

Der Cylinder (die Walze). Der Kreis

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145625>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Prisma nennen. Er setzt sich aus einem rechtwinkligen und aus einem dreiseitigen Prisma zusammen, welche gleich hoch sind.

Wie berechnen wir das Volumen? Multiplizieren wir die Höhe mit dem rechtwinkligen Teil der Grundfläche, so erhalten wir den Inhalt des rechtwinkligen Prismas, und multiplizieren wir die Höhe mit dem dreiseitigen Teil der Grundfläche, so erhalten wir den Inhalt des dreiseitigen Prismas.

$$\text{Rechtw. Prisma} = 12 \cdot 13 \cdot 20 \text{ m}^3 = 3120 \text{ m}^3$$

$$\text{Dreiseitiges Prisma} = \frac{12 \cdot 4}{2} \cdot 20 \text{ „} = \frac{480 \text{ „}}{3600 \text{ m}^3}$$

Indem wir die Höhe mit der ganzen Grundfläche (180 m^2) multiplizieren, werden wir den Inhalt des fünfseitigen Prismas erhalten.

$$G \cdot H = 180 \cdot 20 \text{ m}^3 = 3600 \text{ m}^3.$$

Dieses senkrechte fünfseitige Prisma kann daher nach der gleichen Regel ($J. = G \cdot H.$) berechnet werden wie die bisher behandelten Prismen.

Führe noch ein zweites Beispiel durch, und vergleiche es mit Beispiel 1.

Satz 21. Ein fünfseitiges senkrechtes Prisma ist begrenzt von 2 kongruenten Fünfecken als Grund- und Deckfläche und von 5 Rechtecken als Seitenflächen. Es wird wie das drei- und vierseitige Prisma nach der Regel $J. = G \cdot H.$ berechnet.

E. Der Cylinder (die Walze). Der Kreis.

I. Beschreibung und Konstruktion des Cylinders.

1) Bei einer Durchmusterung unseres Hauses treffen wir zahlreiche Gegenstände an, die eine runde Form haben. Wir wollen von diesen Formen diejenige betrachten, die uns als die einfachste erscheint.

Als erstes Beispiel wählen wir die vorliegende cylinderförmige Schachtel. Welche Verwendung findet sie?

2) *Wir wollen lernen, wie eine solche Schachtel zu verfertigen ist.*

a) Zunächst sollt ihr eine Beschreibung davon geben. Grund- und Deckfläche sind 2 runde Figuren, die keine Ecken zeigen. Ihre Umfänge sind krumme Linien, die ganz regelmässig

verlaufen und in sich selbst zurückkehren. Diese Flächen wollen wir Kreisflächen oder kurzweg Kreise nennen. Den Umfang eines dieser Kreise nennen wir seine *Peripherie*.

Der Kreis.
Peripherie.

Wir wollen die Merkmale dieser Fläche genauer kennen lernen.

Lege die Schachtel auf den Tisch, und miss mit einem Massstabe die grösste Ausdehnung des Kreises in der Längsrichtung des Zimmers, und markiere diese Linie mit Bleistift. Miss auch die grösste Ausdehnung in der Breitenrichtung des Zimmers, und markiere auch diese Linie. Wie sind diese Ausdehnungen? Fasse den Schnittpunkt der 2 Linien ins Auge; ziehe durch ihn alle möglichen Linien bis zur Peripherie, und miss diese. Alle sind gleich lang (= 1 dm) und haben in diesem Punkte ihre Mitte. Dieser Punkt heisst der *Mittelpunkt* oder das *Zentrum* des Kreises, und jene Linien heissen *Durchmesser* oder *Diameter*. Die halben Durchmesser, d. h. die Strecken vom Mittelpunkt bis zur Peripherie, heissen *Halbmesser* oder *Radien*. Miss einige Radien. Alle Radien haben gleiche Länge (= 5 cm).

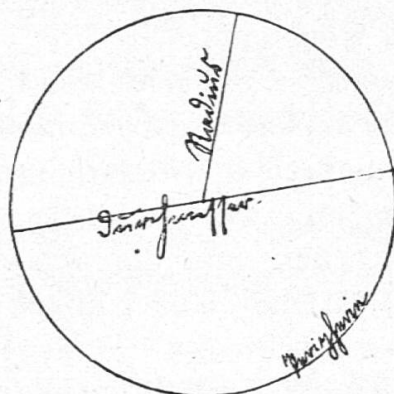
Mittelpunkt.
Durchmesser.
Radius.

b) Wie könnten wir an der Wandtafel diesen Kreis zeichnen? Wir nehmen eine Schnur von der Länge des Radius, halten einen Endpunkt fest und die Schnur gespannt und drehen sie herum; dann wird eine am andern Endpunkt befestigte Kreide die Kreislinie zeichnen. Markiere die anfängliche Lage der Schnur durch eine Strecke, und gib an, wie durch Drehung dieser Strecke der Kreis entsteht.

Konstruktion des Kreises.

Wegen der Wichtigkeit der Kreislinie hat man ein Instrument verfertigt, um sie zu konstruieren, den Zirkel. Während ein Eisenstift fest bleibt, dreht sich ein Bleistift oder eine Kreide so, dass die Entfernung vom Eisenstift immer dieselbe bleibt.

Fig. 17.



(2:5)

Satz 22. Dreht sich eine Strecke OA so, dass ein Endpunkt O fest bleibt, so beschreibt der andere einen Kreis. Jeder Punkt der Kreislinie ist vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

Beschreibung der Mantelfläche.

c) Die Seitenfläche unserer Cylinderschachtel nennen wir ihre Mantelfläche. Sie ist aus unzählig vielen geraden Seitenlinien zusammengesetzt, welche die Grundfläche mit der Deckfläche verbinden. Diese Mantelfläche ist eine runde Fläche. Wie unterscheidet sie sich von einer ebenen Fläche des Prismas, z. B. von einer Wandfläche unseres Zimmers? Auf dieser ebenen Wandfläche kann man einen geraden Stab nach allen Richtungen auflegen, ohne dass Lücken entstehen. Die Wandfläche ist nach allen Richtungen gerade. An die Mantelfläche der Cylinderschachtel lässt sich der Stab nur anlegen, wenn man ihn senkrecht zur Grundfläche hält. Diese Mantelfläche ist nur in senkrechter Richtung gerade.

Die geraden Linien der Mantelfläche heissen Seitenlinien; sie sind alle gleich, was zur Folge hat, dass Grund- und Deckfläche parallel sind; jede gibt den Abstand von Grund- und Deckfläche an, welchen man die Höhe der Schachtel nennt.

d) Nach dieser Beschreibung wollen wir zur Hauptaufgabe übergehen, zur Besprechung der Konstruktion dieser Schachtel.

Grund- und Deckfläche sind leicht zu zeichnen und auszuschneiden. Wie konstruiert man die Mantelfläche?

Die Abwicklung des Mantels.

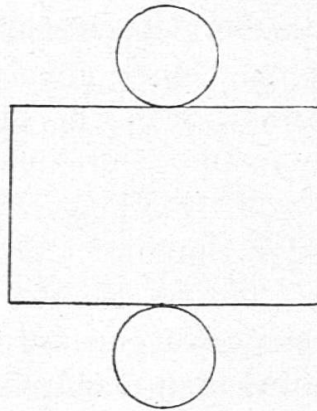
Da wollen wir daran denken, dass jeder von uns oft Flächen gebildet hat, die annähernd die Form eines solchen Cylindermantels hatten, nämlich beim Aufrollen eines rechteckigen Kartons, Papiers, Tuchs, einer Tapete, des Tischtuchs etc. — Rollet euer Heft zusammen, und ihr bekommt einen solchen Cylindermantel. Wenn ihr umgekehrt ein aufgerolltes Heft wieder abrollt, so erhält ihr wieder ein Rechteck.

Schneiden wir unseren Schachtelmantel nach einer Seitenlinie auf und wickeln ihn ab, so bekommen wir ein Rechteck. Der Umfang des Grundkreises wird zur Grundlinie, die Seitenlinie des Mantels zur Höhe des Rechtecks.

Nun können wir das Netz der Schachtel zeichnen. Wir messen mit einem Messband den Umfang des Cylinders und haben die Länge des Rechtecks. Seine Höhe ist gleich der Cylinderhöhe. Der Radius misst 5 cm, der Durchmesser 1 dm, der Umfang 31,4 cm, die Schachtelhöhe = 2 dm.

Untersuche, wie oft der Durchmesser der Grundfläche im abgewickelten Umfang enthalten ist? 3,14 mal. Wie oft der Radius? 6,28 mal.

Fig. 18.



Massstab 1 : 10.

Schneiden wir aus Karton ein Rechteck von 31,4 cm Länge und 2 dm Höhe aus und rollen es auf, so erhalten wir den Mantel der Schachtel, die wir mit 2 Kreisen zuschliessen können, deren Durchmesser 1 dm messen. Jeder Durchmesser ist der 3,14. Teil von der Länge des Rechtecks.

3) Als zweites Beispiel wollen wir eine runde Zündhölzchenschachtel wählen. Prüfe, ob Grund- und Deckfläche genaue Kreise sind. Trenne Grund- und Deckfläche ab, schneide die Schachtel nach einer Seitenlinie auf, und wickle die Mantelfläche ab. Der Umfang der Schachtel misst 15,7 cm, ihr Durchmesser 5 cm. Der Durchmesser ist also $15,7 : 5 = 3,14$ mal im Umfange enthalten. Mit einem Kartonrechteck von 15,7 cm Länge können wir einen Cylinder von 5 cm Durchmesser bilden.

Verallgemeinerung. Stelle die gemeinsamen Merkmale dieser beiden Cylinder zusammen, und vergleiche ihre Konstruktion! Es ergibt sich:

Satz 23. Ein Cylinder ist begrenzt von 2 gleichen parallelen Kreisen als Grund- und Deckfläche und von einem runden Mantel als Seitenfläche, welcher die beiden Kreise in senkrechter Richtung verbindet. Der Abstand von Grund- und Deckfläche heisst Höhe des Cylinders.

Satz 24. Wickelt man den Mantel eines Cylinders ab, so erhält man ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Umfang des Cylinders, dessen Höhe gleich der Cylinderhöhe ist.

Mit einem Rechteck können wir den Mantel eines Cylinders von gleicher Höhe bilden, dessen Durchmesser der 3,14. Teil der Grundlinie des Rechtecks ist.

Satz 25. Der Umfang eines Kreises ist ungefähr 3,14 ($3\frac{1}{7}$) mal so lang wie sein Durchmesser. Der Durchmesser eines Kreises ist der 3,14. Teil vom Umfang.

Bemerkung. Es gibt Cylinderkörper, die viel genauer gearbeitet sind als die beiden Schachteln, die wir betrachtet und gemessen haben. Misst man einen genauen Cylinderkörper von 1 m Durchmesser, so erhält man für die Länge des Umfangs 3,141 m. Ein Cylinder von 10 m Durchmesser hat einen Umfang von 31,416 m u. s. f.; sein Durchmesser ist also im Umfange 3,1416 mal enthalten, oder Umfang: Durchmesser = 3,1416. Je grösser der Cylinder ist, um so leichter ist es, das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser genau zu bekommen. Man bezeichnet diese Zahl mit dem (griechischen) Buchstaben π und sagt: der Umfang sei = π mal den Durchmesser. π wäre also ungefähr 3,14, oder $3\frac{1}{7}$, genauer 3,1416. Der Durchmesser wird mit d . und der Radius mit r ., der Umfang mit u . bezeichnet. Die Bezeichnung: Kreisumfang = Kreisdurchmesser \cdot 3,14 wird kurz geschrieben: $u. = d\pi = 2 r\pi$ (weil $d. = 2 r$.)

Der
genauere
Wert von
 π .

Beim Kreis der ersten Schachtel wäre

$$u. = d\pi = 10 \cdot 3,14 = 31,4 \text{ cm,}$$

$$\text{genauer } u. = d\pi = 10 \cdot 3,1416 = 31,416 \text{ cm.}$$

Beim Kreis der zweiten Schachtel

$$u. = d\pi = 5 \cdot 3,14 = 15,7 \text{ cm,}$$

$$\text{genauer } u. = d\pi = 5 \cdot 3,1416 = 15,708 \text{ cm.}$$

Übungen.

1) Ein Rechteck aus Blech, dessen Grundlinie 50 cm und dessen Höhe 30 cm misst, soll zu einem Cylinder zusammengerollt werden. Wie gross ist der Radius der Grundfläche zu wählen, damit der Mantel genau passe?

Die Grundlinie des Rechtecks wird zum Umfang der Grundfläche, hat also die $3,14(\pi)$ fache Länge des Durchmessers.

$$\text{Umgekehrt ist der Durchmesser } 50 \text{ cm} : 3,14 = 15,9 \text{ cm}$$

$$\text{und der Radius ist } = 7,9 \text{ cm.}$$

Bemerkung. Die Beziehung: Durchmesser = Umfang : 3,1416, wird kurz geschrieben: $d. = u. : \pi$

Wie hoch wird der Cylinder?

2) Welchen Cylinder könnte man mit einem rechteckigen Lederstück einschliessen, dessen Länge = 2,2 m und dessen Höhe 1,2 m misst.

$$\pi = 3\frac{1}{7} \quad d. = u. : \pi = 22 \text{ dm} : 3\frac{1}{7} = 7 \text{ dm}$$

$$r. = d. : 2 = 3,5 \text{ cm.}$$

3) Miss die Umfänge und die Durchmesser von cylindrischen Gefässen und Gegenständen, und berechne die Verhältniszahl.

4) Man soll einen Reif von 1 m Durchmesser herstellen. Wie lang muss der Eisenstreifen gewählt werden?

5) Welchen Radius bekommt ein Reif, der mit einem Blechstreifen von 3 m Länge gebildet wird?

6) Welche Dimensionen hätte ein Cylinder, dessen Mantelfläche 1) gleich der Tischfläche, 2) gleich der Zimmer-Bodenfläche, 3) gleich der Wandfläche, 4) gleich den vier Wandflächen ist?

7) Ein Wagenrad hat einen Radius von 40 cm. Welchen Weg legt der Wagen zurück, während sich das Rad 10 mal herumdreht?

8) Zeichne im verkleinerten Massstab den Kreis, den ein Äquatorbewohner bei einer Umdrehung beschreibt. Ihr wisst, dass 1 m der 40000000ste Teil dieses Umfangs ist; wieviel km misst daher der Erdradius? Berechne den Weg in 1 Stunde.

9) Der Mond ist 50000 Meilen ($\approx 7\frac{1}{2}$ km) von der Erde entfernt und umkreist sie in $27\frac{1}{4}$ Tagen. Wie gross ist seine Bahn? Berechne den Weg in 1 Stunde.

10) Die Erde ist um 20000000 Meilen von der Sonne entfernt und dreht sich in $365\frac{1}{4}$ Tagen um sie. Welchen Weg legt die Erde in 1 Stunde zurück?

11) Vergleiche die Geschwindigkeiten des Äquatorbewohners, des Mondes, der Erde mit derjenigen eines Fussgängers, der Post, eines Schnellzuges.

II. Die Kreisteilung.

1) Das Zifferblatt der Uhr.

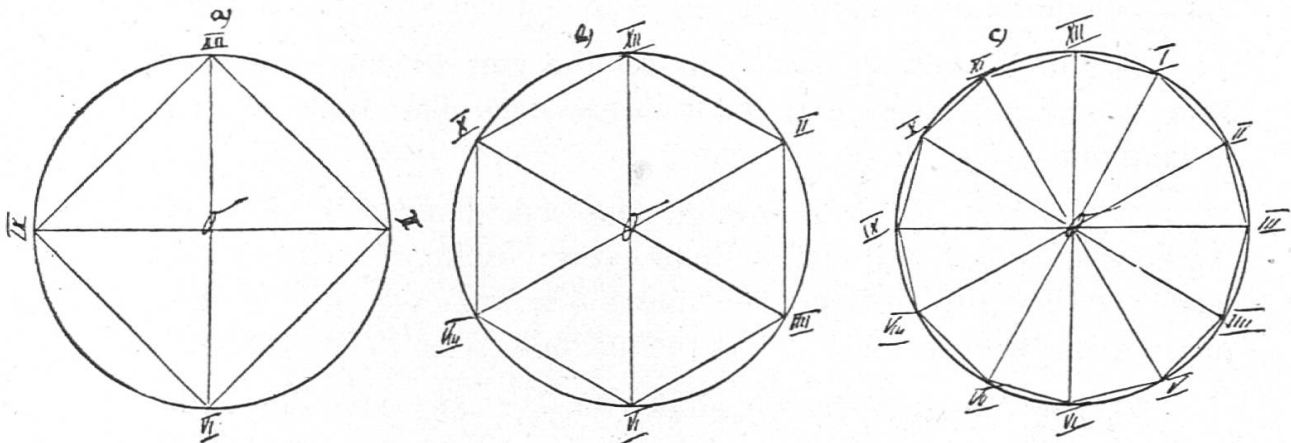
Beschreibe und zeichne das Zifferblatt.

Wir zeichnen den äussersten Kreis des Zifferblatts und bezeichnen den obersten Punkt mit XII. VI ist dann ihm gegenüber. XII und VI liegen auf einem Durchmesser. III und IX liegen auf dem Durchmesser, der zu diesen senkrecht steht. Diese 2 Durchmesser teilen die Kreisfläche und die Kreislinie in 4 gleiche Teile ein. Vergleiche auf dem Zifferblatt den Abstand der Punkte XII und II mit dem Kreisradius; er ist ihm gleich.

Das Zifferblatt.

Somit erhalten wir die Punkte II, IV, VIII, X, in dem wir von XII aus mit Hilfe des Zirkels den Radius in die Kreislinie eintragen. Wir sehen, dass der Radius sich 6 mal eintragen lässt. Indem wir den Radius von III aus 6 mal eintragen, bekommen wir die Teilpunkte V, VII, IX, XI, I. In wieviel gleiche Teile ist der Kreis auf diese Art eingeteilt worden? Wie ist er in 4 gleiche Teile, wie in 6, wie in 12 gleiche Teile eingeteilt worden?

Fig. 19.



Teile nun durch Probieren jedes Intervall in 5 gleiche Teile ein; dann ist der ganze Kreis in 60 gleiche Teile eingeteilt.

2) a) Zeichne den Kreis des Zifferblattes 3 mal nebeneinander. Teile den 1. in 4, den 2. in 6, den 3. in 12 gleiche Teile ein, und verbinde die benachbarten, sowie je zwei gegenüberliegende Teilpunkte. Dann entsteht im ersten Kreis ein Quadrat, das dem Kreise eingeschrieben heisst, im 2. ein regelmässiges Sechseck, im 3. ein regelmässiges Zwölfeck, die auch dem Kreise eingeschrieben heissen. Eine Seite einer dieser Figuren heisst *Sehne* des Kreises; sie verbindet 2 Peripheriepunkte des Kreises und schneidet von ihm ein Stück ab, das *Kreisabschnitt* oder *Kreissegment* heisst. Es ist begrenzt von der Sehne und vom zugehörigen Kreisbogen. In welchem Kreis sind die Segmente am grössten?

Die Sehne.
Das Segment.

b) Wie werden das Quadrat, das Sechseck, das Zwölfeck durch die Durchmesser eingeteilt? Das Quadrat in 4 gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, das Sechseck in 6 gleichseitige, das Zwölfeck in 6 gleichschenklige Dreiecke. Schneide in jedem Kreis ein solches Dreieck aus, und bringe es mit den andern zur Deckung 1) durch Drehung, 2) durch Umlegen.

c) *Wie werden die Kreisflächen durch diese Durchmesser eingeteilt?* Würden wir längs dieser Durchmesser Schnitte führen, so würde die erste Kreisfläche in 4, die zweite in 6, die dritte in 12 gleiche Teile zerlegt. Ein solcher Teil heisst *Kreisausschnitt* oder *Kreissektor*. Wovon wird ein solcher Sektor be-^{Der Sektor.}grenzt? Von 2 Radien und einem Bogen; wie setzt sich ein solcher Sektor zusammen? Aus dem gleichschenkligen Dreieck und aus dem Segment.

3) Zeichne den Kreis eines grössern oder kleinern Zifferblattes dreimal nebeneinander; teile ihn auf gleiche Weise in 4, 6, 12 gleiche Teile ein; zeichne das eingeschriebene Quadrat, das Sechseck und das Zwölfeck. Beschreibe die Segmente und Sektoren. ^{Zweites Beispiel.}

Verallgemeinerung. Wie konnten in beiden Fällen die Kreise eingeteilt werden? Was für Linien hat man Sehnen, was für Flächen Segmente, Sektoren genannt?

Satz 26. Zwei senkrechte Durchmesser teilen einen Kreis in 4 gleiche Teile ein. Der Radius lässt sich genau 6 mal als Sehne in die Peripherie eintragen. Um einen Kreis in 12 gleiche Teile einzuteilen, zieht man 2 senkrechte Durchmesser, und trägt mit dem Zirkel von allen 4 Endpunkten nach beiden Seiten den Radius ein.

Satz 27. Die Verbindungslinie zweier Kreispunkte heisst Sehne. Das Kreisstück, das von einer Sehne abgeschnitten wird, heisst Kreisabschnitt oder Segment. Es ist begrenzt von der Sehne und dem Bogen. Das Kreisstück, das von 2 Radien herausgeschnitten wird, heisst Kreisausschnitt oder Kreissektor. Dieser ist von 2 Radien und einem Bogen begrenzt.

Satz 28. Verbindet man die Teilpunkte eines in 4 gleiche Teile geteilten Kreises, so entsteht ein Quadrat, das dem Kreise eingeschrieben heisst. Es wird durch die Verbindungslinien gegenüberliegender Endpunkte in 4 kongruente rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

Verbindet man die Teilpunkte eines in 6 gleiche Teile geteilten Kreises, so entsteht ein regelmässiges Sechseck, das dem Kreise eingeschrieben heisst. Es wird durch die Verbindungslinie je zweier einander gegenüberliegenden Eckpunkte in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt u. s. f.

III. Berechnung des Inhalts des regelmässigen Sechsecks, der sechsseitigen Säule, des Kreises und des Cylinders.

1. Berechnung des regelmässigen Sechsecks und des sechsseitigen Prismas.

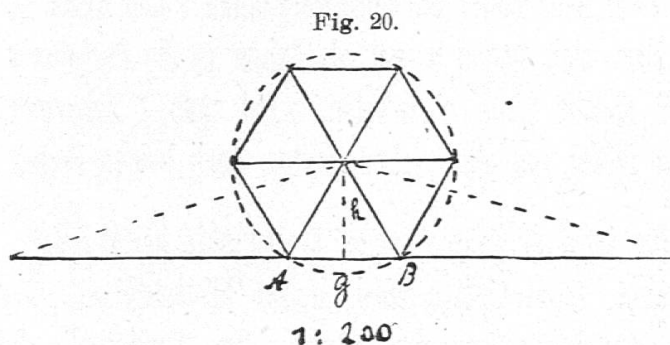
Aufgabe 1. *Wieviel Liter Wasser hält ein Brunnen (St. Martinsbrunnen in Chur), dessen Umfang ein regelmässiges Sechseck von 2,3 m Länge ist, und dessen Höhe 0,9 m misst?*

Beschreibe den Brunnen. Der Form nach heisst er eine *gerade sechsseitige Säule*.

a) Wir wollen zunächst die Grundfläche zeichnen und berechnen. Die 6 Eckpunkte liegen auf einem Kreis, dessen Radius gleich der Seite des Sechsecks ist. In diesen Kreis haben wir den Radius sechsmal als Sehne einzutragen.

Wie kann man dieses Sechseck berechnen?

Berechnung der Grundfläche.



Berechnung des Sechsecks.

Bezeichnen wir die Grundlinie eines Dreiecks mit g , seine Höhe mit h (2 m), so ist sein Inhalt

$$= \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2,3 \cdot 2}{2} \text{ m}^2$$

Inhalts des Sechsecks

$$= 6 \cdot \frac{g \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot g \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 2,3 \cdot 2}{2} = 13,8 \text{ m}^2.$$

Wir können das ausrechnen, indem wir zuerst sechsmal die Grundlinie nehmen, das Ergebnis mit der Höhe multiplizieren und durch 2 dividieren. $6 \cdot g$ ist aber der Umfang des Sechsecks, somit:

$$\text{Inhalt des Sechsecks} = \frac{\text{Umfang} \times \text{Dreieckshöhe}}{2} = \frac{u \cdot h}{2}$$

Einen solchen Inhalt hat aber auch ein Dreieck, dessen Grundlinie so lang ist wie der Umfang des Sechsecks, und dessen Höhe gleich der Dreieckshöhe h ist.

Zeichne dieses Dreieck (Fig. 20).

$$\text{Inhalt} = \frac{6 g \cdot h}{2} = \frac{13,8 \cdot 2}{2} \text{ m}^2 = 13,8 \text{ m}^2.$$

Dieses Dreieck ist gleich einem Rechtek von gleicher Höhe und halber Grundlinie.

Unser Sechseck ist also inhaltsgleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich dem Umfang des Sechsecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines seiner Dreiecke ist. Es ist auch inhaltsgleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem halben Umfange des Sechsecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines seiner Dreiecke ist.

b) Der Brunnenkörper ist zusammengesetzt aus 6 dreiseitigen Prismen. Inhalt des
Brunnens.

Der Inhalt des Prismas über $A B O$ ist $= \triangle A B O \cdot \text{Höhe}$
 $= \frac{2,3 \cdot 2}{2} \cdot 0,9 \text{ m}^3.$

Der Inhalt des Brunnen $= 6 \cdot \triangle A B O \cdot \text{Höhe} =$
Sechseck \times Höhe des Brunnen $= 13,8 \cdot 0,9 \text{ m}^3 = 12,42 \text{ m}^3.$

Der Brunnen hält also 12420 Liter Wasser.

Zeichne das Netz des Brunnen, und konstruiere ihn aus Karton.

Aufgabe 2. *Miss eine sechsseitige Säule aus, zeichne und berechne sie.*

Wie sind die beiden Sechsecke und die 2 sechsseitigen Prismen berechnet worden? Gib die allgemeine Regel an.

2. Berechnung des Kreises.

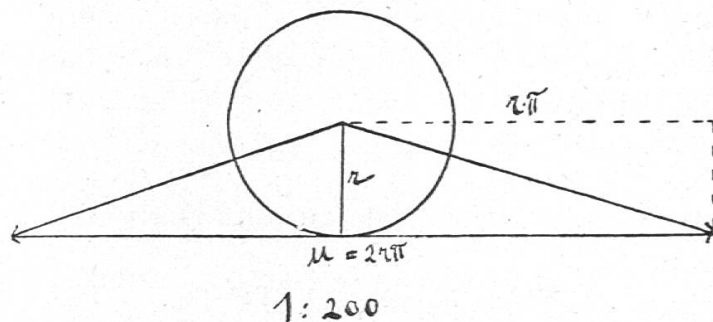
Nun wollen wir zeigen, wie der dem Brunnen umbeschriebene Kreis berechnet wird. Inhalt
des
Kreises.

Zeichne den Kreis, in welchen die Grundfläche des Brunnen eingezeichnet wurde, nochmals; teile ihn in 12 gleiche Teile ein; berechne auf gleiche Weise wie das Sechseck auch das Zwölfeck, und zeige, dass es gleichen Inhalt hat wie ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Zwölfecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines Dreiecks des Zwölfecks ist.

Wie würde ein 24-Eck, ein 48-Eck u. s. w. berechnet? Wie der Kreis? Wir können uns den Kreis in unzählige viele gleiche Teile eingeteilt denken, die als Höhe den Radius haben, und deren Grundlinien zusammen den Umfang ausmachen. Unser Kreis wird mit einem Dreiecke inhaltsgleich sein, dessen Grundlinie der Kreisumfang und dessen Höhe der Radius ist, oder er ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem halben Umfang, dessen Höhe gleich dem Radius ist.

Zeichne dieses Dreieck und dieses Rechteck:

Fig. 21.



$$\text{Peripherie} = 2 r \cdot \pi.$$

$$\text{Grundlinie des Dreiecks} = 2 \cdot r \cdot \pi. \text{ Sein Inhalt} = \frac{u \cdot r}{2}$$

$$\text{„ „ Rechtecks} = r \cdot \pi$$

$$\text{Höhe „ „} = r.$$

$$\text{Inhalt des Kreises} = \text{Inhalt des Rechtecks}$$

$$= r \cdot \pi \cdot r = r \cdot r \cdot \pi = \frac{u \cdot r}{2}$$

$$= 2,3 \cdot 2,3 \cdot 3,14 \text{ m}^2 = 16,61 \text{ m}^2.$$

3. Berechnung des Cylinders.

a) *Berechnung der Cylinderschachtel, die zuerst betrachtet wurde.*

Zeichne nochmals die Grundfläche dieser Schachtel ($r = 5 \text{ cm}$). Zeige, wie man den Inhalt des ihr eingeschriebenen Sechsecks und Zwölfecks bestimmen kann, und mache den Übergang zum Kreis. Zeichne das Dreieck und das Rechteck, die mit dem Kreise inhaltsgleich sind.

Oberfläche
der
Schachtel.

$$\text{Inhalt dieses Kreises} = r \cdot r \cdot \pi = 5 \cdot 5 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 = 78,5 \text{ cm}^2.$$

Zeichne nochmals das Netz, und berechne die ganze Oberfläche.

$$\begin{aligned} \text{Mantel} &= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot H = 10 \cdot 3,14 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 628 \text{ cm}^2. \\ \text{Grund- u. Deckfläche} &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi = \underline{2 \cdot 5^2 \cdot 3,14 \text{ cm}^2} = \underline{157 \text{ cm}^2}. \\ \text{Ganze Oberfläche} &= \underline{\hspace{10em}} = 785 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Welches Volumen hat diese Schachtel?

Konstruiere aus Karton das rechtwinklige Prisma, welches das dem Kreise inhaltsgleiche Rechteck zur Grundfläche hat und gleich hoch wie unsere Cylinderschachtel ist, und vergleiche dieses Prisma mit der Schachtel. Wie verhält es sich mit ihren Inhalten? Sie sind gleich; denn wir können uns den Cylinder in dieses Prisma verwandelt denken. Fülle beide Körper mit Sand, und zeige, dass sie gleich viel halten.

Inhalt
der
Schachtel.

$$\text{Inhalt des Prismas} = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = r \cdot r \cdot \pi \cdot H = 5 \cdot 5 \cdot 3,14 \cdot 20 \text{ cm}^3 = \text{folglich:}$$

$$\text{Inhalt der Cylinderschachtel} = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = r \cdot r \cdot \pi \cdot h = 78,50 \cdot 20 = 1570 \text{ cm}^3.$$

Für die Berechnung des Inhalts dieser Cylinderschachtel gilt demnach die Regel:

$$J. = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = r \cdot r \cdot \pi \cdot H.$$

b) Erkläre die Berechnung der Zündhölzchenschachtel auf gleiche Weise. $d. = 5 \text{ cm}$, $h. = 6 \text{ cm}$. Kurze Darstellung:

$$\text{Grundfläche} = r \cdot r \cdot \pi = 2^{1/2} \cdot 2^{1/2} \cdot 3,14 \text{ cm}^2 = 19,625 \text{ m}^2$$

$$\text{Deckfläche} = \hspace{10em} = 19,625 \text{ m}^2$$

$$\text{Mantel} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot H = 2 \cdot 2^{1/2} \cdot 3,14 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 94,2 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Ganze Oberfläche} = \hspace{10em} 133,45 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Inhalt} = G \cdot H = r \cdot r \cdot \pi \cdot H = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 3,14 \cdot 6 \text{ cm}^3 = 117,75 \text{ cm}^3.$$

Verallgemeinerung. Wie haben wir in all diesen Fällen die Kreisfläche, wie das Cylinder-Volumen berechnet? Daraus folgt:

Satz 29.

a) Flächeninhalt des Kreises $f. = r \cdot r \cdot \pi = \frac{u \cdot r}{2}$

b) Flächeninhalt des Cylindermantels $f. = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot H.$

c) Rauminhalt des Cylinderkörpers $J. = r \cdot r \cdot \pi \cdot H = G \cdot H.$

Übungen.

- 1) Miss verschiedene Cylinderkörper, und berechne sie.
- 2) Berechne die Grundfläche und das Volumen der Cylinderkörper von Übung 1, 2, 6 des vorhergehenden Abschnitts.

3) Was kostet der dreimalige Anstrich einer runden Stützsäule von 4 m Höhe und 1,88 m Umfang à 1 Fr. 30 pro m²?

4) Ein Milcheimer hat einen Durchmesser und eine Höhe (innerhalb gemessen) von 24 cm. Wieviel Liter hält er?

5) Das Wasserreservoir einer Gemeinde hat Cylinderform und ist 4 m breit und 4 m hoch. Wieviel Wasser hält es? In welcher Zeit wird es durch 4 Hydranten geleert, durch welche pro Minute je 125 Liter fließen?

6) Ein Hydrantenschlauch hat eine Länge von 20 m und innen einen Durchmesser von 3 cm. Wieviel Wasser hält er? Wieviel Stoff hat man zu seiner Herstellung verwendet?

7) Was kosten folgende Baumstämme à 30 Fr. pro m³:

a) Mittlerer Durchmesser = 42 cm, Länge = 4,8 m.

b) „ „ = 54 cm, „ = 5,4 „

Man berechnet den mittleren Querschnitt und multipliziert seine Masszahl mit der Länge.

8) Wieviel wiegt eine runde Quecksilbersäule von 1 cm Durchmesser und 76 cm Höhe, wenn das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,6 beträgt?

9) Wieviel wiegt eine Maschinenwelle von 4,5 m Länge und 6 cm Dicke, wenn ihr spezifisches Gewicht 7,4 beträgt?

10) Wieviel wiegt ein aufgerollter Kupferdraht von 3 mm Dicke und 1000 m Länge, wenn das spezifische Gewicht des Kupferdrahts 8,8 beträgt?

F. Der Winkelbegriff.

I. Beschreibung und Messung des Winkels.

1) Bei der Beschreibung des Balkens haben wir den Begriff „Rechter Winkel“ erklärt und gesehen, dass je 2 zusammenstossende Flächen und 2 zusammenstossende Kanten einen rechten Winkel bilden.

Die verschiedenen Neigungen von Dachflächen.

Beim Estrichraum hatten die Flächen und Kanten eine andere gegenseitige Lage. Bei der Vergleichung verschiedener Dächer zeigte es sich, dass die Dachfläche des einen Daches nicht gleich geneigt ist wie die eines anderen. Bei welchen Dächern ist die Neigung gross, bei welchen klein? Kirchen-