

Beziehungen zwischen Winkeln

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145627>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

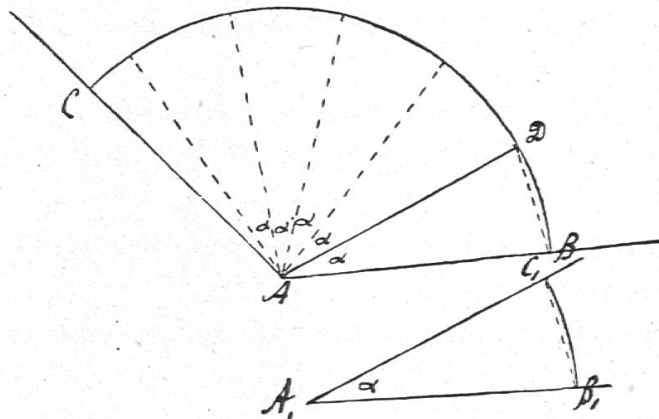
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

mit dem Zirkel einen Bogen vom gleichen Radius bei A und A' beschreiben, die Sehne BS in den Zirkel nehmen und sie bei Figur b) vom Schnittpunkte des 2. Bogens mit A' B' aus abtragen.

10) Zeichne mit Hilfe des Zirkels einen Winkel, der doppelt, dreimal so gross wie ein gegebener Winkel ist.

11) Vergleiche zwei Winkel mit Hilfe des Zirkels; sieh 1) nach, um wieviel ein grösserer Winkel grösser ist als ein kleinerer, und 2) wie oft der kleine im grossen enthalten ist.

Fig. 28.



W. B A C ist um den Winkel D A C grösser als W. B₁ A₁ C₁. W. B₁ A₁ C₁ lässt sich ungefähr $5\frac{1}{3}$ mal in den Winkel B A C hineinlegen.

12) Konstruiere einen Winkel, welcher gleich der Summe der 3 Winkel eines Dreiecks ist.

Es zeigt sich: die 3 Winkel α , β , γ des Dreiecks A B C bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Miss den Winkel mit dem Transporteur, und bilde ihre Summe.

G. Beziehungen zwischen Winkeln.

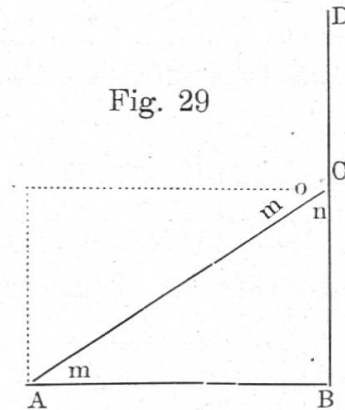
I. Nebenwinkel.

1) Aufgabe. Man befindet sich auf einem Pulldache und möchte mit einem grossen Holztransporteur den Winkel messen, den die Dachfläche 1) mit der rechteckigen Wandfläche, 2) mit der Bodenfläche bildet.

Es sollen also W. m und W. n (Fig. 29) gemessen werden. Sie lassen sich nicht direkt messen. Wir können aber leicht den

Winkel $D C A$ (o) messen, den $A C$ mit der Verlängerung der vertikalen Giebelkante $B C$ bildet. $C D$ können wir durch eine Latte markieren. Wir finden hier $W. D C A$ oder $W. o = 123^\circ$. Wie erhalten wir nun $W. n$? $W. o + W. n = 180^\circ$, denn sie bilden einen gestreckten Winkel, folglich $W. n = 180^\circ - W. o = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$.

Indirekte
Messung
der
Giebel-
winkel.



Man nennt $W. o$ den *Nebenwinkel* des Winkels n . Er hat mit ihm einen Schenkel ($A C$) und den Scheitel gemeinsam; die beiden andern Schenkel, $C B$ und $C D$, laufen nach entgegengesetzter Richtung.

Neben-
winkel.

Wie erhalten wir nun $W. m$?

Wir überlegen folgendes: ergänzen wir das Dreieck $A B C$ zu einem Rechteck, indem wir das Dreieck $A B C$ drehen und an $A C$ anlegen, so erscheint $W. m$ bei $W. n$ und ergänzt ihn zu einem rechten Winkel. Somit:

$$W. m = 90^\circ - W. n = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ.$$

Die beiden Winkel an der Hypotenuse $A C$ des rechtwinkligen Dreiecks $A B C$ ergänzen sich zu 90° . Man nennt deshalb $W. m$ und $W. n$ auch *Komplementswinkel*. $W. n$ und $W. o$ heißen auch *Supplementswinkel*.

2) Zeichne eine zweite rechtwinklige (dreiseitige) Giebelfläche, und wiederhole die gleichen Betrachtungen.

Zweites
Beispiel.

3) Zeichne einen beliebigen Winkel, und konstruiere seinen Nebenwinkel. Auf welche Arten kann das geschehen? Die beiden Nebenwinkel des gegebenen Winkels sind einander gleich; denn beide ergänzen diesen zu 180° . Zeichne auch bei den Giebeldreiecken den zweiten Nebenwinkel von $W. n$.

Verallgemeinerung. Wie erhielten wir in diesen Fällen den Nebenwinkel? Was konnten wir über ihn aussagen?

Satz 33. a) Man erhält den Nebenwinkel eines gegebenen Winkels, indem man den einen seiner Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus verlängert. Zwei Nebenwinkel haben daher einen Schenkel und den Scheitel gemeinsam; die beiden andern Schenkel laufen nach entgegengesetzter Richtung.

b) Zwei Nebenwinkel ergänzen einander zu 180° und heissen deshalb auch Supplementwinkel.

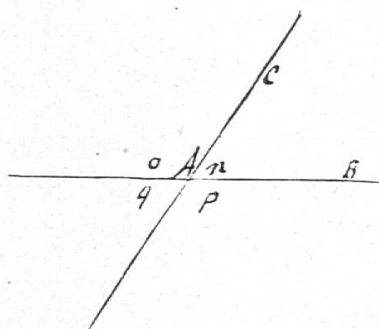
c) Jeder Winkel hat zwei Nebenwinkel, die einander gleich sind.

II. Scheitelwinkel.

Scheitel-
winkel.

Wir wollen die beiden Nebenwinkel eines gegebenen Winkels $C A B$ oder n betrachten (Fig. 30).

Fig. 30.



$$\left. \begin{array}{l} W. o = 180^\circ - W. n \\ W. p = 180^\circ - W. n \end{array} \right\} \text{folglich } W. o = W. p. (= 123^\circ)$$

$W. p$ heisst der Scheitelwinkel des Winkels o . Er entsteht, indem man die Schenkel des $W. o$ verlängert.

Welches ist der Scheitelwinkel von $W. n$? Das ist q . $W. n. = W. q$ Warum? Wie entsteht $W. q$ aus $W. n$? Zeichne einen beliebigen Winkel und seinen Scheitelwinkel.

Verallgemeinerung. Satz 34. Man zeichnet zu einem gegebenen Winkel seinen Scheitelwinkel, indem man seine Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus verlängert. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

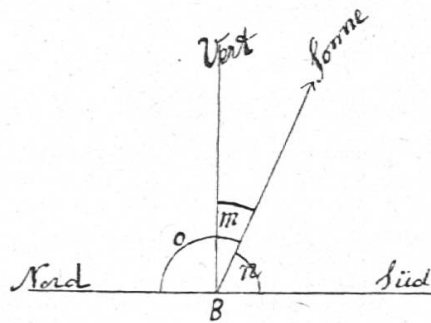
Übungen.

1) Berechne und konstruiere den Scheitelwinkel und den Nebenwinkel 1) eines $W.$ von 47° , 2) von 122° .

2) Der Sonnenstrahl bildet an einem Ort Graubündens am 21. Juni mittags 12 Uhr mit der Südrichtung einen Winkel n von $66^\circ 32' 30''$. Welchen Winkel bildet dieser Strahl 1) mit der Vertikalen 2) mit der Nordrichtung?

$$\begin{array}{r}
 W. n = 66^{\circ} 32' 30'' \\
 W. m = 89^{\circ} 59' 60'' \\
 \quad - 66^{\circ} 32' 30'' \\
 \hline
 W. m = 23^{\circ} 27' 30''
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 189^{\circ} 59' 60'' \\
 \quad - 66^{\circ} 32' 30'' \\
 \hline
 W. o = 113^{\circ} 27' 30'' = W \text{ (NB Sonne)}
 \end{array}$$

Fig. 32.



Am 21. März ist $W. n$ um $23^{\circ} 27' 30''$ kleiner. Berechne für diesen Tag die Winkel m und o .

III. Die Beziehung zwischen den Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks.

Bei der Lösung der ersten Aufgabe haben wir gesehen, dass $W. m + W. n = 90^{\circ}$ (Fig. 29). Zeichne ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, und beweise, dass die Winkel an der Hypotenuse Komplementwinkel sind. Die Summe aller drei Winkel beträgt demnach bei jedem der betrachteten rechtwinkligen Dreiecke 180° .

Die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks.

Verallgemeinerung. Satz 35. Die beiden Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ergänzen sich zu 90° und heissen deshalb auch Komplementwinkel.

Die Summe der drei Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 180° .

Übungen.

- 1) Eine schräge Giebelkante bilde mit der vertikalen Stützsäule einen Winkel von 59° ; welchen Winkel bildet sie mit der wagerechten Giebelkante?
- 2) Ein Sonnenstrahl bilde, wenn die Sonne am höchsten steht, mit der wagerechten Südrichtung einen Winkel von $42^{\circ} 36' 14''$. Welchen Winkel bildet er mit einem vertikalen Stab?
- 3) Welchen Winkel bildet eine Quadratdiagonale mit den Seiten?

IV. Beziehung zwischen den Winkeln eines jeden Dreiecks.

1) Aufgabe. *Miss von der Firstkante eines ungleichseitigen Giebeldaches aus die Dachwinkel.*

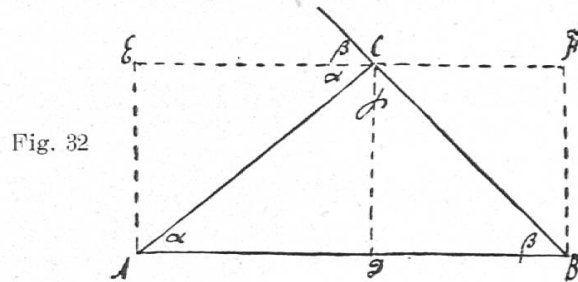


Fig. 32

Indirekte
Messung
der
Giebel-
winkel.

Wir wiederholen hier die gleiche Überlegung wie beim rechtwinkligen dreiseitigen Giebel.

Das Dreieck $A B C$ kann zu einem Rechteck ergänzt werden, indem man $\triangle A D C$ links und $\triangle B D C$ rechts hinaufdreht. Dann erscheinen $W. \alpha$ und $W. \beta$ bei C und bilden mit γ einen gestreckten Winkel.

Winkel-
summe im
Dreieck.

$$W. \alpha + W. \beta + W. \gamma = 180^\circ.$$

Halten wir also eine Latte genau wagerecht und rechtwinklig zur Firstkante, so bildet sie mit der Giebelkante $A C$ den Winkel α und mit $B C$ den Winkel β , welche wir mit dem Transporteur messen können. Wir finden hier $W. \alpha = 39^\circ$, $W. \beta = 45^\circ$.

Welchen Winkel bilden die beiden Dachflächen miteinander?

$$\begin{aligned} W. \gamma + 39^\circ + 45^\circ &= 180^\circ \\ W. \gamma &= 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ. \end{aligned}$$

Wie haben wir hier den Dreieckswinkel γ erhalten? Indem wir die zwei andern von 180° abgezogen haben.

Zweiter
Beweis.

2) *Wir wollen auch mit Hilfe eines Stocks zeigen, dass die drei Winkel von $\triangle A B C$ zusammen 180° betragen.*

Lege den Stock an die Tafel, und markiere die Richtung des Griffes. Drehe ihn dann um 180° ; dann sieht der Griff nach der entgegengesetzten Richtung. Lege alsdann den Stock auf AB ; achte auf die Richtung des Griffes; halte ihn bei A fest, und drehe ihn im Sinne links um α° (39°) so, dass er auf die Richtung von $A C$ fällt; halte ihn dann bei C fest, und drehe ihn im gleichen Sinne um γ ($= 96^\circ$); dann fällt er auf $C B$. Halte endlich den

Stock bei B fest, und drehe ihn im Sinne links um β ($= 45^\circ$); so kommt er auf A B zu liegen, und der Griff sieht nach der entgegengesetzten Richtung. Man hat daher den Stock um 180° links um gedreht. Folglich $\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ = 180^\circ$.

3) Den Winkel β könnten wir auch auf der linken Dachfläche messen, indem wir die Kante B C durch eine Latte C G verlängern und den Winkel messen, den diese mit der wagerechten Latte C E bildet. Dieser Winkel ist ja Scheitelwinkel von β .

Möchten wir nur den Winkel γ kennen, so würden wir seinen Nebenwinkel A C G messen. Dieser heisst *Aussenwinkel* des Dreiecks A B C; er wird von der Seite A C und von der Verlängerung von B C gebildet und setzt sich aus α und β zusammen, d. h. aus den beiden inneren Dreieckswinkeln, die ihm gegenüber liegen.

Aussen-
winkel.

Zeichne auch den zweiten Aussenwinkel bei C, indem du A C statt B C verlängerst. Er ist der Scheitelwinkel zum ersten.

Zeichne auch den Aussenwinkel an der Ecke A. Er ist $= 180^\circ - \alpha = \beta + \gamma = 141^\circ$. Was gilt vom Aussenwinkel bei B? Wie gross ist die Summe der 3 Aussenwinkel?

Aufgabe. Zeichne auch einen Giebel bei dem die Dachflächen sich an der Firstkante unter spitzem Winkel treffen, und wiederhole dieselben Betrachtungen.

Verallgemeinerung. Was haben wir in beiden Fällen bezüglich der Winkelsumme des Dreiecks und bezüglich des Aussenwinkels gezeigt? Es gilt allgemein:

Satz 36. Die Summe der drei Winkel eines jeden Dreiecks beträgt 180° . Sind zwei Dreieckswinkel bekannt, so erhält man daher den dritten, indem man die beiden andern addiert und ihre Summe von 180° abzieht.

Satz 37. Ein Aussenwinkel eines Dreiecks wird von einer Dreiecksseite und der Verlängerung einer zweiten Seite gebildet. Er misst so viel wie die beiden ihm gegenüber liegenden innern Dreieckswinkel.

Übungen.

1) Welche Neigung haben die schrägen Kanten eines gleichschenkligen Giebels A B C, wenn sie miteinander einen Winkel von 114° bilden?

Die beiden Winkel an der Grundlinie A B sind einander gleich, weil die Höhe das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente Dreiecke teilt.

$$\text{Somit } 2 \alpha = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$$

$$\alpha = \frac{66^\circ}{2} = 33^\circ$$

Wie erhält man daher einen Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze gegeben ist?

2) Berechne α , 1) wenn $\gamma = 86^\circ 47' 44''$, 2) wenn $\gamma = 90^\circ$.

3) Die Dachflächen eines gleichschenkligen Daches haben je eine Neigung von 30° . Welchen Winkel bilden sie miteinander?

Die beiden Winkel an der Grundlinie betragen zusammen $= 60^\circ = 2 \alpha$. γ ist hierzu das Supplement $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Wie gross ist der Aussenwinkel bei C?

Wie berechnet man aus dem Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks den Winkel an der Spitze?

4) Berechne γ , 1) wenn $\alpha = 60^\circ$, 2) wenn $\alpha = 24^\circ 17'$.

V. Einteilung der Dreiecke bezüglich der Winkel.

Wir wollen aus der Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ noch einige Folgerungen ziehen.

a) Zeichne ein Dreieck A B C, in welchem $\alpha = 120^\circ$ ist. Was gilt von β und γ ?

Wieviel stumpfe Winkel kann ein Dreieck haben?

Stumpf-
winkliges
Dreieck.

Besitzt ein Dreieck einen stumpfen Winkel, so heisst es ein stumpfwinkliges Dreieck.

b) Zeichne A B C so, dass $\alpha = 90^\circ$ ist. Was gilt von β und γ ? Kann das Dreieck noch einen zweiten rechten Winkel haben?

Recht-
winkliges
Dreieck.

Ein Dreieck, das einen rechten Winkel besitzt, heisst ein rechtwinkliges Dreieck. Wie heissen seine Seiten?

Spitzwin-
kliges
Dreieck.

c) Zeichne ein Dreieck, das nur spitze Winkel besitzt. Wie gross ist jeder Winkel, wenn alle gleich sind?

Ein Dreieck, das nur spitze Winkel hat, heisst spitzwinkliges Dreieck.

Man teilt die Dreiecke in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke ein.

H. Konstruktion von Dreiecken aus gegebenen Stücken.

I. Gegeben alle drei Seiten.

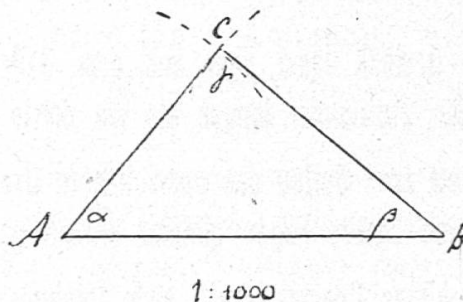
1) Es soll der Plan einer dreiseitigen Wiese gezeichnet werden.

Wir messen ihre Seiten mit Hilfe zweier Messlatten oder eines Messbandes. Es sei gemessen worden $AB = 40$ m, $BC = 30$ m, $AC = 25$ m. Wir stellen 1 m in der Natur durch 1 mm in der Zeichnung dar, so dass in der Zeichnung $AB = 4$ cm, $AC = 2,5$ cm, $BC = 3$ cm wird.

Konstruktion aus drei Seiten.

Trage zuerst $AB = 4$ cm auf, und beschreibe um A als Mittelpunkt einen Kreisbogen mit einem Radius von 2,5 cm ($= AC$), um B einen solchen mit Radius 3 cm ($= BC$). Der Schnittpunkt der beiden Bogen ist der dritte Eckpunkt des Dreiecks. Zeige, dass es die vorgeschriebenen Seiten hat.

Fig. 33.



Hätte man die Kreisbogen auch nach unten gezeichnet, so wäre ein zu ABC symmetrisches Dreieck entstanden.

Miss die Winkel des Dreiecks. Alle Schüler bekommen dieselben Winkel. Welches ist der grösste Winkel? Welcher Seite liegt er gegenüber? der grössten. Der kleinste Winkel β liegt der kleinsten Seite gegenüber.