Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 72 (1999)

Heft: 2

Artikel: Densité intégrée d'états surfaciques et fonction généralisée de déplacement spectral pour un opérateur de Schrödinger surfacique ergodique

Autor: Chahrour, Ayham

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-117170

Helv. Phys. Acta 72 (1999) 93 – 122
0018-0238/99/020093-30 $ 1.50+0.20/0

Helvetica Physica Acta

Densité intégrée d'états surfaciques et fonction généralisée de déplacement spectral pour un opérateur de Schrödinger surfacique ergodique

par

Ayham Chahrour

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Physique mathématique et Géométrie, Université Paris 7, case 7012, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05

(30.IX.1998)

Abstract.

In this paper we study the integrated density of surface states of a Schrödinger operator with an ergodic surface potential. We also introduce another generalised function similar to the spectral shift function known in the scattering theory. We show that these two quantities exist and coincide. We also study certain properties: their relation with the spectrum, smoothness, asymptotic behavior.

Résumé.

Dans ce texte nous étudions la densité intégrée d'états surfaciques d'un opérateur de Schrödinger avec potentiel surfacique ergodique. Nous introduisons en outre une fonction généralisée analogue à la fonction de déplacement spectral en théorie de la diffusion. Nous établissons l'existence de ces deux quantités et nous montrons qu'elles coïncident. Nous montrons aussi certaines de leurs propriétés: leur relation avec le spectre, la régularité, le comportement asymptotique.

1 Introduction

Dans la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger (continu ou discret), il y a deux classes d'opérateurs qui ont été très étudiées. La première classe est celle des opérateurs dont le potentiel est décroissant à l'infini. C'est la théorie de la diffusion. L'une des notions importantes de cette théorie est la fonction de déplacement spectral. Elle a été introduite par I.Lifchitz [18] et M.Krein [17] et on l'a beaucoup étudiée par la suite (voir e.g. [5, 22] pour des résultats et des références). La seconde classe est formée des opérateurs dont le potentiel est homogène dans l'espace, e.g. périodique, presque-périodique ou aléatoire ergodique (voir [19, 6]). Dans ce cas il y a une caractéristique spectrale importante. C'est la densité d'états intégrée.

Dans ce travail nous étudions un cas discret intermédiaire, où le potentiel est un champ aléatoire ergodique porté par un sous-espace propre $\mathbb{Z}^{d_2}$ de l'espace tout entier $\mathbb{Z}^d$ sur lequel l'opérateur de Schrödinger est défini. Il s'agit de l'opérateur

$$H = H^0 + V, \tag{1.1}$$

$$V(X) = \delta(x)v(\xi), \tag{1.2}$$

autrement dit, pour tout $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$,

$$(H\psi)(X) = \sum_{\substack{Y \in \mathbb{Z}^d \\ |X-Y|=1}} \psi(Y) + \delta(x)v(\xi)\psi(X), \tag{1.3}$$

où

$$\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} = \{X = (x, \xi) \mid x \in \mathbb{Z}^{d_1},\ \xi \in \mathbb{Z}^{d_2}\}, \tag{1.4}$$

où $\delta(x)$ est le symbole de Kronecker, et où $\{v(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{Z}^{d_2}}$ est un champ ergodique sur $\mathbb{Z}^{d_2}$.

En fait il s'agit là d'une situation particulière qu'on rencontre dans la théorie de l'état solide et dans la théorie de l a propagation des ondes lorsqu'on a deux milieux homogènes séparés par un plan ou, plus généralement, lorsqu'on a une inhomogénéité de dimension d_2 dans un milieu de dimension d. On peut considérer que le cas $d = 3$, $d_2 = 2$ modélise une feuille fine, ondulée de façon périodique, ou aléatoire, selon que le potentiel $v(\xi)$ est périodique, ou aléatoire. On peut regarder le cas $d = 3$, $d_2 = 1$ comme le modèle d'une dislocation linéaire, ou d'un polymère. On peut enfin voir le cas $d = 2$, $d_2 = 1$, $v(\xi)$ périodique, comme le modèle d'un interféromètre linéaire. Dans tous ces cas, on se trouve en présence d'oscillations spéciales du milieu, qui apparaissent déjà dans le cas le plus simple où $v(\xi)$ est constant. On les appelle "ondes surfaciques" ou "ondes linéaires". Elles traduisent la contribution de la surface, ou de la droite, de séparation aux propriétés thermodynamiques, optiques, et cinétiques du milieu. Ces oscillations ne se propagent pas dans la direction x transverse à l'inhomogénéité. En revanche, dans les directions longitudinales ξ, elles peuvent se propager lorsque $v(\xi)$ est périodique, ou être localisées lorsque $v(\xi)$ est aléatoire.

Du point de vue mathématique, on met en évidence une partie spéciale du spectre $\sigma(H)$ de l'opérateur, pour laquelle les fonctions propres généralisées correspondantes, solutions à croissance polynomiale de l'équation $H\psi = \lambda\psi$, $\lambda \in \sigma(H)$, ont un comportement asymptotique spécifique: elles sont décroissantes en x à l'infini, alors qu'en ξ, elles oscillent, ou tendent vers 0 à l'infini suivant les cas (voir e.g. [3, 8, 9, 10, 12, 13, 15]). Cette partie spéciale de $\sigma(H)$ est appelée "partie surfacique" du spectre, ou "spectre surfacique".

Lorsque le potentiel de l'équation de Schrödinger est un champ ergodique sur $\mathbb{Z}^d$ tout entier, la quantité la plus simple qui détecte le spectre de H est la densité d'états intégrée (voir e.g. [6, 19]). Mais cette quantité ne détecte pas la partie surfacique du spectre. C'est pourquoi nous sommes amené à introduire une notion de densité d'états intégrée adaptée à la situation. Nous l'appelons la "densité intégrée d'états surfaciques".

Une quantité analogue a été introduite et étudiée [10] pour l'équation de Schrödinger dans le cas continu, dans un contexte un peu différent où l'espace est partagé en deux demi-espaces portant chacun un potentiel ergodique différent. Comme souvent, les preuves sont techniquement plus compliquées dans le cas continu — par exemple dans [10] les auteurs utilisent des intégrales de chemins — et les résultats sont moins complets.

C'est pourquoi nous nous concentrons ici sur le cas de l'opérateur de Schrödinger discret (1.1)-(1.2). Nous prouvons (théorème 2.1) que la densité intégrée d'états surfaciques existe en tant que distribution, résultat déjà établi dans [9]. Mais de plus, nous mettons en évidence sa relation avec le spectre (théorème 2.2), nous résolvons un problème inverse simple (théorème 3.4), et nous prouvons des propriétés asymptotiques qui n'avaient pas encore été établies. Les démonstrations utilisent l'identité de la résolvante convenablement exploitée selon le cas considéré.

Pour ce qui est de la théorie de la diffusion, rappelons que la fonction de déplacement spectral a été introduite et étudiée pour les potentiels décroissant à l'infini [5, 17, 18, 22]. Or, le cas d'un potentiel surfacique (1.2) sort de ce cadre. Nous montrons (section 3) que, pour un tel potentiel, on peut définir une "fonction généralisée de déplacement spectral", à partir de la considération d'une famille de potentiels surfaciques dont les supports sont des "pavés" dont on fait tendre la longueur des côtés vers l'infini. Puis nous montrons que cette quantité coïncide avec la densité intégrée d'états surfaciques (théorème 3.3).

Le lien entre le déplacement des valeurs propres et la phase de la diffusion pour des potentiels tendant vers 0 à l'infini est bien connu en physique mathématique au moins depuis longtemps, comme en témoigne le calcul du deuxième coefficient du viriel pour un gaz quantique déjà effectué en 1937 dans [4].

Notre travail est à rapprocher d'un travail récent de V. Kostrykin et R. Schrader [16] sur l'opérateur de Schrödinger en dimension 1 pour un potentiel $v_L(x)$ qui est la restriction à l'intervalle $[-L, L]$ d'un certain champ aléatoire ergodique $v(x)$, $x \in \mathbb{R}$. V. Kostrykin et R. Schrader montrent que si $\xi_L(\lambda)$ est la fonction de déplacement spectral attachée à ce potentiel, le quotient $\frac{1}{L}\xi_L(\lambda)$ a une limite pour $L \to +\infty$, et que cette limite coïncide avec la différence entre les densités d'états intégrées des opérateurs $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ et $-\frac{d^2}{dx^2}$ agissant dans $L^2(\mathbb{R})$. Les résultats de cet article sont annoncés dans [7].

2 La densité intégrée d'états surfaciques

Soient

$$\Lambda_L = \left\{X = (x,\xi) \in \mathbb{Z}^d \;\middle|\; -\frac{L}{2} \le x_1,\ldots,x_{d_1} \le \frac{L}{2},\ -\frac{L}{2} \le \xi_1,\ldots,\xi_{d_2} \le \frac{L}{2}\right\} \tag{2.1}$$

le cube de côté L dans $\mathbb{Z}^d$,

$$\Lambda_L^{d_1} = \left\{x \in \mathbb{Z}^{d_1} \;\middle|\; -\frac{L}{2} \le x_1,\ldots,x_{d_1} \le \frac{L}{2}\right\} \tag{2.2}$$

le cube de côté L dans $\mathbb{Z}^{d_1}$, et

$$\Lambda_L^{d_2} = \left\{\xi \in \mathbb{Z}^{d_2} \;\middle|\; -\frac{L}{2} \le \xi_1,\ldots,\xi_{d_2} \le \frac{L}{2}\right\} \tag{2.3}$$

le cube de côté L dans $\mathbb{Z}^{d_2}$. On considère les deux opérateurs H_{Λ_L}, $H^0_{\Lambda_L}$ qui sont les restrictions de H et H^0 à Λ_L, i.e.

$$\begin{aligned} H_{\Lambda_L} &= P_{\Lambda_L} H, \\ H^0_{\Lambda_L} &= P_{\Lambda_L} H^0, \end{aligned}$$

où P_{Λ_L} est la projection orthogonale de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ sur $\ell^2(\Lambda_L)$. Pour chaque fonction bornée f sur $\mathbb{R}$, on définit la quantité

$$N_s^L(f) = \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{f(H_{\Lambda_L}) - f(H^0_{\Lambda_L})\}, \tag{2.4}$$

où $\operatorname{Tr} A$ désigne la trace de A. Cette quantité $N_s(f)$ est bien définie pour toute fonction f bornée car, le potentiel v étant borné, les spectres de $H^0_{\Lambda_L}$ et de H_{Λ_L} sont bornés.

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant:

Théorème 2.1 *Etant donné un champ ergodique quelconque v et une fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $(1+|x|)^2 f^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})$, $j = 1,2$, la distribution $N_s(f) = \lim_{L\to\infty} N_s^L(f)$ existe presque sûrement. Elle est non aléatoire et donnée par la relation*

$$N_s(f) = \mathbb{E}\Big\{\sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} N_f((x,0),(x,0))\Big\}, \tag{2.5}$$

où $N_f(X,Y)$ est le noyau (la matrice) de l'opérateur $f(H) - f(H^0)$ et où $\mathbb{E}\{\ldots\}$ désigne l'espérance par rapport au champ v.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur une série de lemmes et de propositions qui suivent.

Tout d'abord on considère la fonction $r_z(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - z}$. Si A est un opérateur, $r_z(A)$ est donc sa résolvante.

Proposition 2.1 *On suppose que v est borné. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$,*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{r_z(H_{\Lambda_L}) - r_z(H^0_{\Lambda_L})\} = \mathbb{E}\Big\{ \sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} [R_z((x,0),(x,0)) - R^0_z((x,0),(x,0))]\Big\},$$

où $R_z(X,Y)$ et $R^0_z(X,Y)$ sont les noyaux respectifs des résolvantes de H et H^0.

Pour montrer cette proposition nous utilisons les deux lemmes suivants.

Lemme 2.1 *Si v est borné, on a, presque sûrement,*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{r_z(H_{\Lambda_L}) - r_z(H^0_{\Lambda_L})\} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{r_z(H) - r_z(H^0)\}.$$

Lemme 2.2 *Si v est borné et si $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$, il existe $\alpha, C > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}\{|R_z(X,X) - R^0_z(X,X)|\} \le Ce^{-\alpha|x|}.$$

Preuve de la proposition 2.1. D'après la définition de N^L_s dans (2.4) on a

$$N^L_s(r_z) = \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{r_z(H_{\Lambda_L}) - r_z(H^0_{\Lambda_L})\}.$$

En vertu du lemme 2.1,

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} N^L_s(r_z) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{r_z(H) - r_z(H^0)\} \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} [R_z(X,X) - R^0_z(X,X)] \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi\in\Lambda^{d_2}_L} \sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} [R_z(X,X) - R^0_z(X,X)] \\
&\quad - \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi\in\Lambda^{d_2}_L} \sum_{x\notin\Lambda^{d_1}_L} [R_z(X,X) - R^0_z(X,X)].
\end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand $L \to \infty$, car, d'après le lemme 2.2, il existe α et $C > 0$ tels que

$$\lim_{L\to\infty}\Big|\mathbb{E}\Big\{\frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi\in\Lambda^{d_2}_L} \sum_{x\notin\Lambda^{d_1}_L} [R_z(X,X) - R^0_z(X,X)]\Big\}\Big| \le \lim_{L\to\infty} C \sum_{x\notin\Lambda^{d_1}_L} e^{-\alpha|x|} = 0.$$

D'autre part,

$$S(\xi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} [R_z((x,\xi),(x,\xi)) - R^0_z((x,\xi),(x,\xi))]$$

est ergodique (voir [19, 6] pour la définition de l'ergodicité), et, par le théorème ergodique, on a

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}} S(\xi)=\mathbb{E}\{S(0)\}$$
$$=\mathbb{E}\Big\{\sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}}[R_z((x,0),(x,0))-R_z^0((x,0),(x,0))]\Big\}.$$

Pour montrer les deux lemmes 2.1 et 2.2 on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 2.3 (Estimation de Combes-Thomas (e.g. [11])) *Soit $H=H^0+V$ un opérateur de Schrödinger agissant dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Le potentiel V est quelconque. Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(H)$, le noyau $R_z(X,Y)$ de la résolvante de H est à décroissance exponentielle,* i.e. *il existe $C,\alpha>0$ tels que*

$$|R_z(X,Y)|\le Ce^{-\alpha|X-Y|}.$$

Preuve du lemme 2.1. Soient $R_{z,L}(X,Y)$ le noyau de la résolvante de H_{Λ_L} et $R_{z,L}^0(X,Y)$ celui de la résolvante de $H_{\Lambda_L}^0$. Il existe un opérateur Γ_L, dont le noyau vaut -1 sur $\partial\Lambda_L$ et 0 ailleurs, et tel que:

$$H=H_{\Lambda_L}\oplus H_{\overline{\Lambda}_L}+\Gamma_L$$
$$H^0=H_{\Lambda_L}^0\oplus H_{\overline{\Lambda}_L}^0+\Gamma_L$$

où $\overline{\Lambda}_L=\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_L$. Si X ou $Y\in\Lambda_L$, l'identité de la résolvante ([2, 20]) nous donne les deux relations

$$R_z(X,Y)-R_{z,L}(X,Y)=\sum_{Z_1,Z_2\in\partial\Lambda_L}R_z(X,Z_1)R_{z,L}(Z_2,Y),\tag{2.6}$$
$$R_z^0(X,Y)-R_{z,L}^0(X,Y)=\sum_{Z_1,Z_2\in\partial\Lambda_L}R_z^0(X,Z_1)R_{z,L}^0(Z_2,Y).\tag{2.7}$$

En utilisant encore l'identité de la résolvante pour le couple d'opérateurs $(H_{\Lambda_L},H_{\Lambda_L}^0)$, on trouve:

$$\frac{1}{L^{d_2}}\mathrm{Tr}\{r_z(H_{\Lambda_L})-r_z(H_{\Lambda_L}^0)\}=-\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}\sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}}R_{z,L}(X,(0,\eta))v(\eta)R_{z,L}^0((0,\eta),X)$$
$$=\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}\sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}}[R_z(X,(0,\eta))-R_{z,L}(X,(0,\eta))]v(\eta)R_{z,L}^0((0,\eta),X$$
$$+\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}\sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}}R_z(X,(0,\eta))v(\eta)[R_z^0(X,(0,\eta))-R_{z,L}^0(X,(0,\eta)$$
$$-\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}\sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}}R_z(X,(0,\eta))v(\eta)R_z^0((0,\eta),X).$$

Montrons que le premier terme tend vers 0 quand L tend vers ∞. En utilisant la relation (2.6) et le lemme 2.3, on trouve qu'il existe $\alpha, C_1, C_2, C_3, C > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} \sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}} [R_z(X,(0,\eta)) - R_{z,L}(X,(0,\eta))]v(\eta)R^0_{z,L}((0,\eta),X)\right| \\
&= \left|\frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} \sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}} \sum_{\substack{Z_1\in\partial\Lambda_L\\ Z_2\in\partial\Lambda_L}} R_z(X,Z_1)R_{z,L}(Z_2,(0,\eta))v(\eta)R^0_{z,L}((0,\eta),X)\right| \\
&\leq \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} \sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}} \sum_{\substack{(t_1,\zeta_1)\in\partial\Lambda_L\\ (t_2,\zeta_2)\in\partial\Lambda_L}} C_1 e^{-\alpha|x-t_1|}e^{-\alpha|\xi-\zeta_1|}e^{-\alpha|t_2|}e^{-\alpha|\zeta_2-\eta|}e^{-\alpha|\xi-\eta|}e^{-\alpha|x|} \\
&\leq \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{(x,\xi)\in\Lambda_L} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^{d_2}} \sum_{\substack{(t_1,\zeta_1)\in\partial\Lambda_L\\ (t_2,\zeta_2)\in\partial\Lambda_L}} C_2 e^{-\alpha|x-t_1|}e^{-\alpha|\xi|}e^{-\alpha|t_2|}e^{-\alpha|\eta|}e^{-\alpha|x|} \\
&\leq \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\substack{(t_1,\zeta_1)\in\partial\Lambda_L\\ (t_2,\zeta_2)\in\partial\Lambda_L}} C_3 e^{-\alpha|t_1|}e^{-\alpha|t_2|} \\
&\leq C\frac{L^{d_2-1}}{L^{d_2}} \to 0, \text{ quand } L\to\infty.
\end{aligned}$$

De la même façon on montre que le deuxième terme tend vers 0 quand L tend vers ∞. On a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{r_z(H_{\Lambda_L}) - r_z(H^0_{\Lambda_L})\} &= \lim_{L\to\infty} -\frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} \sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}} R_z(X,(0,\eta))v(\eta)R^0_z((0,\eta),X) \\
&= \lim_{L\to\infty} -\frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^{d_2}} R_z(X,(0,\eta))v(\eta)R^0_z((0,\eta),X) \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{r_z(H) - r_z(H^0)\}.
\end{aligned}$$

Preuve du lemme 2.2. L'identité de la résolvante donne

$$R_z(X,X) - R^0_z(X,X) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^{d_2}} R_z(X,(0,\eta))v(\eta)R^0_z((0,\eta),X).$$

Puisque le potentiel est borné, le lemme 2.3 appliqué à $R^0_z(X,Y)$ et à $R_z(X,Y)$ assure qu'il existe $\alpha, C_1, C > 0$ tels que

$$|R_z(X,X) - R^0_z(X,X)| \leq C_1 \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^{d_2}} e^{-\alpha|\eta-\xi|}e^{-\alpha|x|} \leq Ce^{-\alpha|x|}.$$

Lemme 2.4 *On suppose v borné. Si $f\in C^2(\mathbb{R})$, et si $N_f(X,Y)$ est le noyau de l'opérateur $f(H)-f(H^0)$, il existe $\alpha, C > 0$ tels que:*

$$|\mathbb{E}\{N_f(X,X)\}| \leq Ce^{-\alpha|x|}.$$

Démonstration. Comme v est borné, le spectre de H est borné. Il suffit donc d'établir ce lemme pour les fonctions de classe C^2 à support compact. Nous allons utiliser une observation de [21]. Quitte à ajouter une constante, on peut supposer que $H^0, H \geq 1$. Soit $\varphi_s(\lambda) = \lambda^{-2} e^{is\lambda}$. On a:

$$\begin{aligned}\varphi_s(H) - \varphi_s(H^0) &= H^{-1} e^{isH}(H^{-1} - (H^0)^{-1}) \\ &\quad -i \int_0^s e^{iuH}(H^{-1} - (H^0)^{-1}) e^{i(s-u)H^0} du \\ &\quad +(H^{-1} - (H^0)^{-1}) e^{isH^0}(H^0)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant l'identité de la résolvante et en appliquant le lemme 2.3 aux noyaux de H^{-1} et de $(H^0)^{-1}$ dans chacun des trois termes ci-dessus on montre que $|\mathbb{E}\{N_{\varphi_s}\}(X,X)| \leq C(1 + |s|)e^{-\alpha|x|}$. Soit maintenant $f \in C^2(\mathbb{R})$ à support compact. On a

$$f(H) - f(H^0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^2 \widehat{f}}{dk^2}(k) \, (H^{-2} e^{ikH} - (H^0)^{-2} e^{ikH^0}) \, dk, \tag{2.9}$$

où $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f. Il résulte de (2.8) qu'il existe $C_1, C > 0$ tels que

$$|\mathbb{E}\{N_f(X,X)\}| \leq C_1 e^{-\alpha|x|} \int_{\mathbb{R}} (1 + |k|) \left| \frac{d^2 \widehat{f}}{dk^2}(k) \right| dk \leq C e^{-\alpha|x|}.$$

car les hypothèses sur f font que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |k|) \left| \frac{d^2 \widehat{f}}{dk^2}(k) \right| dk < +\infty. \tag{2.10}$$

Lemme 2.5 *Si v est borné et si $f \in C^2(\mathbb{R})$, la limite*

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L} \{f(H) - f(H^0)\}$$

existe presque sûrement et est non aléatoire.

Démonstration. On écrit:

$$\begin{aligned}\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L} \{f(H) - f(H^0)\} &= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X \in \Lambda_L} N_f(X,X) \\ &= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi \in \Lambda_L^{d_2}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^{d_1}} N_f(X,X) \\ &\quad - \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi \in \Lambda_L^{d_2}} \sum_{x \notin \Lambda_L^{d_1}} N_f(X,X). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent on trouve que ci-dessus le deuxième terme est nul. Quant au premier terme, il converge en vertu du théorème ergodique. Il en résulte

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L} \{f(H) - f(H^0)\} = \mathbb{E}\Big\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}^{d_1}} N_f((x,0),(x,0)) \Big\}, \tag{2.11}$$

ce qui achève la preuve du lemme.

Lemme 2.6 *Si v est borné et si $f \in C^2(\mathbb{R})$, la limite*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{f(H_{\Lambda_L}) - f(H^0_{\Lambda_L})\} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{f(H) - f(H^0)\}$$

presque sûrement.

Démonstration. Elle s'obtient par les même techniques que pour les lemmes 2.1 et 2.5.

Preuve du théorème 2.1. Supposons d'abord que v soit borné. Le lemme 2.6 donne alors:

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty} N_s^L(f) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{f(H_{\Lambda_L}) - f(H^0_{\Lambda_L})\} \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{f(H) - f(H^0)\}.\end{aligned}$$

Il découle de (2.11) que

$$\lim_{L\to\infty} N_s^L(f) = \mathbb{E}\Big\{ \sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} N_f((x,0),(x,0))\Big\}.$$

Cette limite existe donc et est non aléatoire.

Montrons maintenant l'existence de N_s, lorsque v n'est pas forcément borné, sous la forme d'une distribution sur la classe des fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ telles que $(1+|x|)^2 f^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$. On considère dans ce cas le potentiel

$$v^A(\xi) = \begin{cases} v(\xi) & \text{si } |v(\xi)| \le A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.12}$$

et l'opérateur de Schrödinger H^A de potentiel surfacique v^A. Soit $H^A_{\Lambda_L}$ sa restriction au cube Λ_L. On a, pour tout $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $(1+|x|)^2 f^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{f(H_{\Lambda_L}) - f(H^0_{\Lambda_L})\} &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{f(H_{\Lambda_L}) - f(H^A_{\Lambda_L})\} \\ &\quad + \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{f(H^A_{\Lambda_L}) - f(H^0_{\Lambda_L})\}.\end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le deuxième terme existe du fait que le potentiel v^A est borné et que la condition (2.10) est vérifiée en raison des hypothèses sur f. Il nous reste donc à montrer l'existence du premier terme. Les hypothèses sur f font que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Il existe donc une constante C, en fait $C = ||f'||_1$, telle que

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} |\operatorname{Tr}\{f(H_L) - f(H^A)\}| &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \left| \int f'(\lambda) \xi_L^A(\lambda)\, d\lambda \right| \\ &\le C \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\xi_L^A(\lambda)| \\ &\le C \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{card}\{\xi \in \Lambda_L^{d_2} \mid |v(\xi)| > A\}.\end{aligned}$$

D'après le théorème ergodique on a alors

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} |\operatorname{Tr}\{f(H_{\Lambda_L}) - f(H^A_{\Lambda_L})\}| \leq C \operatorname{Prob}\{|v(0)| > A\} < \infty.$$

De plus ce terme tend vers 0 quand A tend vers l'infini. Ce qui prouve l'existence de N_s.

Remarque. Les auteurs de [10] ont montré que la densité intégrée d'états surfaciques existe dans le cas qu'ils considèrent, mais qu'elle pourrait dépendre des conditions aux bords du cube Λ_L. Alors que le théorème 2.1 nous montre l'existence de la densité intégrée d'états surfaciques comme distribution au sens de de Schwartz, et le fait qu'elle ne dépend pas des conditions aux bords du cube Λ_L.

Corollaire 2.1 *La restriction de N_s à $\mathbb{R} \setminus \sigma(H^0)$ est une mesure positive.*

Démonstration. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ à support compact, $f \geq 0$, et telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(H^0)$. Alors,

$$N_s^L(f) = \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{f(H)\} \geq 0.$$

La fonctionnelle N_s^L est donc positive. Par conséquent, N_s l'est aussi. Mais une fonctionnelle positive sur $C_0^2(\mathbb{R})$ est, en fait, d'après le théorème de représentation de Riesz, une mesure positive.

Lemme 2.7 *Pour tout ensemble borélien $\Delta \subset \mathbb{R}$ tel que $\Delta \cap \sigma(H^0) = \emptyset$, on a*

$$N_s(\Delta) = \mathbb{E}\Big\{ \sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} E_H((x,0),(x,0);\Delta)\Big\},$$

où $E_H(X,Y;\Delta)$ est le noyau de la résolution spectrale $E_H(\Delta)$ de H.

Démonstration. Soit $\Delta = [a,b] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(H^0)$ et soit $\chi(\lambda)$ la fonction caractéristique de Δ. Soit $\varepsilon > 0$, et soient χ_1 et χ_2 deux fonctions appartenant à $C^2(\mathbb{R})$, à support compact et telles que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp} \chi_1 \subset [a-\varepsilon, b+\varepsilon],\\
&\operatorname{supp} \chi_2 \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon],\\
&\chi_1(\lambda) = \chi_2(\lambda) = 1, \quad \forall \lambda \in [a+2\varepsilon, b-2\varepsilon],\\
&\chi_2(\lambda) \leq \chi(\lambda) \leq \chi_1(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1,

$$\int \frac{\chi_1(\lambda)\, N_s(d\lambda)}{\lambda - z} = \int \frac{\chi_1(\lambda)\, m(d\lambda)}{\lambda - z},$$

où

$$m(d\lambda) = \mathbb{E}\Big\{ \sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} E_H((x,0),(x,0);d\lambda)\Big\}.$$

En vertu de l'unicité de la transformation de Stieltjes [1], on a

$$\int \chi_1(\lambda)\, N_s(d\lambda) = \int \chi_1(\lambda)\, m(d\lambda).$$

Puisque $\chi(\lambda) \leq \chi_1(\lambda)$ et que N_s est une mesure positive sur $\mathbb{R} \setminus [-2d, 2d]$, on trouve:

$$N_s(\Delta) \leq \int \chi_1(\lambda)\, m(d\lambda) \leq m([a-\varepsilon, b+\varepsilon]).$$

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $N_s(\Delta) \leq m(\Delta)$. En utilisant la fonction χ_2 on montre de la même façon que $N_s(\Delta) \geq m(\Delta)$. D'où l'égalité.

Théorème 2.2 *On a*

$$\operatorname{supp} N_s \setminus \sigma(H^0) = \sigma(H) \setminus \sigma(H^0).$$

Démonstration. Soit $\Delta \subset \mathbb{R}$ un ensemble borélien tel que $\Delta \cap \sigma(H^0) = \emptyset$. Si $N_s(\Delta) = 0$, on a, d'après le lemme précédent,

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} E_H((x,0),(x,0);\Delta) = 0,$$

et puisque $E_H((x,\xi),(x,\xi);\Delta)$ est ergodique en ξ, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{Z}^{d_2}$,

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} E_H((x,\xi),(x,\xi);\Delta) = 0.$$

E_H est positive, donc

$$E_H(X, X, \Delta) = 0 \text{ pour tout } X \in \mathbb{Z}^d,$$

ce qui veut dire que $E_H(\Delta) = 0$ et que $\Delta \cap \sigma(H) = \emptyset$. D'autre part, il est clair qu'on a l'implication $E_H(\Delta) = 0 \Rightarrow N_s(\Delta) = 0$.

En général, il n'est pas évident d'étudier les propriétés de la mesure N_s à l'extérieur du spectre de H^0. Cependant, dans le cas particulier où le potentiel est une suite de variables aléatoires bornées indépendantes et identiquement distribuées, dont la densité est bornée presque partout, un théorème analogue au lemme de Wegner (voir [19, 6]) montre:

Théorème 2.3 *Soit $H = H^0 + V$ avec $V(X) = \delta(x)v(\xi)$ où $\{v(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}^{d_2}}$ est une suite de variables aléatoires bornées, indépendantes et identiquement distribuées, dont la densité p est bornée presque partout:*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^{d_2}} |v(\xi)| = v_0 < \infty \text{ et}$$
$$\operatorname*{ess-sup}_{v\in\mathbb{R}} |p(v)| = p_\infty < \infty.$$

Alors, pour tout $\lambda_0 > 2d$, la densité intégrée d'états surfaciques est une mesure absolument continue sur $(-\infty, -\lambda_0) \cup (\lambda_0, \infty)$, et sa densité $\rho_s(\lambda)$ est bornée presque partout :

$$\operatorname*{ess-sup}_{\lambda\in\mathbb{R}} \rho_s(\lambda) \leq \frac{2v_0 p_\infty}{\lambda_0 - 2d}\ .$$

Démonstration. L'opérateur H_{Λ_L} dépend analytiquement du paramètre $v(\xi)$. Il existe donc une numérotation des valeurs propres $\{\lambda_i^L\}$ et des fonctions propres normalisées $\{\psi_i^L\}$ telle qu'elles soient continûment différentiables (voir [14]), et on a

$$\frac{\partial \lambda_i^L}{\partial v(\xi)} = |\psi_i^L(0,\xi)|^2.$$

Soit $\varphi_\varepsilon(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction croissante, égale à 1 si $\lambda \geq \varepsilon$, et à 0 si $\lambda < -\varepsilon$. Soit $\lambda < -\lambda_0$. Considérons la fonction $\varphi_{\varepsilon,\lambda}(\mu) = \varphi_\varepsilon(\lambda-\mu)$. Cette fonction est nulle sur $(\lambda+\varepsilon, \infty)$, elle tend, quand ε tend vers 0, vers la fonction caractéristique de la demi-droite $(-\infty, \lambda]$, et sa dérivée est à support compact $[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$. On a, de par la définition de N_s^L,

$$N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(\lambda-\mu) N_s^L(d\mu) = \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\lambda_i^L \in \sigma(H_{\Lambda_L})} \varphi_\varepsilon(\lambda - \lambda_i^L),$$

donc la quantité $N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda})$ est dérivable par rapport à $v(\xi)$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda})}{\partial v(\xi)} &= -\frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\lambda_i^L \in \sigma(H_{\Lambda_L})} \varphi_\varepsilon'(\lambda-\lambda_i^L) \frac{\partial \lambda_i^L}{\partial v(\xi)} \\ &= -\frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\lambda_i^L \in \sigma(H_{\Lambda_L})} \varphi_\varepsilon'(\lambda-\lambda_i^L) |\psi_i^L(0,\xi)|^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

D'autre part,

$$(H_{\Lambda_L}\psi, \psi) = \sum_{X\in\Lambda_L} \sum_{\substack{Y \\ |X-Y|=1}} \psi(Y)\psi(X) + \sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}} v(\xi)|\psi(0,\xi)|^2.$$

Par conséquent, pour tout $\lambda_i^L \leq \lambda + \varepsilon$, on a

$$|\lambda_i^L| \leq 2d + v_0 \sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}} |\psi_i^L(0,\xi)|^2,$$

car $(H^0\psi_i^L, \psi_i^L) \leq 2d$. Ensuite,

$$\sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}} |\psi_i^L(0,\xi)|^2 \geq \frac{|\lambda_i^L| - 2d}{v_0} \geq \frac{|\lambda+\varepsilon| - 2d}{v_0} \geq \frac{\lambda_0 - 2d}{v_0}\ .$$

En utilisant la relation (2.13) on trouve que, pour tout $\lambda < -\lambda_0$, on a:

$$\Big|\mathbb{E}\Big\{ \sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}} \frac{\partial N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda})}{\partial v(\xi)} \Big\}\Big| \geq \frac{\lambda_0 - 2d}{v_0} \frac{1}{L^{d_2}} \mathbb{E}\Big\{ \sum_{\lambda_i \in \sigma(H_{\Lambda_L})} \varphi_\varepsilon'(\lambda - \lambda_i^L) \Big\},$$

soit

$$\frac{1}{L^{d_2}}\mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\varphi'_\varepsilon(\lambda-\mu)N_s^L(d\mu)\Big\}\leq\frac{v_0}{\lambda_0-2d}\Big|\mathbb{E}\Big\{\sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}}\frac{\partial N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda})}{\partial v(\xi)}\Big\}\Big|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\Big\{\sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}}\frac{\partial N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda})}{\partial v(\xi)}\Big\}\Big| &= \Big|\mathbb{E}\Big\{\sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}}\int\frac{\partial N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda})}{\partial v(\xi)}p(v(\xi))d(v(\xi))\Big\}\Big|\\ &\leq L^{d_2}p_\infty\max_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}}\mathbb{E}\Big\{\int\Big|\frac{\partial N_s^L(\varphi_{\varepsilon,\lambda})}{\partial v(\xi)}\Big|dv(\xi)\Big\}\\ &\leq L^{d_2}p_\infty\max_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}}\mathbb{E}\Big\{N_s^L((-\infty,\lambda+\varepsilon])\big|_{v(\xi)=-v_0}^{v(\xi)=v_0}\Big\}\\ &\leq 2p_\infty,\end{aligned}$$

car la perturbation $H_{\Lambda_L}\big|_{v(\xi)=-v_0}^{v(\xi)=v_0}$ est de rang deux, et donc (voir [19]),

$$L^{d_2}N_s^L((-\infty,\lambda+\varepsilon])\big|_{v(\xi)=-v_0}^{v(\xi)=v_0}\leq 2.$$

On a donc, pour tout $\lambda<-\lambda_0$,

$$\mathbb{E}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\varphi'_\varepsilon(\lambda-\mu)N_s^L(d\mu)\Big\}\leq\frac{2v_0p_\infty}{\lambda_0-2d}\,.$$

$\varphi'_\varepsilon(\lambda-\mu)$ est à support compact situé à l'extérieur du spectre de H^0. On peut donc appliquer le théorème 2.1. En faisant tendre L vers l'infini, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi'_\varepsilon(\lambda-\mu)N_s(d\mu)\leq\frac{2v_0p_\infty}{\lambda_0-2d}\,,$$

et en intégrant cette inégalité par rapport à λ sur $\Delta=(a,b]$, où $a<b<-\lambda_0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}}(\varphi_\varepsilon(b-\mu)-\varphi_\varepsilon(a-\mu))N_s(d\mu)\leq\frac{2v_0p_\infty}{\lambda_0-2d}\,|\Delta|,$$

où $|\Delta|$ désigne la mesure de Lebesgue de Δ. En passant à la limite pour $\varepsilon\to 0$, on aboutit à

$$N_s(\Delta)\leq\frac{2v_0p_\infty}{\lambda_0-2d}\,|\Delta|,$$

ce qui veut dire que N_s est absolument continue sur tout ensemble borélien de $(-\infty,-\lambda_0]$, donc qu'elle est absolument continue sur $(-\infty,-\lambda_0]$, et que sa densité est bornée par $\dfrac{2v_0p_\infty}{\lambda_0-2d}$ presque partout sur cette demi-droite. On montre de la même façon qu'elle est absolument continue sur $[\lambda_0,\infty)$ et que sa densité est bornée par la même constante presque partout sur $[\lambda_0,\infty)$.

3 La fonction généralisée de déplacement spectral

La fonction de déplacement spectral ξ a été introduite par I. Lifchitz [18] et M. Krein [17] pour un couple d'opérateurs (A, B) tel que $B - A$ soit nucléaire, i.e. $\mathrm{Tr}\{B - A\} < \infty$. Ils ont montré que cette fonction ξ est réelle, appartient à $L^1(\mathbb{R})$, et qu'elle est donnée par la formule de trace

$$\mathrm{Tr}\{f(B) - f(A)\} = \int_{\mathbb{R}} f'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda,$$

pour une certaine classe de fonctions f. Dans cette section on étudie l'existence d'une fonction analogue adaptée à notre situation.

A priori la fonction de déplacement spectral n'existe pas puisque le potentiel ne tend pas vers 0 dans les directions longitudinales ξ. C'est pourquoi on considère

$$v_L(\xi) = P_{\Lambda_L^{d_2}}(\xi)v(\xi) \tag{3.1}$$

où $P_{\Lambda_L^{d_2}}$ est la projection orthogonale sur le cube $\Lambda_L^{d_2}$. Soit

$$H_L = H^0 + V_L, \tag{3.2}$$

où $V_L(X) = v_L(\xi)\delta(x)$. Le potentiel V_L est à support compact. La fonction de déplacement spectral du couple (H_L, H^0) existe donc. Notre objectif dans ce paragraphe est de montrer que $\frac{\xi_L}{L^{d_2}}$ converge au sens des distributions lorsque $L \to \infty$. On considère toujours la fonction $r_z(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}$. On a la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Si v est borné, la limite*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \mathrm{Tr}\left\{r_z(H_L) - r_z(H^0)\right\}$$

existe presque sûrement. Elle est non aléatoire, et elle est égale à

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \mathrm{Tr}\, P_{\Lambda_L}\{r_z(H) - r_z(H^0)\}.$$

Démonstration. On a la relation

$$\frac{1}{L^{d_2}} \mathrm{Tr}\{r_z(H_L) - r_z(H^0)\} = \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in Z^{d_2}} [R_{z,L}(X,X) - R_z^0(X,X)],$$

où $R_{z,L}(X,Y)$ et $R_z^0(X,Y)$ sont les noyaux respectifs des résolvantes de H_L et H^0. Soient $\Lambda_L, \Lambda_L^{d_1}, \Lambda_L^{d_2}$ les cubes définis par (2.1), (2.2), (2.3). Il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^{d_2}} \mathrm{Tr}\{r_z(H_L) - r_z(H^0)\} &= \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} [R_z(X,X) - R_z^0(X,X)] \\ &+ \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\notin\Lambda_L} [R_{z,L}(X,X) - R_z^0(X,X)] \\ &- \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{X\in\Lambda_L} [R_z(X,X) - R_{z,L}(X,X)].\end{aligned}$$

Le deuxième terme ci-dessus s'écrit, grâce à l'identité de la résolvante,

$$\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\notin\Lambda_L}[R_{z,L}(X,X)-R_z^0(X,X)]=-\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\notin\Lambda_L}\sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}}R_{z,L}(X,(0,\eta))v(\eta)R_z^0((0,\eta),X).$$

La décroissance exponentielle des noyaux des résolvantes (lemme 2.3) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\notin\Lambda_L}[R_{z,L}(X,X)-R_z^0(X,X)]\right| &\le \frac{1}{L^{d_2}}\sum_{x\notin\Lambda_L^{d_1}}\sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}}\sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}}C_1e^{-\alpha|x|}e^{-\alpha|\xi-\eta|}|v(\eta)|\\ &\le C_2\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{x\notin\Lambda_L^{d_1}}e^{-\alpha|x|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^{d_2}}e^{-\alpha|\xi|}\sum_{\eta\in\Lambda_L^{d_2}}|v(\eta)|\\ &\le C\sum_{x\notin\Lambda_L^{d_1}}e^{-\alpha|x|}\to 0,\ \text{quand } L\to\infty.\end{aligned}$$

D'autre part le troisième terme s'écrit, en utilisant encore l'identité de la résolvante,

$$\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}[R_z(X,X)-R_{z,L}(X,X)]=\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}\sum_{\eta\notin\Lambda_L^{d_2}}R_z(X,(0,\eta))v(\eta)R_{z,L}((0,\eta),X).$$

La décroissance exponentielle des noyaux des résolvantes (lemme 2.3) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}[R_z(X,X)-R_{z,L}(X,X)]\right| &\le C_3\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{x\in\Lambda_L^{d_1}}\sum_{\xi\in\Lambda_L^{d_2}}\sum_{\eta\notin\Lambda_L^{d_2}}e^{-\alpha|x|}e^{-\alpha|\xi-\eta|}|v(\eta)|\\ &\le C_4\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{\eta\notin\Lambda_L^{d_2}}|v(\eta)|\sum_{x\in Z^{d_1}}e^{-\alpha|x|}\sum_{\xi\in Z^{d_2}}e^{-\alpha|\xi|}\\ &\le C\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{\eta\notin\Lambda_L^{d_2}}|v(\eta)|,\end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 par le théorème ergodique. On en déduit que:

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{r_z(H_L)-r_z(H^0)\} &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}[R_z(X,X)-R_z^0(X,X)]\\ &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}P_{\Lambda_L}\{r_z(H)-r_z(H^0)\}.\end{aligned}$$

Cette limite existe et est non aléatoire (voir la proposition 2.1).

Proposition 3.2 *Si v est borné et si $f\in C^2(\mathbb{R})$, la limite*

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{f(H_L)-f(H^0)\}$$

existe presque sûrement. Cette limite est non aléatoire, et elle est égale à $N_s(f)$.

Démonstration. Comme v est borné, le spectre de H est borné. Il suffit donc de montrer ce lemme pour les fonctions de classe C^2 à support compact. On a:

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{f(H_L)-f(H^0)\} &= \frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}P_{\Lambda_L}\{f(H)-f(H^0)\}\\ &+\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\notin\Lambda_L}[f(H_L)(X,X)-f(H^0)(X,X)]\\ &-\frac{1}{L^{d_2}}\sum_{X\in\Lambda_L}[f(H)(X,X)-f(H_L)(X,X)].\end{aligned}$$

On a déjà vu au lemme 2.6 que la limite

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}P_{\Lambda_L}\{f(H)-f(H^0)\}$$

existe et est non aléatoire. Cette limite est égale à $N_s(f)$ (cf. 2.1).

En utilisant les deux relations (2.8) et (2.9), on montre que les deux autres termes tendent vers 0 quand $L\to\infty$ pour toute fonction $f\in C^2(\mathbb{R})$ à support compact, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Théorème 3.1 *Il existe une distribution $\overline{\xi}$ telle qu'on ait presque sûrement*

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\int f'(\lambda)\xi_L(\lambda)d\lambda=\int f'(\lambda)\overline{\xi}(\lambda)\,d\lambda$$

pour toute $f\in C^2(\mathbb{R})$ telle que $(1+|x|)^2f^{(j)}\in L^2(\mathbb{R})$, $j=1,2$. Cette distribution $\overline{\xi}$ est unique, à une constante additive près.

Nous appelons cette distribution *la fonction généralisée de déplacement spectral.*

Démonstration. Supposons d'abord que v soit borné. Il résulte alors de la formule de trace (voir [5, 22]) que

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\int f'(\lambda)\xi_L(\lambda)d\lambda=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{f(H_L)-f(H^0)\}.$$

Cette limite existe d'après la proposition 3.2, donc la distribution existe aussi.

Montrons maintenant l'existence de $\overline{\xi}$ lorsque v n'est pas forcément borné, sous la forme d'une distribution sur la classe des fonctions $f\in C^2(\mathbb{R})$ telles que $(1+|x|)^2f^{(j)}\in L^2(\mathbb{R})$, $j=1,2$. On considère alors le potentiel

$$v^A(\xi)=\begin{cases}v(\xi) & \text{si } |v(\xi)|\le A,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}\tag{3.3}$$

et l'opérateur de Schrödinger H_L^A de potentiel surfacique $P_{\Lambda_L^{d_2}}(\xi)v^A(\xi)$, où $P_{\Lambda_L^{d_2}}$ est la projection orthogonale sur le cube $\Lambda_L^{d_2}$. On a, pour tout $f\in C^2(\mathbb{R})$ tel que $(1+|x|)^2f^{(j)}\in L^2(\mathbb{R})$,

$j = 1, 2,$

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{f(H_L)-f(H^0)\} &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{f(H_L)-f(H_L^A)\}\\ &\quad+\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{f(H_L^A)-f(H^0)\}.\end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le deuxième terme existe du fait que le potentiel v^A est borné et que la condition (2.10) est vérifiée en raison des hypothèses sur f. Il nous reste donc à montrer l'existence du premier terme.

En fait H_L est une perturbation de H_L^A de rang $\operatorname{card}\{\xi \in \Lambda_L^{d_2} \mid |v(\xi)| > A\}$ qui est fini. La fonction de déplacement spectral ξ_L^A du couple (H_L, H_L^A) existe donc, et est majorée par ce rang. Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ est telle que $(1+|x|)^2 f^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, il existe donc une constante C, en fait $C = ||f'||_1 < +\infty$, telle que

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}|\operatorname{Tr}\{f(H_L)-f(H^A)\}| &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\left|\int f'(\lambda)\xi_L^A(\lambda)\,d\lambda\right|\\ &\leq C\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}|\xi_L^A(\lambda)|\\ &\leq C\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{card}\{\xi\in\Lambda_L^{d_2}, |v(\xi)|>A\}\\ &= C\operatorname{Prob}\{|v(0)|>A\}<\infty.\end{aligned}$$

De plus, cette limite tend vers 0 quand A tend vers ∞. D'où l'existence de $\overline{\xi}$ dans le cas où v n'est pas nécessairement borné.

Remarque. On peut montrer par des arguments analogues qu'on a presque sûrement

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\operatorname{Tr}\{R_{z,L}-R_z^0\} &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\mathbb{E}\{\operatorname{Tr}\{R_{z,L}-R_z^0\}\}\\ &= -\int\frac{\overline{\xi}(\lambda)}{(\lambda-z)^2}d\lambda\,. \end{aligned}\tag{3.4}$$

Cette relation est analogue à la formule de trace qu'on connaît pour la résolvante dans le cas des perturbations décroissantes (voir [5, 22]).

Théorème 3.2 *La restriction de $\overline{\xi}$ à $\mathbb{R}\setminus\sigma(H^0)$ est une fonction monotone presque partout.*

Démonstration. Les fonctions $\frac{1}{L^{d_2}}\xi_L$ sont monotones et bornées sur $\mathbb{R}\setminus\sigma(H^0)$. La famille de fonctions $\left\{\frac{1}{L^{d_2}}\xi_L\right\}$ converge donc vers une fonction monotone bornée presque partout.

Théorème 3.3 *Soit $\Delta = [a, b] \subset \mathbb{R}\setminus[-2d, 2d]$. On a:*

$$\overline{\xi}(b+0)-\overline{\xi}(a-0) = -N_s(\Delta).$$

Démonstration. Pour toute $f \in C^2(\mathbb{R})$ à support compact, telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(H^0)$,

$$\int f'(\lambda)\overline{\xi}(\lambda)\, d\lambda = \int f(\lambda) N_s(d\lambda).$$

Mais $\overline{\xi}$ est une fonction monotone sur $\mathbb{R} \setminus \sigma(H^0)$. Elle est donc à variation bornée. On peut ensuite écrire:

$$-\int f(\lambda) d\overline{\xi}(\lambda) = \int f(\lambda) N_s(d\lambda),$$

ce qui veut dire que $-d\overline{\xi}(\lambda) = N_s(d\lambda)$. D'où le résultat.

Ce théorème nous permet de définir $\overline{\xi}$ sans ambigüité en imposant que

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \overline{\xi}(\lambda) = 0.$$

Autrement dit,

$$\overline{\xi}(\lambda) = \begin{cases} -N_s((-\infty, \lambda]) & \text{si } \lambda < -2d \\ N_s([\lambda, +\infty)) & \text{si } \lambda > 2d. \end{cases}$$

Théorème 3.4 *On suppose* $\sup_\xi v(\xi) = v_0 < +\infty$. *Soit* $\overline{\xi}$ *la fonction généralisée de déplacement spectral du couple d'opérateurs* (H, H^0) *où* H *est l'opérateur défini dans* (1.1). *Alors, si* $\overline{\xi} = 0$ *au sens des distributions,* $H = H^0$, i.e. $v = 0$.

Démonstration. Pour montrer que le potentiel est nul, il suffit en fait de montrer que $\mathbb{E}\{v(0)\} = 0$ et que $\mathbb{E}\{v^2(0)\} = 0$. Soit $\chi_R \in C^2(\mathbb{R})$ une fonction à support compact, telle que $\chi_R = 1$ sur $I = [-2d - v_0, 2d + v_0]$. D'une part, en vertu du théorème 3.1,

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \int_{\mathbb{R}} \xi_L(\lambda)\chi_R(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \overline{\xi}(\lambda)\chi_R(\lambda) d\lambda = 0. \tag{3.5}$$

D'autre part, puisque $\operatorname{supp} \xi_L \subset I$, on a

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \int_{\mathbb{R}} \xi_L(\lambda)\chi_R(\lambda) d\lambda = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \int_I \xi_L(\lambda) d\lambda. \tag{3.6}$$

D'après une propriété essentielle de la fonction de déplacement spectral, on a (voir [5], [22])

$$\frac{1}{L^{d_2}} \int_I \xi_L(\lambda) d\lambda = \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} V_L = \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi \in \Lambda_L^{d_2}} v(\xi).$$

Le théorème ergodique donne que, presque sûrement,

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi \in \Lambda_L^{d_2}} v(\xi) = \mathbb{E}\{v(0)\}. \tag{3.7}$$

Il résulte des relations (3.6) et (3.7) que

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^{d_2}} \int_{\mathbb{R}} \xi_L(\lambda)\chi_R(\lambda) d\lambda = \mathbb{E}\{v(0)\}. \tag{3.8}$$

Il suffit alors de comparer (3.5) et (3.8) pour obtenir que

$$\mathbb{E}\{v(0)\} = 0.$$

En utilisant encore une fois une propriété élémentaire de la fonction de déplacement spectral (voir [12]), on a:

$$\frac{1}{L^{d_2}} \int \lambda \xi_L(\lambda) d\lambda = \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{H_L^2 - H_0^2\},$$

mais

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\{H_L^2 - H_0^2\} &= \operatorname{Tr}\{(H^0)^2 + H^0 V_L + V_L H^0 + V_L^2 - (H^0)^2\} \\ &= \operatorname{Tr}\{V_L^2\} + 2\operatorname{Tr}\{H^0 V_L\}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\operatorname{Tr}\{H^0 V_L\} = \sum_{X \in Z^d} H^0(X, X) V_L(X) = 0,$$

car la matrice de H^0 a ses éléments diagonaux nuls. Donc,

$$\frac{1}{L^{d_2}} \int \lambda \xi_L(\lambda) d\lambda = \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{V_L^2\} = \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} v^2.$$

Enfin, pour montrer que

$$\mathbb{E}\{v^2(0)\} = 0,$$

on refait la même démonstration que ci-dessus pour la fonction $\lambda\overline{\xi}(\lambda)$ à la place de $\overline{\xi}(\lambda)$.

4 Analyticité de $\overline{\xi}(\lambda)$ à l'extérieur du spectre du laplacien

Dans cette partie on considère le cas où le potentiel surfacique $\{v(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}^{d_2}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a. i.i.d) dont la densité est

$$p(v) = \frac{1}{\sigma} g\Big(\frac{v}{\sigma}\Big) \tag{4.1}$$

où g est une fonction positive sur $\mathbb{R}$, analytique sur $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < 1\}$, et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1 \tag{4.2}$$

et où σ est un paramètre tel que

$$\sigma > 2d\Big(1 + \sup_{0<\operatorname{Im} z<1} |g(z)|\Big). \tag{4.3}$$

Nous proposons la démonstration du théorème suivant:

Théorème 4.1 *Soit H l'opérateur défini dans* (1.1), *où le potentiel surfacique* $\{v(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}^{d_2}}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dont la densité* $p(v)$ *vérifie les conditions* (4.1)-(4.3).

Alors, la fonction généralisée de déplacement spectral $\overline{\xi}$ *du couple d'opérateurs* (H, H^0) *existe, et il existe* $\lambda_0(\sigma) > 2d$ *tel que* $\overline{\xi}$ *soit analytique sur* $(-\infty, -\lambda_0(\sigma)) \cup (\lambda_0(\sigma), \infty)$.

Observons que cette propriété d'analyticité n'est en général pas facile à établir. Dans tout ce paragraphe on considère l'opérateur r_z^0 qui agit sur $\ell^2(\mathbb{Z}^{d_2})$ et dont le noyau est

$$r_z^0(\xi,\eta) = R_z^0((0,\xi),(0,\eta)). \tag{4.4}$$

Soit h_z^0 l'opérateur agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}^{d_2})$ défini par

$$h_z^0 = (r_z^0)^{-1} + z. \tag{4.5}$$

Pour la clarté de l'exposé, on divise la démonstration de ce théorème en plusieurs lemmes.

Lemme 4.1 *Soient* $\lambda_0 > 2d$, $\varepsilon > 0$. *Alors, il existe* $C(\lambda_0, \varepsilon_0)$ *tel que*

$$\|h_z^0\| \leq C(\lambda_0,\varepsilon_0) \text{ pour tout } z \in D,$$

où

$$D = \{z = \lambda + i\varepsilon \mid |\lambda| \geq \lambda_0,\ \varepsilon \leq \varepsilon_0\}.$$

Démonstration. Soit $\lambda_0 > 2d$ et soit $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$. r_z^0 est l'opérateur de noyau

$$r_z^0(\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{d_2}} \int_{\mathbb{T}^{d_2}} r_z^0(\kappa) e^{i\kappa(\xi-\eta)} d\kappa,$$

où

$$r_z^0(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^{d_1}} \int_{\mathbb{T}^{d_1}} \frac{dk}{E_1(k) + E_2(\kappa) - z} \tag{4.6}$$

et

$$E_1(k) = -2\sum_{i=1}^{d_1} \cos k_i, \quad E_2(\kappa) = -2\sum_{i=1}^{d_2} \cos \kappa_i. \tag{4.7}$$

Soient $z = \lambda + i\varepsilon$ et $\lambda \geq \lambda_0$. On a

$$|r_z^0(\kappa)| \geq \frac{|\lambda| - 2d}{(|\lambda| + 2d)^2 + \varepsilon^2}\ .$$

D'autre part, $r_z^0 = -\frac{1}{z}\Big(1 - \frac{A_z}{z}\Big)$, où A_z est l'opérateur de noyau

$$A_z(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{E_1(k) + E_2(\kappa)}{E_1(k) + E_2(\kappa) - z} e^{i(\xi-\eta)\kappa}\, dk d\kappa.$$

On a donc $zr_z^0 + 1 = \frac{1}{z}A_z$, puis

$$h_z^0 = r_z^{0-1}\frac{A_z}{z},$$
$$\|A_z\| \le \frac{2d|z|}{|z|-2d} \text{ pour tout } z \in D.$$

Il en résulte que

$$\|h_z^0\| \le \frac{2d}{|z|-2d}\,\frac{(|\lambda|+2d)^2+\varepsilon^2}{|\lambda|-2d} \le 2d\frac{(|\lambda|+2d)^2+\varepsilon^2}{(|\lambda|-2d)^2} \le C(\lambda_0,\varepsilon_0),$$

où $C(\lambda_0,\varepsilon_0) = 2d\,\frac{(\lambda_0+2d)^2+\varepsilon_0^2}{(\lambda_0-2d)^2}$.

Lemme 4.2 *Soit $\gamma > 2d$. Il existe alors $\lambda_0(\gamma) > 2d$ et $\varepsilon_0(\gamma) > 0$, tels que:*

$$C(\lambda_0(\gamma),\varepsilon_0(\gamma)) < \gamma.$$

Démonstration. C'est un calcul élémentaire.

Proposition 4.1 *Soit $\{v(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}^{d_2}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dont la densité $p(v)$ vérifie les conditions* (4.1)-(4.3).

Il existe alors $\lambda_0(\sigma) > 2d$ et $\varepsilon_0(\sigma)$ tels que, pour tout $z = \lambda + i\varepsilon$ tel que $|\lambda| \ge \lambda_0(\sigma)$, $\varepsilon \le \varepsilon_0(\sigma)$, la limite

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{d_2}}\mathbb{E}\Big\{\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n}\Big(\frac{\overline{h_z^0}}{\overline{\gamma}}\Big)^n\Big\}$$

existe et soit analytique en z, où $\overline{h_z^0}$ est l'opérateur de noyau $\overline{h_z^0}(\xi,\eta) = |h_z^0(\xi,\eta)|$, où $P_{\Lambda_L^{d_2}}$ est la projection orthogonale sur $\Lambda_L^{d_2}$, et où

$$\overline{\gamma} = \frac{\sigma}{1 + \sup\limits_{0<\operatorname{Im} z<1}|g(z)|}\;.$$

Démonstration. D'après le théorème ergodique, chaque terme de la série

$$\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}}\Big(\frac{\overline{h_z^0}}{\overline{\gamma}}\Big)^n$$

converge quand $L \to \infty$. De plus, les conditions mises sur σ font que $\overline{\gamma} > 2d$. En vertu du lemme précédent, il existe $\lambda_0(\overline{\gamma}) > 2d$ et $\varepsilon_0(\overline{\gamma}) > 0$ tels que, pour tout $z = \lambda + i\varepsilon$ tel que $|\lambda| \ge \lambda_0(\overline{\gamma})$ et $\varepsilon \le \varepsilon_0(\overline{\gamma})$, on ait

$$\|\overline{h_z^0}\| \le C(\lambda_0(\overline{\gamma})), \quad \varepsilon_0(\overline{\gamma}) < \overline{\gamma},$$

et la série converge. Comme elle est bornée par une borne qui ne dépend pas de z, sa somme est analytique sur $\{z = \lambda + i\varepsilon \mid \lambda \ge \lambda_0(\overline{\gamma}),\ \varepsilon \le \varepsilon_0(\overline{\gamma})\}$.

Proposition 4.2 *Sous les mêmes conditions que la proposition précédente, il existe $\lambda_0(\sigma) > 2d$ et $\varepsilon_0(\sigma)$ tels que*

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{E}\Big\{\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}(h_z^0(v-z)^{-1})^n\Big\}$$

existe et soit analytique sur $\{z = \lambda + i\varepsilon \mid \lambda \geq \lambda_0(\overline{\gamma}),\ \varepsilon \leq \varepsilon_0(\overline{\gamma})\}$.

Démonstration. D'après le théorème ergodique, chaque terme de la série converge quand $L \to \infty$. Il nous reste à voir la convergence de la série elle-même. On a

$$\frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}(h_z^0(v-z)^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi\in\Lambda_L} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{\xi_1,\dots,\xi_n=\xi} h_z^0(\xi,\xi_1)(v(\xi_1)-z)^{-1}\dots(v(\xi_{n-1})-z)^{-1}h_z^0(\xi_{n-1},\xi_n)(v(\xi_n)-z)^{-}$$

et donc:

$$\frac{1}{L^{d_2}}\Big|\mathbb{E}\Big\{\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}(h_z^0(v-z)^{-1})^n\Big\}\Big|$$

$$\leq \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi\in\Lambda_L} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{\xi_1,\dots,\xi_n=\xi} |h_z^0(\xi,\xi_1)|\dots|h_z^0(\xi_{n-1},\xi_n)|\Big|\mathbb{E}\Big\{\frac{1}{(v(\xi_1)-z)^{m(\xi_1)}}\Big\}\Big|\dots\Big|\mathbb{E}\Big\{\frac{1}{(v(\xi_n)-z)^{m(\xi}}$$

Pour tout $\gamma = c\sigma$, $c < 1$, on considère le chemin

$$C = (-\infty, \operatorname{Re} z - \gamma) \cup D \cup (\operatorname{Re} z + \gamma, \infty)$$

où D est le demi-cercle de rayon γ et de centre $\operatorname{Re} z$. On a

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbb{E}\{\frac{1}{(v-z)^m}\}\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{p(v)}{|v-z|^m} dv = \int_C \frac{p(v)}{|v-z|^m} \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus(\operatorname{Re} z-\gamma, \operatorname{Re} z+\gamma)} \frac{p(v)}{|v-z|^m}\, dv + \int_0^\pi \frac{|p(\operatorname{Re} z+\gamma e^{i\theta})|}{|\operatorname{Re} z+\gamma e^{i\theta}-z|}\, d\theta \\
&\leq \frac{1}{\gamma^m}\Big(1 + \frac{\pi\gamma}{\sigma} \sup_{0<\operatorname{Im} z<1} |g(z)|\Big) \\
&\leq \Big(\frac{1}{c\sigma}(1 + \pi c \sup_{0<\operatorname{Im} z<1} |g(z)|)\Big)^m \\
&\leq \frac{1}{\overline{\gamma}^m}\ ,
\end{aligned}$$

où

$$\overline{\gamma} = \frac{\sigma}{1 + \sup_{0<\operatorname{Im} z<1} |g(z)|} > 2d.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L^{d_2}}\Big|\mathbb{E}\Big\{\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}(h_z^0(v-z)^{-1})^n\Big\}\Big| &\leq \frac{1}{L^{d_2}} \sum_{\xi\in\Lambda_L} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{\xi_1,\dots,\xi_n=\xi} \frac{|h_z^0(\xi,\xi_1)|\dots|h_z^0(\xi_{n-1},\xi_n)|}{\overline{\gamma}^{m(\xi_1)}\dots\overline{\gamma}^{m(\xi_n)}} \\
&\leq \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\Big(\frac{\overline{h_z^0}}{\overline{\gamma}}\Big)^n,
\end{aligned}$$

et donc, en vertu de la proposition 4.1, on trouve que la limite

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \left|\mathbb{E}\left\{\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} (h_z^0 (v-z)^{-1})^n\right\}\right|$$

existe et est non aléatoire.

Lemme 4.3 *Soit A_z l'opérateur de noyau*

$$A_z(\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{d_2}} \int_{\mathbb{T}^{d_2}} \log r_z^0(\kappa) e^{i\kappa(\xi-\eta)}\, d\kappa,$$

où $r_z^0(\kappa)$ est défini par (4.6). *Alors,*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} A_z$$

existe et est analytique sur $\{z = \lambda + i\varepsilon \mid \lambda \geq \lambda_0(\overline{\gamma}),\ \varepsilon \leq \varepsilon_0(\overline{\gamma})\}$.

Démonstration. En fait, puisque le noyau de A_z dépend de la différence $(\xi - \eta)$, les termes de la suite $\frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} A_z$ sont constants et cette limite est égale à

$$A_z(0) = \frac{1}{(2\pi)^{d_1}} \int_{\mathbb{T}^{d_2}} \log r_z^0(\kappa) d\kappa.$$

On a

$$\frac{|\lambda| - 2d}{(|\lambda| + 2d)^2 + \varepsilon^2} \leq |r_z^0(\kappa)| \leq \frac{1}{\lambda_0 - 2d},$$

donc r_z^0 ne s'annule pas, et la limite est analytique.

Lemme 4.4 *Soit $\{v(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}^{d_2}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dont la densité $p(v)$ vérifie les conditions* (4.1)-(4.3). *Alors:*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \log(v - z)$$

existe et est analytique sur $\{z = \lambda + i\varepsilon \mid \lambda \geq \lambda_0(\overline{\gamma}),\ \varepsilon \leq \varepsilon_0(\overline{\gamma})\}$.

Démonstration. D'après le théorème ergodique,

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \log(v - z) = \int_{\mathbb{R}} \log(v - z) p(v) dv.$$

Puisque p est analytique sur $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < \gamma < \sigma\}$, on peut écrire

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \log(v - z) = \int_C \log(v - z) p(v) dv$$

où C est le même chemin que dans la proposition 4.2. D'où l'analyticité car $v \mapsto \log(v - z)$ ne s'annule pas sur C.

Lemme 4.5 *Soit r_z la fonction définie dans la section 2. Alors*

$$\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{r_z(H) - r_z(H^0)\} = \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} v d_z^0 (1 + v r_z^0)^{-1},$$

où $r_z(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - z}$, *où* $d_z^0 = \dfrac{d}{dz} r_z^0$ *est l'opérateur de noyau*

$$d_z^0(\xi, \eta) = R_z^{0^2}((0,\xi),(0,\eta)),$$

et où $R_z^{0^2}(X,Y)$ *est le noyau du carré* $r_z(H^0) \times r_z(H^0)$ *de la résolvante de* H^0.

Démonstration. On applique l'identité de la résolvante à H et H^0.

Lemme 4.6 *On a*

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{L^{d_2}}\Big[\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} A_z + \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \log(v - z) + \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}((r_z^{0^{-1}} + z)(v - z)^{-1})^n\Big]$$
$$= \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} v d_z^0 (1 + v r_z^0)^{-1},$$

où A_z est l'opérateur défini au lemme 4.3.

Démonstration. On montre ce lemme par des calculs simples de la dérivée de la somme des trois opérateurs précédents.

Preuve du théorème 4.1. Soit ξ_L la fonction de déplacement spectral du couple d'opérateurs (H_L, H^0), où H_L est l'opérateur défini par (3.2). D'après la proposition 3.1, le lemme 4.5 et le lemme 4.6, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \int \frac{\xi_L(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr}\{r_z(H_L) - r_z(H^0)\} \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L}\{r_z(H) - r_z(H^0)\} \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}}\{v d_z^0 (1 + v r_z^0)^{-1}\} \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \frac{d}{dz}\Big[\operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} A_z + \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \log(v - z) \\
&\quad + \operatorname{Tr} P_{\Lambda_L^{d_2}} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}((r_z^{0^{-1}} + z)(v - z)^{-1})^n\Big].
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $z = \lambda + i\varepsilon$ tel que $|\lambda| > \lambda_0(\sigma)$ et $\varepsilon < \varepsilon_0(\sigma)$, la limite $\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^{d_2}} \int \frac{\xi_L(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$ existe et est non aléatoire sur $(-\infty, -\lambda_0(\sigma)) \cup (\lambda_0(\sigma), \infty)$. En utilisant des arguements standard d'analyse complexe on obtient que $\overline{\xi}$ existe presque sûrement et qu'elle est analytique sur $(-\infty, -\lambda_0(\sigma)) \cup (\lambda_0(\sigma), \infty)$.

5 Un exemple où $\overline{\xi}$ n'est pas analytique sur le spectre du laplacien

Soit $H = H^0 + V$ un opérateur de Schrödinger agissant sur $\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$ avec un potentiel $V(X) = v(\xi)\delta(x)$, où $v(\xi)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec une densité de Cauchy $p(v) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+v^2}$. Cette densité est analytique sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < \alpha\}$. On va voir néanmoins, par le calcul explicite de la fonction généralisée de déplacement spectral $\overline{\xi}$, que, pour $d_1 = 1$, $\overline{\xi}$ est analytique sur $\mathbb{R} \setminus (-2d, 2d)$, alors que, pour $d_2 = 1$ ou 2, il y a des points de l'intervalle $(-2d, 2d)$ en lesquels cette fonction n'est pas analytique.

Comme $\mathbb{Z}^{d_2}$ est un ensemble dénombrable on peut l'écrire $\mathbb{Z}^{d_2} = \{\eta_i \mid i \text{ entier} \geq 1\}$. Le potentiel s'écrit alors:

$$v(\xi)\delta(x) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^{d_2}} v(\eta)\delta(x)\delta(\xi-\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} v(\eta_i)\delta(x)\delta(\xi-\eta_i).$$

Notons $H_j = H^0 + V_j$, $j \geq 1$ l'opérateur de Schrödinger de potentiel

$$V_j(X) = \sum_{i=1}^{j} v(\eta_i)\delta(x)\delta(\xi-\eta_i).$$

$H_{j+1} - H_j$ est un opérateur de rang 1. On a donc

$$r_z(H) - r_z(H^0) = \sum_{j=0}^{\infty}[r_z(H_{j+1}) - r_z(H_j)], \tag{5.1}$$

où $r_z(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}$. L'identité de la résolvante s'écrit, en utilisant les noyaux, sous la forme

$$R_{H_{j+1}}(X,Y) - R_{H_j}(X,Y) = -\frac{v(\eta_{j+1})R_{H_j}(X,(0,\eta_{j+1}))R_{H_j}((\eta_{j+1},0),X)}{1+v(\eta_{j+1})R_{H_j}((0,\eta_{j+1})(0,\eta_{j+1}))}.$$

Le fait que $H_j = H_{j+1}|_{v(\eta_{j+1})=0}$ confirme que $R_{H_j}(X,Y)$ et $v(\eta_{j+1})$ sont indépendantes. Si l'on prend l'espérance de la relation précédente, on obtient

$$\mathbb{E}\{R_{H_{j+1}}(X,Y) - R_{H_j}(X,Y)\} = -\mathbb{E}\Big\{R_{H_j}(X,(0,\eta_{j+1}))R_{H_j}((\eta_{j+1},0),X)\int_{\mathbb{R}}\frac{vp(v)}{1+v\zeta}dv\Big\},$$

où $\zeta = R_{H_j}((0,\eta_{j+1})(0,\eta_{j+1}))$ et où $\operatorname{Im}\zeta \cdot \operatorname{Im} z > 0$. Puisque

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{vp(v)}{1+v\zeta}dv = \frac{(-i\alpha\,\operatorname{sign}(\operatorname{Im} z))}{1+(-i\alpha\,\operatorname{sign}(\operatorname{Im} z))\zeta},$$

on peut écrire que, pour tout $j \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}\{R_{H_{j+1}}(X,Y) - R_{H_j}(X,Y)\} = R_{H_j+\tilde{V}_{z,j+1}}(X,Y) - R_{H_j}(X,Y),$$

où $R_{H_j+\tilde{V}_{z,j+1}}(X,Y)$ est le noyau de l'inverse de $H_j + \tilde{V}_{z,j+1} - z$, avec

$$\tilde{V}_{z,j+1}(X) = \gamma(z)\delta(x)\delta(\xi - \eta_{j+1}),$$

et

$$\gamma(z) = -i\alpha \,\mathrm{sign}(\mathrm{Im}\, z).$$

La relation (5.1) nous donne

$$\mathbb{E}\{R_z(X,Y) - R_z^0(X,Y)\} = \overline{R}_z(X,Y) - R_z^0(X,Y),$$

où $R_z(X,Y)$ et $R_z^0(X,Y)$ sont les noyaux respectifs des résolvantes de H et H^0, et où $\overline{R}_z(X,Y)$ est le noyau de l'inverse de $H^0 + V_z - z$, pour $V_z(X) = \delta(x)\gamma(z)$ potentiel surfacique constant complexe. On en déduit

$$\mathbb{E}\Big\{\sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} R_z((x,0),(x,0)) - R_z^0((x,0),(x,0))\Big\} = \sum_{x\in\mathbb{Z}^{d_1}} \overline{R}_z((x,0),(x,0)) - R_z^0((x,0),(x,0)). \tag{5.2}$$

Lemme 5.1 *Soit $\overline{\xi}$ la fonction généralisée de déplacement spectral pour un potentiel surfacique constant $\gamma\delta(x)$ en dimension $d = d_1 + d_2$. Soit ξ_{d_1} la fonction de déplacement spectral du couple Δ_{d_1} et soit N_{d_2} la densité d'états du Δ_{d_2}, où Δ_{d_1} et Δ_{d_2} sont les laplaciens respectifs sur $\ell^2(\mathbb{Z}^{d_1})$ et $\ell^2(\mathbb{Z}^{d_2})$. Alors,*

$$\overline{\xi}(\lambda) = \int_{-2d_2}^{2d_2} \xi_{d_1}(\lambda - \mu) N_{d_2}(d\mu).$$

On remarque que, d'après ce lemme et l'équation (5.2), la fonction généralisée de déplaceme spectral s'écrit sous la forme

$$\overline{\xi}(\lambda) = \int_{-2d_2}^{2d_2} \overline{\xi}_{d_1}(\lambda - \mu) N_{d_2}(d\mu), \tag{5.3}$$

où $\overline{\xi}_{d_1}$ est définie par la relation

$$\mathrm{Tr}\{(\Delta_{d_1} + \gamma(z)P_0 - z)^{-1} - (\Delta_{d_1} - z)^{-1}\} = -\int \frac{\overline{\xi}_{d_1}(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda,$$

où P_0 est la projection orthogonale sur $x = 0$, i.e. $(P_0\psi)(x) = \psi(0)$.

Remarque. On peut voir $\overline{\xi}_{d_1}$ comme la fonction de déplacement spectral du couple non autoadjoint $(\Delta_{d_1} + \gamma(z)P_0, \Delta_{d_1})$.

On fera le calcul pour $d_1 = 1$ où $\overline{\xi}_{d_1=1}$ se calcule explicitement. On a :

$$\overline{\xi}_1(\lambda) = \mathrm{sign}(\lambda)\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\chi(|\lambda| - 2)$$

où χ est la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$. Il est clair que cette fonction est de classe C^1 sur $(-\infty, 2)$, sur $(-2, 2)$ et sur $(2, \infty)$. Sa dérivée est

$$\overline{\xi}_1'(\lambda) = \operatorname{sign}(\lambda)\frac{\alpha}{\pi}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}}\frac{1}{\alpha^2+\lambda^2-4}\chi(|\lambda|-2).$$

Pour $d_2 = 1$, la densité d'états s'écrit explicitement:

$$\rho_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4-\lambda^2}}\chi(2-|\lambda|).$$

La fonction généralisée de déplacement spectral s'écrit en utilisant (5.3):

$$\overline{\xi}(\lambda) = \operatorname{sign}(\lambda)\frac{1}{\pi}\int_{\max(-2,-|\lambda+2|)}^{\min(2,|\lambda-2|)} \arctan\frac{\alpha}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2-4}}\rho_1(\mu)d\mu.$$

$\overline{\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et, vu que $\overline{\xi}_1$ est dérivable par morceaux, $\overline{\xi}$ l'est aussi. De façon explicite:

$$\begin{aligned}\overline{\xi}'(\lambda) &= \frac{1}{4\pi}\frac{\chi(4-|\lambda|)}{\sqrt{|\lambda|(4-|\lambda|)}}\\ &+\frac{\operatorname{sign}(\lambda)}{\pi}\int_{\max(-2,-|\lambda+2|)}^{\min(2,|\lambda-2|)}\frac{\alpha(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2-4}}\frac{1}{\alpha^2+(\lambda-\mu)^2-4}\rho_1(\mu)d\mu.\end{aligned}$$

$\overline{\xi}'$ est bornée sur $(-\infty,-4)\cup(-4,0)\cup(0,4)\cup(4,\infty)$. On peut trouver des équivalents de $\overline{\xi}'$ aux points $-4, 0, 4$.

$$\overline{\xi}'(\lambda) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{1}{\sqrt{4+\lambda}} & \text{quand } \lambda \searrow -4,\\ \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda|}} & \text{quand } \lambda \to 0,\\ \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{1}{\sqrt{4-\lambda}} & \text{quand } \lambda \nearrow 4.\end{cases}$$

$\overline{\xi}$ est analytique sur $\mathbb{R}\setminus(-4,4)$, et à variation bornée sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle n'est pas analytique aux points -4, 0 et 4 qui sont trois points du spectre de H^0.

Pour $d_2 = 2$, on a:

$$N_2(d\mu) = \rho_2(\mu)d\mu,$$

où:

$$\rho_2(\mu) = \int_{-2}^{2}\rho_1(\mu-\nu)\rho_1(\nu)\,d\nu, \qquad \rho_1(\nu) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4-\nu^2}}\chi(2-|\nu|).$$

Cette densité est à support compact $[-4,4]$. Elle a un comportement logarithmique au voisinage de 0, i.e. il existe une constante C telle que

$$\rho_2(\mu) \sim_{\mu\to 0} C\log\frac{1}{|\mu|}.$$

La fonction de déplacement spectral s'écrit donc

$$\overline{\xi}(\lambda) = \int_{-4}^{4} \overline{\xi}_1(\lambda - \mu)\rho_2(\mu)d\mu.$$

De façon explicite,

$$\overline{\xi}(\lambda) = \operatorname{sign}(\lambda)\frac{1}{\pi}\int_{\max(-4,-|\lambda+2|)}^{\min(4,|\lambda-2|)} \arctan\frac{\alpha}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2-4}}\rho_2(\mu)d\mu.$$

$\overline{\xi}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable par morceaux. Le calcul explicite de la dérivée nous donne

$$\begin{aligned}\overline{\xi}'(\lambda) &= \frac{1}{2}\rho_2(\lambda-2)\chi(\lambda(6-\lambda)) + \frac{1}{2}\rho_2(\lambda+2)\chi(-\lambda(6+\lambda)) \\ &+ \operatorname{sign}(\lambda)\frac{1}{\pi}\int_{\max(-4,-|\lambda+2|)}^{\min(4,|\lambda-2|)} \frac{\alpha(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2-4}}\frac{1}{\alpha^2+(\lambda-\mu)^2-4}\rho_2(\mu)d\mu.\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{\lambda\to 2}\rho_2(\lambda-2) = \infty$ et que $\lim_{\lambda\to -2}\rho_2(\lambda+2) = \infty$, on trouve que $\overline{\xi}$ n'est pas dérivable aux points -2 et 2, et qu'elle a un comportement logarithmique au voisinage de ces deux points:

$$\begin{aligned}\overline{\xi}'(\lambda) &\sim_{\lambda\to 2} -C\log|\lambda-2|, \\ \overline{\xi}'(\lambda) &\sim_{\lambda\to -2} -C\log|\lambda+2|.\end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{\xi}$ est bien analytique sur $\mathbb{R}\setminus(-6,6)$, et à variation bornée sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est analytique ni en -2, ni en 2 qui sont deux points du spectre de H^0.

Pour $d_2 \geq 3$:

$$N_{d_2}(d\mu) = \rho_{d_2}(\mu)d\mu,$$

où $|\rho_{d_2}(\mu)| < \infty$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\overline{\xi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc à variation bornée sur $\mathbb{R}$.

On remarque que dans cet exemple $\overline{\xi}$ est toujours à variation bornée. Une démonstration analogue à celle du théorème 3.2 montre que $\frac{1}{L^{d_2}}\xi_L$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers $\overline{\xi}$ lorsque $L \to \infty$. Une démonstration semblable à celle du théorème 3.3 montre que N_s et $\overline{\xi}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par conséquent, N_s définit une mesure sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Remerciements

Je tiens à remercier les Professeurs Anne Boutet de Monvel et Leonid Pastur qui m'ont proposé le sujet de ce travail, et pour avoir été disponibles pour des discussions fructueuses tout le long de la préparation de ce texte.

Références

[1] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space, volume II*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1963.

[2] A.-M. Berthier (A. Boutet de Monvel), *Spectral theory and wave operators for the Schrödinger equation*, Research Notes in Mathematics, **71**, Pitman, Boston, 1982 (version russe à paraître).

[3] A. Boutet de Monvel, A. Surkova, Localisation des états de surface pour une classe d'opérateurs de Schrödinger discrets à potentiels de surface quasi-périodiques, *Helv. Phys. Acta.*, **71** (1998), 459–490.

[4] E. Beth, G.E. Uhlenbeck, The quantum theory of the non-ideal gases II. Behavior at low temperatures, *Physica*, **4** (1937), 915–924.

[5] M.S. Birman, D.R. Yafaev, The Spectral Shift Function. The Work of M.G.Krein and its Further Development, *St. Peterburg Math. J.*, **4**, 5 (1993).

[6] R. Carmona, J. Lacroix, *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1990.

[7] A. Chahrour, Sur la densité intégrée d'états surfaciques et la fonction généralisée de déplacement spectral pour un potentiel surfacique ergodique, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), à paraître.

[8] E.B. Davies, B.Simon, Scattering Theory for Systems with Different Spatial Asymptotics on the Left and Right, *Comm. Math. Phys.*, **63** (1978), 277–301.

[9] H. Englisch, W. Kirsch, M. Schröder, B. Simon, Density of surface states in discrete models, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, (1988), 1261–1262.

[10] H. Englisch, W. Kirsch, M. Schröder, B. Simon, Random Hamiltonians Ergodic in All But One Direction, *Comm. Math. Phys.*, **128** (1990), 613–625.

[11] J. Fröhlich, T. Spencer, Absence of diffusion in the Anderson tight-binding model for large disorder or low energy, *Comm. Math. Phys.*, **88** (1983), 151–184.

[12] V. Jakšić, S. Molchanov, On the spectrum of the surface Maryland model, *Lett. Math. Phys.*, **45** (1998), 189–193.

[13] V. Jakšić, S. Molchanov, L. Pastur, On the propagation properties of surface waves, In: "Wave propagation in complex media" (Minneapolis, MN, 1994), 143–154, IMA *Vol. Math. Appl.*, **96**, Springer, New York, 1998.

[14] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, Heidelberg, 1966.

[15] B. Khoruzhenko, L. Pastur, The localization of surface states: an exactly solvable model, *Physics Reports* **288** (1997), 109–126.

[16] V. Kostrykin, R. Schrader, Scattering Theory Approach to Random Schrödinger Operators in One Dimension, Preprint mp-arc 98-62.

[17] M.G. Krein, On Perturbation Determinant and Trace Formula for Unitary Selfadjoint Operators, *Soviet. Mat. Dokl.*, **3** (1962).

[18] I.M. Lifshits, On a Problem in Perturbation Theory, *Uspekhi Mat. Nauk*, **7**, 1, (47) (1952), 171–180.

[19] L. Pastur, A. Figotin, *Spectra of Random and Almost Periodic Operators*, Springer Verlag, Heidelberg 1992.

[20] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis, II: Fourier Analysis, Self-Adjointness, III: Scattering Theory, IV: Analysis of Operators*, Academic Press, New York.

[21] B. Simon, *Spectral analysis of rank one perturbations and applications*, in *Mathematical quantum theory. II. Schrödinger operators (Vancouver, BC, 1993)*, 109–149, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[22] D.R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory, General Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992

Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS UMR 7586,
Physique mathématique et Géométrie,
Université Paris 7-Denis Diderot,
U.F.R. de Mathématiques, case 7012,
Tour 45–55, 5-ème étage,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, FRANCE
e-mail: `chahrour@math.jussieu.fr`