

Das schiefwinklige Parallelogramm

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145629>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2) Zeichne das Dreieck A B C aus $b = 8 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$ und $\beta = 40^\circ$.

J. Das schiefwinklige Parallelogramm.

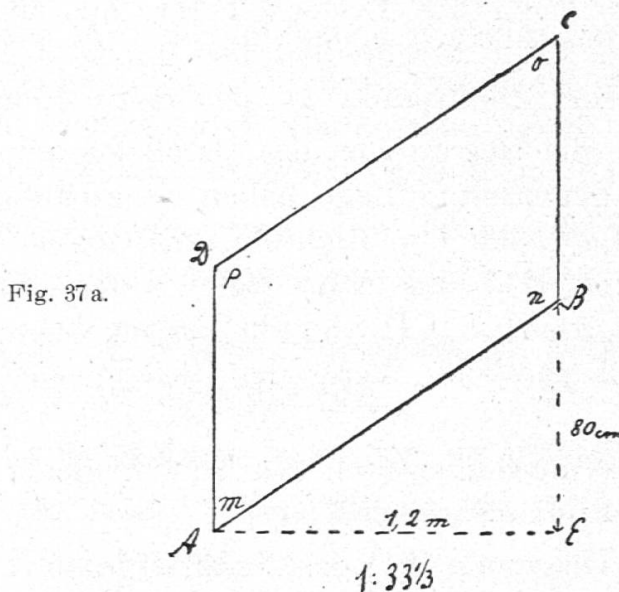
I. Eigenschaften und Konstruktion des schiefwinkligen Parallelogramms.

1) Wir befinden uns vor einer einfachen Steintreppe mit Eisengeländer am Eingange eines Hauses. Besprich den Zweck der Treppe etc.

Beschreibung des Eisengeländers.

Aufgabe. *Es soll das Eisengeländer gezeichnet werden.*

a) Welche Masse müssen wir nehmen? Wir messen $A E = 1,2 \text{ m}$, $A D = B C = 90 \text{ cm}$, $B E = 80 \text{ cm}$ (Fig. 37 a). Dann können wir leicht die Figur A E B C D zeichnen.



Wir wollen nun die Geländerfläche A B C D genauer betrachten.

Die beiden Stäbe A D und B C sind beide vertikal, also parallel und auch gleich lang. Die Stangen A B und C D messen je 144 cm und haben gleiche Neigung (nämlich 33°), sind also auch parallel.

Wir nennen die Fläche A B C D ein *Parallelogramm*.

Je zwei Gegenseiten sind gleich und parallel.

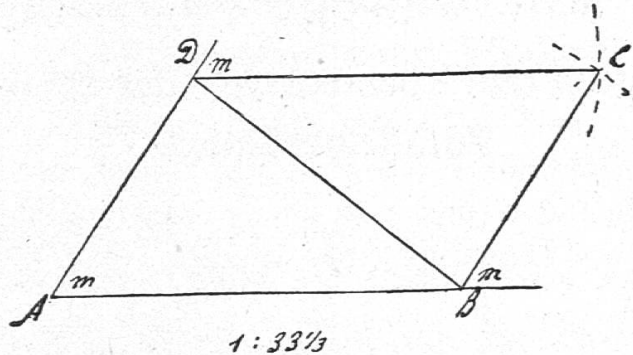
Miss auch die Winkel. Die Winkel m und o heißen Gegenwinkel, ebenso die Winkel n und p, $W. m = 57^\circ = W. o$, $W. n = 123^\circ = W. p$.

Je zwei Gegenwinkel sind einander gleich. Das eine Paar ist spitz, das andere stumpf.

Erste Konstruktion des Parallelogramms.

b) Wir wollen nun das Parallelogramm A B C D herauszeichnen und ihm eine beliebige Lage geben. Wie geschieht das?

Fig. 37 b.



Wir tragen zuerst A B ab, dann den Winkel m und machen seinen zweiten Schenkel gleich A D. Ziehen wir die Verbindungslinie D B, welche *Diagonale* des Parallelogramms heisst, so brauchen wir bloss noch das Dreieck D B C aus seinen drei Seiten zu zeichnen. Wir beschreiben also um D einen Bogen mit Radius D C. Ihr Schnittpunkt ist der vierte Eckpunkt C.

So haben wir die Gegenseiten des Parallelogramms gleich gemacht. Welche gegenseitige Lage haben sie erhalten? Prüfe ihre Abstände. Miss auch den Richtungsunterschied von A D und A B, sowie von B C und A B. Beide Unterschiede sind 57° , also einander gleich. A D und B C haben daher dieselbe Richtung oder sind parallel. Weise das Gleiche von A B und D C nach.

Indem wir also die Gegenseiten von A B C D gleich gemacht haben, erhielten sie auch parallele Lage.

Wie teilt die Diagonale B D das Parallelogramm?

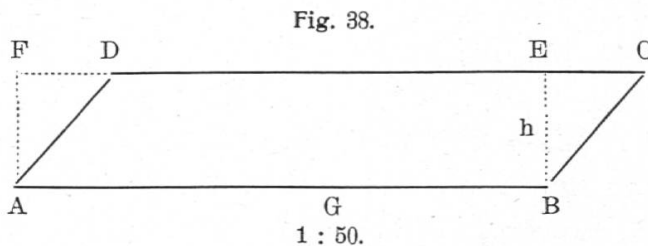
Zweite Konstruktion.

c) 2. Konstruktion. Wir zeichnen wieder zuerst A B, dann $\angle m$ und A D. Nachher tragen wir $\angle m = 57^\circ$ bei B und D ab. Vergleiche dann die Länge der Gegenseiten. Wie gross ist die Summe aller vier Winkel des Parallelogramms? Sie machen die Winkel der beiden Dreiecke A B D und B C D aus; *folglich ist* ihre Summe = 360° . Zwei anstossende W. ergänzen sich daher zu 180° .

2) *Betrachte eine Treppe vor einem Hause mit Mauer-
geländer. Es soll die Seitenansicht dieser Geländermauer
gezeichnet werden.*

Miss diese Seitenansicht aus. Sie ist von vier Seiten begrenzt. Das vertikale Paar von Gegenseiten misst je 80 cm. Die beiden schrägen Seiten messen je 2 m 70 cm und sind parallel. Diese Fläche ist auch ein Parallelogramm. Um es zeichnen zu können, messen wir noch die Diagonale $DB = 2,25$ m und zeichnen dann die beiden Dreiecke ABD und BCD aus ihren drei Seiten.

Die beiden Dreiecke ABD und BCD sind kongruent. Warum?



Miss auch die Winkel dieses Parallelogramms, und weise nach, dass auch hier dieselben Beziehungen bestehen wie beim Parallelogramm, das wir zuerst gezeichnet haben.

Auf welche Arten könnte man dieses Parallelogramm noch zeichnen? Welche Diagonale könnte man noch ziehen?

Verallgemeinerung. Gib die gemeinsamen Merkmale der beiden gezeichneten Vierecke an. Wie haben wir sie konstruiert?

Satz 42. a) In einem Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten gleich und parallel und je zwei Gegenwinkel gleich.

b) Ein Parallelogramm zeichnet man aus zwei anstossenden Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel oder aus zwei anstossenden Seiten und aus der Diagonale, die sie verbindet.

c) Eine Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke.

d) Die Summe der vier Winkel eines Parallelogramms beträgt vier Rechte. Je zwei anstossende Winkel ergänzen sich zu zwei Rechten.

II. Inhalt des schiefwinkligen Parallelogramms.

1) Aufgabe. *Berechne die Erstellungskosten der vorhin besprochenen Geländermauer à 15 Fr. pro m^3 .*

a) Wir werden zuerst das Volumen der Mauer zu berechnen haben. Denken wir uns die Mauer so umgelegt, dass ein Parallelo-

Berechnung der Geländermauer.

gramm auf den Boden kommt, so sehen wir, dass sie als vierseitiges senkrecht Prisma aufgefasst werden kann, dessen Grundfläche das Parallelogramm, dessen Höhe die Mauerdicke ist ($= 40$ cm). Ein solches Prisma wird aber nach der Regel $J = G \times H$ berechnet. Daher müssen wir zuerst das Parallelogramm berechnen.

b) Wir denken uns über AB das Rechteck $ABEF$ gezeichnet. Dieses kann man aus dem Parallelogramm $ABCD$ hervorgehen lassen, indem man rechts das Dreieck BCE abschneidet und es links anlegt. Dadurch geht das Parallelogramm $ABCD$ in das inhaltsgleiche Rechteck $ABEF$ über, dessen Inhalt gefunden wird, indem man die Grundlinie AB und die Höhe BE (h) misst und ihre Masszahlen multipliziert. Dieses Produkt liefert uns auch den Inhalt des Parallelogramms. Bezeichnen wir die Grundlinie AB mit g und den senkrechten Abstand derselben von der Gegenseite DC , welchen man Höhe des Parallelogramms nennt, mit h , so gilt für letzteres die Regel:

Flächeninhalt $f = g \times h = 27 \times 6 \text{ dm}^2$; denn h misst 60 cm.

c) Nun ist: Inhalt der Geländermauer $= 27 \times 6 \times 4 \text{ dm}^3 = 648 \text{ dm}^3 = 0,648 \text{ m}^3$. Demnach werden die Erstellungskosten $0,648 \times 15 \text{ Fr.} = 9,72 \text{ Fr.}$ betragen haben.

2) Bestimme auch den Flächeninhalt des Parallelogramms, das wir zuerst besprochen hatten.

Verallgemeinerung. Wir haben unsere beiden Parallelogramme mit Rechtecken verglichen. Bei den Rechtecken sind die Gegenseiten auch parallel und gleich. Sie sind daher auch Parallelogramme. Bei den Rechtecken stehen die anstossenden Seiten auf einander senkrecht; sie sind also *rechtwinklige Parallelogramme*. Bei den beiden Treppengeländern stehen die anstossenden Seiten schief zu einander. Man nennt deshalb diese zwei Parallelogramme *schiefwinklige Parallelogramme* oder *Rhomboide*.

Satz 43. Sind in einem Viereck die Gegenseiten parallel und gleich und stehen je zwei anstossende Seiten schief zu einander, so heisst es schiefwinkliges Parallelogramm oder Rhomboid; stehen je zwei anstossende Seiten rechtwinklig zu einander, so heisst es rechtwinkliges Parallelogramm oder Rechteck.

Was haben wir bezüglich der Inhaltsbestimmung unserer beiden schiefw. Parallelogramme gezeigt?

Satz 44. Ein schiefwinkliges Parallelogramm ist inhaltsgleich einem Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. Es wird also berechnet, indem man seine Grundlinie und seine Höhe misst und die beiden Masszahlen multipliziert. Die Höhe ist der senkrechte Abstand der Grundlinie von der Gegenseite.

Übungen.

1) Miss die sichtbaren Wandflächen in einem Treppenhaus aus, und berechne den Anstrich à 80 Cts. pro m^2 (wenn sie Parallelogramme sind). Die Grundkante des Parallelogramms misst z. B. 3,6 m, seine Höhe 1,7 m. Was müsste gemessen werden, um diese Flächen genau im verkleinerten Massstab zeichnen zu können? Ein kleiner Streifen hat gewöhnlich einen besonderen Anstrich. Berechne ihn.

2) Beschreibe einen Balken, der zu einem Treppenhaus verwendet wird. Zwei seiner Seitenflächen sind Parallelogramme. Miss seine Ausdehnungen, und berechne sein Volumen. Als was für einen Körper können wir ihn auffassen, wenn wir ihn auf eins seiner Parallelogramme legen?

Z. B. Seine Länge messe 3,6 m, seine Breite 20 cm, seine Höhe 25 cm. Zeichne ein solches Parallelogramm im verkleinerten Massstabe.

3) Zeichne das Parallelogramm $ABCD$, wenn $AB = 7$ cm, $AD = 5$ cm, $\angle BAD = 60^\circ$ misst. Gib sofort die Grösse der übrigen Winkel an.

4) Ein Parallelogramm besitze einen rechten Winkel. Wie gross sind die übrigen Winkel?

III. Das verschiebbare Rechteck.

1) Wir wollen schiefwinklige Parallelogramme noch auf eine neue Art entstehen lassen.

Konstruiere mit vier Stäbchen, wovon je zwei gleich lang sind, ein verschiebbares Rechteck. Drücke es dann zusammen. Was für eine Figur entsteht? Zeichne die Stellung, in der zwei anstossende Seiten einen Winkel von 60° bilden. Drücke noch mehr zusammen. Was lässt sich über den Inhalt der Fläche aussagen, welche die Stäbchen einschliessen?

Das verschobene Rechteck.

Man nennt das Rhomboid mitunter auch *verschobenes Rechteck*.

Das ver-
schobene
Quadrat.

2) Nimm nun 4 gleich lange Stäbchen, und lege sie zu einem Quadrat zusammen. Was für Parallelogramme entstehen beim Zusammendrücken? Es entstehen schiefwinklige, aber gleichseitige Parallelogramme. Die früher behandelten schiefwinkligen Parallelogramme kann man im Gegensatz hiezu ungleichseitig nennen. Zeichne das verschobene Quadrat in verschiedenen Stellungen. Wir nennen eine solche Figur ein *schiefwinkliges, gleichseitiges Parallelogramm* oder einen *Rhombus* (eine Raute), mitunter auch verschobenes Quadrat.

Weise Mineralien vor, deren Flächen Rhomben sind. (Krystallform des Granats).

IV. Einteilung der Parallelogramme bezüglich der Seiten und Winkel.

Vergleiche nochmals die Merkmale der verschiedenen Parallelogramme, die wir behandelt haben.

Bezüglich der Seiten und Winkel kann man folgende Arten von Parallelogrammen unterscheiden:

- 1) Das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid;
- 2) Das rechtwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck;
- 3) Das schiefwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder den Rhombus;
- 4) Das rechtwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat.

K. Das Trapez.

I. Das rechtwinklige Trapez.

1) Aufgabe. *Es soll die Seitenansicht des Mauerwerks der Treppe, deren Geländer besprochen wurde, gezeichnet und der Rauminhalt des Mauerwerks berechnet werden.*

Ansicht
des Mauer-
werks.

a) Betrachte also die Fläche der Treppe, die mit der Hausmauer parallel läuft. Wir denken uns die Geländerstange A D hinzu und fassen die Figur A B C D ins Auge. Diese können