ sur } \mathcal{E}.$$

De plus on a

$$(4.6) \quad b_1(h) \cup b_2(h) = [r_-(h) + \lambda_D(h), \lambda_D(h) + r_+(h)],$$

$\lambda_D(h)$  étant la plus petite valeur propre positive d'un problème de Dirichlet sur un ouvert  $\Omega$  contenant la cellule  $\bar{K}$  et de fermeture ne rencontrant pas  $\Gamma \setminus \{0\}$ .

La longueur de cette double bande admet le comportement asymptotique suivant

$$(4.7) \quad r_+(h) - r_-(h) = \delta h^{1-2\lambda_0} e^{-\tau S_0/h} (1 + \mathcal{O}(h)),$$

avec  $\delta > 0$  indépendant de  $h$ ,

$$(\lambda_0 = (1 - \tau^2)^{1/2}, \tau = -c_1(0) \text{ et } S_0 = \text{Inf}\{|\gamma|; \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}\}).$$

La démonstration de (4.4) et (4.5) résulte aisément de la localisation des valeurs propres faites dans [MO-PA], et (4.7) se démontre comme le théorème (1.2), (ici  $d(x_0, x) = |x - x_0|$  et la phase  $\varphi(x) = \tau d(x_0, x)$ ), et le Lemme (3.6) de [MO-PA] permet de pallier l'absence de développement B.K.W. complet pour les vecteurs propres du problème de Dirichlet.

### Références

- [COL] Y. Colin de Verdière, "Sur les singularités de Van Hove génériques"  
Bulletin S.M.F., Mémoire n°46, tome 119, fascicule 2, 1991, p.99-109.
- [HE-SJ] B. Helffer, J. Sjöstrand  
[1] "Multiple wells in the semi-classical limit I",  
Comm. Part. Diff. Equ., 9(4), 1984, p.337-408  
[2] "Puits multiples en limite semi-classique II. Symétries. Perturbation.",  
Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 42(2), 1985, p.127-212.
- [KNA] A. Knauf, "Coulombic periodic potentials. The quantum case"  
Annals of Physics, 191, 1989, p.205-240.
- [MOH] A. Mohamed, "Estimations semi-classiques pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel de type Coulombien et avec champ magnétique"  
Asymptotic Analysis, 69, 1991, p.1-21.
- [MO-PA] A. Mohamed, B. Parisse, "Approximation des valeurs propres de certaines perturbations singulières et application à l'opérateur de Dirac",  
Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 56,(3), 1992, p.235-277.
- [OUT] A. Outassourt,  
[1] "Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique", J. Funct. Anal. 72, 1987, p.65-93.  
[2] "Effet tunnel pour les opérateurs de Schrödinger et Dirac à potentiel périodique", Thèse, Université de Nantes, 1986.
- [SIM] B. Simon,  
[1] "Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I. Non-degenerate minima: Asymptotic expansions",  
Ann. Inst. Poincaré, 38(3), 1983, p.295-307.  
[2] "Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solids",  
Ann. of phys. 158(2), 1984, p.415-42
- [WAN] X.P. Wang, "Puits multiples pour l'opérateur de Dirac"  
Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 43(3), 1985, p.269-319.