Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: IV

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

CHAPITRE IV

17. Dans le milieu fermé contre toute perturbation des propriétés inhérentes à la substance cristalline, la température et la pression extérieures étant égales et constantes en chaque point, le cristal en formation, ne garde invariable que la *direction*

de ses *faces* et par le fait celle de ses arêtes, et n'est limité dans son développement que par la nature des *faces* qui peuvent intervenir.

1° Seuls les angles dièdres et polyèdres de ses faces sont fixes, et par le fait les angles plans de ses arêtes : c'est la loi de la *constance* des angles des *faces* du cristal. Il en résulte que toutes les directions parallèles aux intersections réalisées ou non des faces présentes ou pouvant intervenir,

de ses *arêtes*, et par le fait celle de ses faces, et n'est limité dans son développement que par la nature des *arêtes* qui peuvent intervenir.

1° Seuls les angles plans de ses arêtes sont fixes, et par le fait les angles dièdres et polyèdres de ses faces : c'est la loi de la *constance* des angles des *arêtes* du cristal. Il en résulte que tous les plans parallèles aux plans de jonction réalisés ou non, des arêtes présentes ou pouvant intervenir

ou plus simplement, en s'en rapportant à la concentration du complexe cristallin par le centre o de notre sphère de rayon-unité :

toutes les intersections des faces pouvant entrer dans le complexe, sont des *arêtes possibles* du cristal.

2° Seules peuvent intervenir dans le développement du cristal, les *faces parallèles* à 2 de ses arêtes, c'est-à-dire appartenant à 2 de ses zones présentes ou possibles ; c'est la *loi* des *zones,* qui rapportée encore au complexe con-

tous les plans de jonction des arêtes pouvant entrer dans le complexe, sont des *faces possibles* du cristal.

2° Seules peuvent intervenir dans le développement du cristal, les *arêtes parallèles* à 2 de ses faces présentes ou possibles ; c'est l'équivalent pour les arêtes de la loi des zones pour les faces, qui rapportée encore au complexe concentré par le point O, peut s'exprimer plus simplement : *seuls* les plans de jonction des arêtes pouvant entrer dans le complexe sont des *faces possibles* du cristal.

centré par le point O, peut s'exprimer plus simplement : *seules* les intersections des faces pouvant entrer dans le complexe sont des *arêtes possibles* du cristal.

18. Or le plus simple complexe cristallin de *faces* données et concentrées par le point O, nous permettant d'en déterminer *zonalement* de nouvelles, exige de toute évidence au moins 4 faces, dont il n'y en ait pas 3 tautozonales. En retour, étant données d'un cristal, 4 faces quelconques, mais remplissant la condition posée, la dépendance zonale des faces cristallines nous permet d'en déduire *toutes* les autres *faces* et par le fait toutes les arêtes présentes et possibles du cristal.

Or le plus simple complexe cristallin d'*arêtes* données et concentrées par le point O, nous permettant d'en déterminer *zonalement* de nouvelles, exige de toute évidence au moins 4 arêtes, dont il n'y en ait pas 3 coplanaires ou parallèles à la même face. En retour, étant données d'un cristal, 4 arêtes quelconques, mais remplissant la condition posée, la dépendance zonale des arêtes cristallines nous permet d'en déduire *toutes* les autres *arêtes* et par le fait toutes les faces présentes et possibles du cristal.

19. Soient donc *4 faces* quelconques d'un cristal, $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, dont il n'y en a pas 3 tautozonales. $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ étant prises comme faces fondamentales, et $\mathfrak{l}_0 \equiv p_0$ comme face-unité :

$$p_0 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$

nous avons pour les vecteurs des faces suivantes, *zonalement déduites* (fig. 6), d'après les cas particuliers des § 15 et 16, d'abord :

$$p_1 \equiv \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$
$$p_2 \equiv \nu_3 \mathfrak{l}_3 + \nu_1 \mathfrak{l}_1$$
$$p_3 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2$$

Soient donc *4 arêtes* quelconques d'un cristal, $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, dont il n'y en a pas 3 coplanaires. $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ étant prises comme arêtes fondamentales et $\mathfrak{r}_0 \equiv \pi_0$ comme arête-unité :

$$\pi_0 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$

nous avons pour les vecteurs des arêtes suivantes, *zonalement déduites* (fig. 6), d'après les cas particuliers des § 15 et 16, d'abord :

$$\pi_1 \equiv \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_2 \equiv \mu_3 \mathfrak{r}_3 + \mu_1 \mathfrak{r}_1$$
$$\pi_3 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2$$

et ensuite, en partant uniquement du couple des 2 dernières p_2 et p_3, et tenant compte encore que toute face par l'intersection commune de 2 autres, a son vecteur de la forme $\mathfrak{l}_1 - \lambda\mathfrak{l}_2$ (§ 4), les 2 systèmes suivants, qui s'établissent indépendemment l'un de l'autre; [mais dont nous faisons directement dans la fig. 6 concorder les intersections sur la face p_2 ; car il est en effet très facile de montrer que pour chacune d'elles, les vecteurs de 3 quelconques des faces qui y concourent, multiplié chacun par le facteur convenable, donnent une somme algébrique qui s'annule (§ 5)] :

1° en ajoutant p_2 à p_3, p_2 à p'_3, p_2 à p''_3, etc., successivement:

$$
\begin{aligned}
p_1^1 &\equiv 2\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3 \\
p'_3 &\equiv 2\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 \\
p_1^2 &\equiv 3\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_1\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3 \\
p''_3 &\equiv 3\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2
\end{aligned}
$$

etc.

2° en retranchant p_2 de p_3, p_2 de p_3^1, p_2 de p_3^2, etc., successivement :

$$
\begin{aligned}
p'_1 &\equiv \nu_2\mathfrak{l}_2 - \nu_3\mathfrak{l}_3 \\
p_3^1 &\equiv \nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 - \nu_3\mathfrak{l}_3 \\
p''_1 &\equiv \nu_2\,\mathfrak{l}_2 - 2\nu_3\mathfrak{l}_3 \\
p_3^2 &\equiv \nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 - 2\nu_3\mathfrak{l}_3
\end{aligned}
$$

etc.

En mettant en ordre les résultats qui nous intéressent directement :

et ensuite, en partant uniquement du couple des 2 dernières π_2 et π_3, et tenant compte encore que toute arête dans le plan commun de 2 autres, a son vecteur de la forme $\mathfrak{r}_1 - \lambda\mathfrak{r}_2$ (§ 4), les 2 systèmes suivants, qui s'établissent indépendemment l'un de l'autre; [mais dont nous faisons directement dans la fig. 6 coïncider les plans de jonction par l'arête π_2 ; il est en effet très facile de montrer que pour chacun de ces plans, les vecteurs de 3 quelconques des arêtes qui s'y trouvent, multiplié chacun par le facteur convenable, donnent une somme algébrique qui s'annule (§ 5)] :

1° en ajoutant π_2 à π_3, π_2 à π'_3, π_2 à π''_3, etc., successivement :

$$
\begin{aligned}
\pi_1^1 &\equiv 2\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3 \\
\pi'_3 &\equiv 2\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 \\
\pi_1^2 &\equiv 3\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3 \\
\pi''_3 &\equiv 3\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2
\end{aligned}
$$

etc.

2° en retranchant π_2 de π_3, π_2 de π_3^1, π_2 de π_3^2, etc., successivement :

$$
\begin{aligned}
\pi'_1 &\equiv \mu_2\mathfrak{r}_2 - \mu_3\mathfrak{r}_3 \\
\pi_3^1 &\equiv \mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 - \mu_3\mathfrak{r}_3 \\
\pi''_1 &\equiv \mu_2\mathfrak{r}_2 - 2\mu_3\mathfrak{r}_3 \\
\pi_3^2 &\equiv \mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 - 2\mu_3\mathfrak{r}_3
\end{aligned}
$$

etc.

En mettant en ordre les résultats qui nous intéressent directement :

$$\mathfrak{p}_1^1 \equiv 2\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3$$
$$\mathfrak{p}_1^2 \equiv 3\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3$$
$$\mathfrak{p}_1^3 \equiv 4\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3$$
etc.

et: $$\mathfrak{p}_3^1 \equiv \nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 - \nu_3\mathfrak{l}_3$$
$$\mathfrak{p}_3^2 \equiv \nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 - 2\nu_3\mathfrak{l}_3$$
$$\mathfrak{p}_3^3 \equiv \nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 - 3\nu_3\mathfrak{l}_3$$
etc.

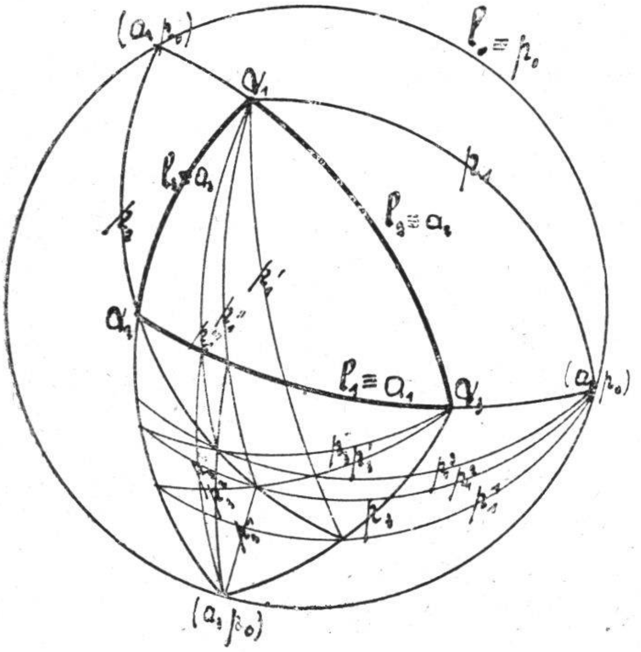

Fig. 6.

20. Nous obtenons donc par cette déduction zonale des faces du cristal, la face dont l'un des indices est le nombre *entier m* comme celle dont l'un des indices est le nombre *entier —m,* et cela sans changer leurs 2 autres indices. Evidemment le même procédé appliqué maintenant à ces 2 nouvelles faces, par rapport à l'un de leurs 2 indices encore unités, nous donnera de même la face quelconque qui a pour 2 de ses indices les valeurs entières m et n

$$\pi_1^1 \equiv 2\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3$$
$$\pi_1^2 \equiv 3\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3$$
$$\pi_1^3 \equiv 4\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3$$
etc.

et: $$\pi_3^1 \equiv \mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 - \mu_3\mathfrak{r}_3$$
$$\pi_3^2 \equiv \mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 - 2\mu_3\mathfrak{r}_3$$
$$\pi_3^3 \equiv \mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 - 3\mu_3\mathfrak{r}_3$$
etc.

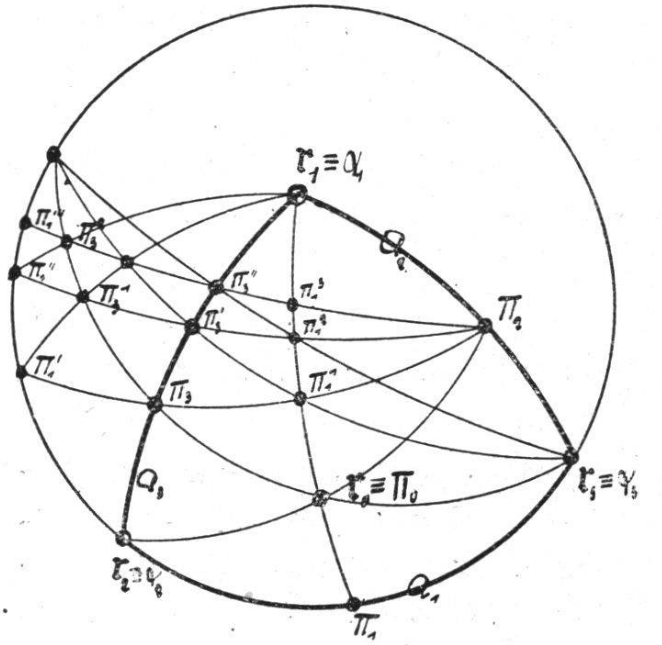

Fig. 6.

Nous obtenons donc par cette déduction zonale des arêtes du cristal, l'arête dont l'un des indices est le nombre *entier m,* comme celle dont l'un des indices est le nombre *entier —m,* et cela sans changer leurs 2 autres indices. Evidemment le même procédé appliqué maintenant à ces 2 nouvelles arêtes, par rapport à l'un de leurs 2 indices encore unités, nous donnera de même l'arête quelconque qui a pour 2 de ses indices les valeurs entières m et n ou —m et —n. Enfin en le répétant encore pour le 3^{me} indice unité restant, nous obtenons sans peine la face dont les 3 indices sont *entiers* quelconques *positifs* ou *négatifs*. D'une part donc, *toute* face d'indices entiers (positifs et négatifs) par rapport au système de référence des 4 faces données $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, impliquée dans la déduction zonale qui a ces 4 faces pour point de départ, est impliquée par le fait dans le complexe des faces *possibles* du cristal.

D'autre part, toute face possible du cristal, que nous fournit la déduction zonale partant des 4 faces $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, est une face d'indices *entiers* par rapport à ces faces. En effet supposons que $\mathfrak{l}_a, \mathfrak{l}_b, \mathfrak{l}_c, \mathfrak{l}_d$ soient les vecteurs de 4 faces d'indices a_i, b_i, c_i, d_i, obtenues par la construction du complexe. D'après le § 3, l'arête d'intersection des 2 premières est $V\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b$, et celle des 2 dernières $V\mathfrak{l}_c\mathfrak{l}_d$, et la nouvelle face possible que déterminent ces 2 arêtes est leur produit vectoriel :

$$VV\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b V\mathfrak{l}_c\mathfrak{l}_d$$

qui s'écrit développé :

$$\mathfrak{l}_d V\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b.\mathfrak{l}_c - \mathfrak{l}_c V\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b.\mathfrak{l}_c$$

Chacun de ces vecteurs ayant la forme du premier :

$$\nu_1 d_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 d_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 d_3 \mathfrak{l}_3$$

ou —m et —n. Enfin en le répétant encore pour le 3^{me} indice unité restant, nous obtenons sans peine l'arête dont les 3 indices sont *entiers* quelconques *positifs* ou *négatifs*. D'une part donc, *toute* arête d'indices entiers (positifs et négatifs) par rapport au système de référence des 4 arêtes données $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, impliqué dans la déduction zonale qui a ces 4 arêtes pour point de départ, est impliquée par le fait dans le complexe des arêtes *possibles* du cristal.

D'autre part, toute arête possible du cristal, que nous fournit la déduction zonale partant des 4 arêtes $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_3$, est une arête d'indices *entiers* par rapport à ces 4 arêtes. En effet supposons que $\mathfrak{r}_a, \mathfrak{r}_b, \mathfrak{r}_c, \mathfrak{r}_d$ soient les vecteurs de 4 arêtes d'indices a_i, b_i, c_i, d_i, obtenues par la construction du complexe. D'après le § 3, la face de jonction des 2 premières est $V\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b$, et celle des 2 dernières $V\mathfrak{r}_c\mathfrak{r}_d$, et la nouvelle arête possible que déterminent ces 2 faces est leur produit vectoriel :

$$VV\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b V\mathfrak{r}_c\mathfrak{r}_d$$

qui s'écrit développé :

$$\mathfrak{r}_d V\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b.\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_c V\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b\mathfrak{r}_d$$

Chacun de ces vecteurs ayant la forme du premier :

$$\mu_1 d_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 d_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 d_3 \mathfrak{r}_3$$

les 2 produits scalaires $\mathfrak{l}_d \mathrm{V} \mathfrak{l}_a \mathfrak{l}_b$ et $\mathfrak{l}_c \mathrm{V} \mathfrak{l}_a \mathfrak{l}_b$ se calculent sans peine, et en se servant d'une abréviation toute naturelle pour écrire les déterminants, se réduisent aux 2 expressions :

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 |abd| \mathfrak{l}_1 \mathrm{V} \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3$$
$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 |abc| \mathfrak{l}_1 \mathrm{V} \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3$$

En négligeant le facteur constant $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \mathfrak{l}_1 \mathrm{V} \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3$, le vecteur que représente le produit vectoriel cherché, tout en déterminant quand même la même face, s'écrit très simplement :

$$|abd| \mathfrak{l}_c - |abc| \mathfrak{l}_d$$

ou : $$p.\mathfrak{l}_c - r.\mathfrak{l}_d$$

Si les indices des 4 faces données sont entiers, il en est de même pour les déterminants de valeur p et r et donc pour les indices de la nouvelle face qui sont :

$$pc_1 - rd_1,\ pc_2 - rd_2,\ pc_3 - rd_3$$

Or les 4 faces qui servent de point de départ à toute la construction zonale, ont les indices entiers :

111, 100, 010, 001

Il en est donc de même pour toutes les faces déduites, c'est-à-dire pour *toute* face *possible* du cristal.

les 2 produits scalaires $\mathbf{r}_d \mathrm{V} \mathbf{r}^a \mathbf{r}_b$ et $\mathbf{r}_c \mathrm{V} \mathbf{r}_a \mathbf{r}_b$ se calculent sans peine, et en se servant d'une abréviation toute naturelle pour écrire les déterminants, se réduisent aux 2 expressions :

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 |abd| \mathbf{r}_1 \mathrm{V} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$$
$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 |abc| \mathbf{r}_1 \mathrm{V} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$$

En négligeant le facteur constant $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mathbf{r}_1 \mathrm{V} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$, le vecteur que représente le produit vectoriel cherché, tout en déterminant quand même la même arête, s'écrit très simplement :

$$|abd| \mathbf{r}_c - |abc| \mathbf{r}_d$$

ou : $$\pi.\mathbf{r}_c - \varrho.\mathbf{r}_d$$

Si les indices des 4 arêtes données sont entiers, il en est de même pour les déterminants de valeur π et ϱ et donc pour les indices de la nouvelle arête qui sont :

$$\pi c_1 - \varrho d_1,\ \pi c_2 - \varrho d_2,\ \pi c_3 - \varrho d_3$$

Or les 4 arêtes qui servent de point de départ à toute la construction zonale, ont les indices entiers :

111, 100, 010, 001

Il en est donc de même pour toutes les arêtes déduites, c'est-à-dire pour *toute* arête *possible* du cristal.

21. Ainsi chaque face dont les indices sont entiers est une face

Ainsi chaque arête dont les indices sont entiers est une arête du complexe cristallin et chaque face de ce complexe est une face dont les indices sont entiers. *Toutes* et *seules* les faces *possibles* du cristal sont donc des faces à indices entiers ; ou en d'autres termes, par le centre O de notre sphère de rayon-unité, le complexe des faces à indices entiers par rapport au système de référence que constituent les 4 faces lui servant de point de départ est *identique* au complexe des faces possibles du cristal.

du complexe cristallin et chaque arête de ce complexe est une arête dont les indices sont entiers. *Toutes* et *seules* les arêtes *possibles* du cristal sont donc des arêtes à indices entiers ; ou en d'autres termes, par le centre O de notre sphère de rayon-unité, le complexe des arêtes à indices entiers par rapport au système de référence que constituent les 4 arêtes lui servant de point de départ, est *identique* au complexe des arêtes possibles du cristal.

Le produit de la fusion des 2 lois expérimentales du cristal, lois des zones et de la constance des angles, est donc la loi mathématique de la *rationnalité* des indices, qui, bien que difficilement confirmable par l'expérience, n'en est pas moins la loi à la base de la cristallographie : les faces et arêtes à indices *entiers* sont les seules faces et arêtes *possibles* du cristal.

L'ensemble des droites sphériques correspondantes aux faces du complexe zonalement déduites, constitue l'extension donnée par M. Daniëls du réseau de Möbius aux droites sphériques

L'ensemble des points sur la sphère correspondants aux arêtes du complexe zonalement déduites, constitue le *réseau* de Möbius, et Möbius appelle ces droites et ces points ou les faces et arêtes correspondantes

géométriquement déductibles des 4 faces ou arêtes données et énonce ainsi la loi des zones : toute face et arête géométriquement déductible des 4 faces ou arêtes cristallines données est une face ou une arête également possible du cristal.

Naturellement quoique les indices que nous venons d'établir de chaque face ou arête du complexe cristallin, soient entiers, comme un multiple positif quelconque de leurs valeurs détermine la même face et la même arête, il est inutile même de faire remarquer que toutes les valeurs quelconques ayant entre elles les mêmes rapports que les 3 nombres entiers représentant les indices donnés, sont également les indices de la face ou de l'arête déterminée et il serait plus exact de formuler ainsi la loi établie : toutes les faces et arêtes dont les indices se réduisent à des rapports de nombre *rationnels* sont des faces et arêtes possibles du cristal.

Möbius appelle arithmétiquement déductible de 4 faces ou arêtes données toute face ou arête dont les rapports correspondants $OE_i : OH_i$ ou $OK_i : OD_i$ sont des valeurs rationnelles et exprime ainsi la loi de la rationnalité des indices : toute face et arête arithmétiquement déductible de 4 faces ou arêtes cristallines données, est une face ou une arête également possible du cristal.

22. Enfin de la considération du complexe total des faces possibles du cristal que nous venons de construire, nous avons encore immédiatement les conclusions suivantes. Puisque ce complexe des faces possibles reste évidemment *identique* à lui-même, quelles que soient les 4 de ses faces choisies comme point de départ pour sa déduction zonale, il reste également le complexe des faces dont les indices sont *entiers, quelles que soient* les faces fondamentales ou la face-unité auxquelles on le rapporte. Donc pour tout changement de ces faces fondamentales ou unité, non seulement les indices des faces restent entiers, mais encore ils restent *les mêmes,* quoique affectant des faces différentes, puisqu'ils sont dans chaque cas toutes les combinaisons possibles des nombres entiers positifs et négatifs.

Enfin de la considération du complexe total des arêtes possibles du cristal que nous venons de construire, nous avons encore immédiatement les conclusions suivantes. Puisque ce complexe des arêtes possibles reste évidemment *identique* à lui-même, quelles que soient les 4 de ses arêtes choisies comme point de départ pour sa déduction zonale, il reste également le complexe des arêtes dont les indices sont *entiers, quelles que soient* les arêtes fondamentales ou l'arête-unité auxquelles on le rapporte. Donc pour tout changement de ces arêtes fondamentales ou unité, non seulement les indices des arêtes restent entiers, mais encore ils restent *les mêmes,* quoique affectant des arêtes différentes, puisqu'ils sont dans chaque cas toutes les combinaisons possibles des nombres entiers positifs et négatifs.