Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: XIII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE XIII

88. Le Raumgitter, c'est-à-dire cette distribution parallélipipédique de sommets sur les arêtes du complexe cristallin, résultat direct de la construction zonale du complexe et donc des 2 lois expérimentales du cristal : constance des angles et loi des zones, traduites mathématiquement par celle de la rationnalité des indices, a donc été considéré et étudié jusqu'ici à un point de vue purement théorique. La notion, prise encore à ce même point de vue, de Raumgitter *symétrique* a établi dans le dernier chapitre une distinction essentielle entre le complexe cristallin n'impliquant aucune face avec arête normale et qui est le complexe du système cristallin tricline, et celui qui en possède. Par rapport toujours à la symétrie du Raumgitter primitif correspondant, les 7 types de complexes possibles dans la donnée d'une face avec arête normale, se réduisent essentiellement à 5 qui sont les complexes des 5 autres systèmes cristallins, c'est-à-dire des 5 catégories, telles que la plupart des cristallographes les établissent entre les cristaux d'espèce symétrique ; en d'autres termes leurs éléments (arêtes fondamentales et face-unité) représentent exactement les divers systèmes d'*axes cristallographiques* auxquels on rapporte d'ordinaire la position des faces et arêtes cristallines.

Mais il est maintenant surtout une 3me loi du cristal établie par l'expérience, celle de sa *symétrie expérimentale,* qui donne au rôle du Raumgitter dans l'étude du cristal toute sa valeur. Rapporté à la symétrie des Raumgitters primitifs trouvés de chacun des systèmes, en tenant compte de ce qui sera dit ensuite, elle s'énonce très clairement :

Si dans le cristal en formation apparaît une face de l'un des complexes établis, apparaissent simultanément toutes les faces avec lesquelles se couvre la première par le groupe entier des opérations de symétrie du Raumgitter correspondant, ou par l'un quelconque des

leurs sous-groupes. Mais ce n'est là que le caractère superficiel ; la symétrie de la *substance* même du cristal (reconnu entre autres par la méthode des figures de corrosion, présence des autres propriétés physiques, cohésion, dilatation, etc.) est celle du groupe complet ou d'un sous-groupe quelconque des opérations du Gitter.

89. Les seules *opérations* de *symétrie* qui effectivement font se superposer par un seul mouvement un Raumgitter symétrique avec lui-même, sont donc ses rotations autour de ses axes de symétrie ; on les appelle ses opérations de symétrie de *première espèce.* Mais le Raumgitter possède par sa nature même un centre de symétrie, c'est-à-dire une opération de symétrie d'un tout autre genre, l'inversion ; en remplaçant par une infinité de mouvements chaque sommet du Gitter par son sommet inverse le Raumgitter se retrouve en effet après cette opération, bien que chacun de ses sommets ait perdu sa place primitive, de nouveau identique à lui-même. Si donc nous faisons suivre de l'inversion chaque rotation d'un Raumgitter symétrique, le Gitter se retrouvera chaque fois après les 2 opérations successives encore identique à lui-même.

L'opération *unique* qui amènerait chaque sommet du Gitter à la place où il se trouve par ces 2 opérations successives, transforme donc également le Raumgitter en lui-même ; on l'appelle une opération de symétrie du Gitter de *seconde espèce* (réflexion ou réflexion combinée à une rotation : axe de symétrie de seconde espèce). En comptant l'*identité,* c'est-à-dire l'absence de mouvement, comme opération de symétrie de première espèce, par opposition à l'inversion, opération de symétrie de seconde espèce, la symétrie d'un Raumgitter (et ainsi celle des classes holoédriques correspondantes, § 94-100), est donc constituée d'un nombre *égal* d'opérations de symétrie de première espèce et d'opérations de symétrie de seconde espèce. Elles sont évidemment toutes les opérations et les seules qui transforment le Raumgitter en lui-même ; par le fait leur ensemble constitue un *groupe* et en possède la propriété caractéristique : l'opération unique équivalente à 2 opérations successives quelconques du groupe, est toujours une opération du groupe.

Naturellement, comme nous le verrons d'ailleurs, certaines de ces opérations du groupe, se nécessitant l'une l'autre, constituent à leur tour, dans le groupe lui-même, un *sous-groupe* indépendant,

possédant pour son propre compte la propriété qui vient d'être énoncée. Le problème qui se pose maintenaut est précisément de déterminer dans chaque symétrie de Raumgitter trouvée tous ces sous-groupes d'opérations possibles ; les cristaux dont ils représenteront la symétrie, constituent les différentes *classes* du système cristallin correspondant.

Bravais, Sohncke, Mallard et d'autres ont basé sur cette structure parallélipipèdique du Gitter l'explication de la nature intime de la substance cristalline ; Bravais place en chaque sommet du Raumgitter symétrique un polyèdre moléculaire dont la symétrie est celle du groupe complet ou des sous-groupes indépendants des opérations du Gitter. Comme qu'il en soit, les 3 lois expérimentales de la cristallographie établissent donc, surtout celle de la symétrie du cristal, une corrélation idéale entre la structure du Gitter et la symétrie du milieu cristallin. Jusqu'à quel point nous permet-elle de pénétrer dans la nature intime du cristal? Nous sommes trop peu autorisé pour le dire ici ; nous n'avons eu d'autre but dans ce travail que de montrer cette corrélation en établissant avec les différents types de complexes la symétrie des Gitters primitifs correspondants, pour y adapter ensuite la loi de symétrie et en déduire par une méthode nouvelle et intéressante les *32 classes* possibles de cristaux.

90. Si nous prenons 3 vecteurs-unités $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, formant un système trirectangulaire d'axes et que par une opération de symétrie de première ou de seconde espèce autour du point O, ces 3 vecteurs coïncident avec le nouveau système trirectangulaire $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$, la somme conventionnelle des 3 *dyades* *, formée chacune de la simple juxtaposition de ces 2 vecteurs :

$$\Phi \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

constitue un *dyadic* * représentant l'opération donnée.

En effet soit un vecteur quelconque $\mathfrak{R}$ déterminant le point P de l'espace et décomposé selon les directions des 3 vecteurs-unités $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{R} \equiv x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$$

---

*) Vectoranalysis : Gibbs. Le mot anglais « dyadic » pourrait se traduire en français *dyadique* (féminin) comme le mot anglais « quadric » se traduit par le mot français *quadrique*. Comme pour le mot « dyade » j'ai gardé simplement le mot anglais plus court « dyadic » ; cela m'a paru sans aucune importance.

Faisons ce que Gibbs appelle le produit scalaire du vecteur $\mathfrak{R}$ par le dyadic Φ et qu'il écrit ainsi :

$$(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}')$$

c'est-à-dire multiplions scalairement chaque composante du vecteur $\mathfrak{R}$ par le vecteur antécédent de chaque terme du dyadic (voir la remarque). Nous obtenons le nouveau vecteur :

$$\mathfrak{R}' \equiv x\mathfrak{i}' + y\mathfrak{j}' + z\mathfrak{k}'$$

dont la position par rapport aux nouveaux axes $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ est identiquement celle du vecteur $\mathfrak{R}$ par rapport aux premiers. Le dyadic Φ employé comme *opérateur* sur le vecteur $\mathfrak{R}$ d'un point quelconque de l'espace, lui fait donc subir autour du point O la même opération qui a amené $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$. Il est ainsi l'expression algébrique de l'opération donnée et les positions extrêmes des vecteurs-unités $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, déterminant l'opération en elle-même, déterminent également complètement le dyadic qui la représente.

Remarque. La juxtaposition des 2 vecteurs qui constituent la dyade est pour Gibbs une 3me sorte de produit qu'il appelle produit *indéfini* de 2 vecteurs. Le produit scalaire est une quantité pure et n'impose aux 2 vecteurs qui le forment qu'une condition : le produit de leurs tenseurs par le cos de leur angle. Le produit vectoriel est un vecteur et leur impose 3 conditions : le produit de leurs tenseurs par le sinus de leur angle, le plan dans lequel ils se trouvent et leur position réciproque. Le produit indéfini représente 2 vecteurs et leur impose 5 conditions : la direction et le sens de chacun et le produit de leurs tenseurs. La dyade possède en effet la propriété *associative ;* il suffit de le montrer pour les 2 sortes de produits, produits scalaires de dyades par vecteur et de dyades par dyades, qui nous sont nécessaires ici. Si d'une manière générale :

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, sont 4 vecteurs-unités quelconques et $a = a'a''$, le produit scalaire de vecteur par dyade, c'est-à-dire le produit scalaire du vecteur par le vecteur antécédent de la dyade pris comme coefficient du vecteur conséquent :

$$\mathfrak{r} \cdot a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{r} \cdot a'\mathfrak{a}a''\mathfrak{b} = \mathfrak{r} \cdot a''\mathfrak{a}a'\mathfrak{b} = a'a''(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a})\,\mathfrak{b}\,;$$

le produit scalaire de dyade par dyade, c'est-à-dire le produit scalaire des vecteurs moyens pris comme coefficient de la dyade formée des vecteurs extrêmes :

$$\mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdot a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdot a'\mathfrak{a}a''\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdot a''\mathfrak{a}a'\mathfrak{b} = a'a''(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d})\,\mathfrak{c}\mathfrak{b}$$

$$\text{Donc :} \quad a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a'\mathfrak{a}a''\mathfrak{b} = a''\mathfrak{a}a'\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad \text{etc.}$$

Pour cette raison si l'un des vecteurs est négatif, la dyade est négative ; si le coefficient de la dyade est nul, celui de chacun de ses vecteurs est également nul.

La dyade possède également la propriété *distributive,* mais on ne peut changer l'ordre des vecteurs qui se juxtaposent, c'est-à-dire :

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

En effet: $\mathfrak{r}\cdot[\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})] = \mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c})$

parce que: $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{c}$

On le démontrerait de même pour le produit scalaire de dyade par dyade.

91. Soient maintenant les 2 opérations successives :

$$\Phi_1 \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'$$
$$\Phi_2 \equiv \mathfrak{i}'\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}'\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}''$$

Si nous faisons le produit scalaire des 2 dyadics qui s'écrit:

$$(\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}')\cdot(\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}'\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}'')$$

et qui naturellement consiste dans la multiplication scalaire de chaque dyade du premier par chaque dyade du second (remarque précédente), nous obtenons le nouveau dyadic:

$$\Phi_3 \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}''$$

c'est-à-dire le dyadic qui représente l'opération unique équivalente aux 2 opérations successives données. Les combinaisons d'opérations de symétrie successives qui peuvent avoir lieu autour du point O s'expriment donc par les produits scalaires des dyadics équivalents, et si ces opérations sont telles qu'elles constituent un groupe, le groupe de leurs dyadics jouit de la propriété caractéristique : que le produit scalaire de deux d'entre eux est toujours un dyadic du groupe.

Remarque. Naturellement les vecteurs $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$; $\mathfrak{i}''$, $\mathfrak{j}''$, $\mathfrak{k}''$ peuvent être rapportés très bien aux 3 axes trirectangulaires $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ et le dyadic:

$$\Phi_1 \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'$$

s'écrit également:

$$\mathfrak{i}(x_1'\mathfrak{i} + y_1'\mathfrak{j} + z_1'\mathfrak{k}) + \mathfrak{j}(x_2'\mathfrak{i} + y_2'\mathfrak{j} + z_2'\mathfrak{k}) + \mathfrak{k}(x_3'\mathfrak{i} + y_3'\mathfrak{j} + z_3'\mathfrak{k})$$

Puisque la dyade possède la propriété distributive et associative, il se développe en *nonion Form* (Gibbs) représentant toujours le même dyadic:

$$\begin{aligned} & x_1'\mathfrak{i}\mathfrak{i} + y_1'\mathfrak{i}\mathfrak{j} + z_1'\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ + & x_2'\mathfrak{j}\mathfrak{i} + y_2'\mathfrak{j}\mathfrak{j} + z_2'\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\ + & x_3'\mathfrak{k}\mathfrak{i} + y_3'\mathfrak{k}\mathfrak{j} + z_3'\mathfrak{k}\mathfrak{k} \end{aligned}$$

Le dyadic $\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}'\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}''$ rapporté aux axes $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ se développerait de la même manière en nonion Form et inversement la nonion Form obtenue se réduirait à la somme des 3 dyades, représentant encore le dyadic donné:

$$\mathfrak{i}[(x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + x_3'x_3'')\mathfrak{i} + (x_1'y_1'' + x_2'y_2'' + x_3'y_3'')\mathfrak{j} + (\ldots)\mathfrak{k}] + \mathfrak{j}[\ldots] + \mathfrak{k}[\ldots]$$

Les vecteurs des grandes parenthèses sont ainsi les nouvelles positions que prennent les vecteurs $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ par l'o ération donnée $\mathbf{i}'\mathbf{i}'' + \mathbf{j}'\mathbf{j}'' + \mathbf{k}'\mathbf{k}''$. Rapporter les positions successives $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{i}''$, $\mathbf{j}''$, $\mathbf{k}''$, etc., aux axes fondamentaux $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, de position fixe dans l'espace, revient donc à rapporter tous les dyadics à ces axes, c'est-à-dire à donner à toutes les opérations équivalentes les positions primitives $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, pour point de départ. C'est ce que nous ferons pour chacun des groupes de dyadics, représentant le groupe entier d'opérations du Gitter primitif correspondant à chaque complexe, que nous allons écrire. D'ailleurs, sauf pour le Gitter hexagonal dont les opérations d'ordre sénaire exigent des dyadics de forme un peu moins facile, tout y est bien plus simple que ce qui vient d'être dit d'une manière plutôt générale.

Si nous écrivons en effet par ordre de symétrie de leurs Gitters les 5 complexes ou systèmes cristallins : tricline, monocline, rhombique, quadratique et cubique, on se rend compte immédiatement que les groupes d'opérations correspondants : centre de symétrie, binaire, terbinaire, quaternaire, et terquaternaire, sont impliqués chacun dans celui du système supérieur. Puisque le groupe d'opérations de la symétrie terquaternaire se réduit en fait aux 48 manières possibles de couvrir 3 vecteurs-unités triperpendiculaires $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ avec eux-mêmes ou avec $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$, (les 3 arêtes du cube élémentaire ne peuvent se couvrir qu'avec elles-mêmes ou les arêtes inverses), les dyadics représentant les opérations de symétrie de ces 5 premiers systèmes se réduisent donc chacun à 3 dyades de coefficient 1 ou -1 et dont $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, dans un ordre ou un autre, sont à la fois les vecteurs antécédents et les vecteurs conséquents. Le produit de 2 quelconques de ces dyadics revient donc uniquement à multiplier chaque dyade de l'un par la *seule* dyade de l'autre qui a pour vecteur antécédent le vecteur conséquent de la première, et les coefficients des nouvelles dyades sont également 1 ou -1 selon que les 2 dyades dont elles résultent sont de même signe ou de signe contraire.

Si nous appelons dyadics *pairs* ceux de ces dyadics qui ont un nombre pair (0 ou 2) de dyades négatives et dyadics *impairs* ceux qui en ont un nombre impair (1 ou 3) nous avons immédiatement cette propriété qui nous servira à préciser les sous-groupes de ces dyadics : Le produit de 2 dyadics pairs ou de 2 dyadics impairs est toujours un dyadic pair et le produit de 2 dyadics de parité différente est toujours un dyadic impair. C'est une conséquence directe du fait que les combinaisons de signes $++$ et $--$ donne le signe positif et les combinaisons $+-$ et $-+$ donnent le signe négatif, et cela se démontre très simplement. Le produit des 2 dyadics, ou plutôt en n'écrivant que les signes des dyades, des 2 rangées de signes :

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & + & + \end{matrix}$$

(en multipliant donc chaque signe de la première par un seul signe de la seconde) donne comme résultat 3 dyades c'est-à-dire 3 signes positifs. Dès que l'on introduit dans l'une des rangées un signe $-$ en place d'un signe $+$, le produit possède un signe $-$; si on en introduit un second dans la même ou dans l'autre rangée, ou bien il annule le premier ou bien donne un second signe $-$. Par le fait on en introduisant un 3me le résultat aura 1 ou 3 signes négatifs, et ainsi de suite. Si donc la somme des signes négatifs introduits dans les 2 rangées est paire, en d'autres termes si les 2 dyadics donnés sont de même parité, le résultat a un

nombre pair de signes négatifs ; si cette somme est impaire c'est-à-dire si les 2 dyadics sont de parité différente, le résultat a un nombre impair de signes négatifs, c. q. f. d.

Nous n'écrirons pour les 5 premiers systèmes chaque dyadic qu'une fois, c'est-à-dire que pour chaque système supérieur nous n'écrirons que les dyadics représentant les opérations nouvelles. La classe possédant la symétrie du groupe complet des opérations du Gitter est la classe *holoédrique* du système. Selon que le nombre des opérations ou des dyadics des sous-groupes obtenus est la demie, le quart ou même le huitième du nombre des dyadics du groupe entier de symétrie, la classe correspondante est une hémiédrie ou hémimorphie, une tétartoédrie, ou même une octaédrie de cette classe holoédrique. Les dénominations ajoutées entre parenthèses sont les dénominations maintenues aux classes par différents cristallographes et empruntées généralement au nom de la forme cristalline normale correspondante.

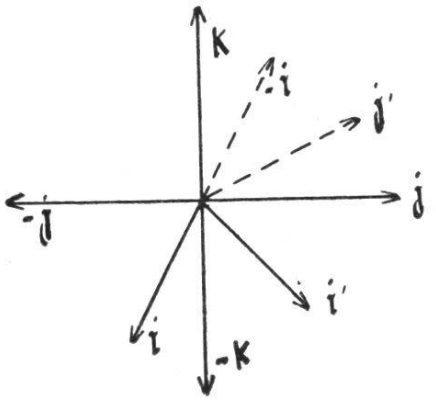
92. Système *tricline.* Son Raumgitter ne possède ni axe de symétrie et par le fait ni plan de symétrie ; les seules opérations qui le fassent coïncider avec lui-même sont l'identité et l'inversion autour du point O :

$$1. \quad \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$
$$2. \quad -\mathbf{ii} - \mathbf{jj} - \mathbf{kk}$$

L'identité est indépendante et détermine une classe ; l'inversion multipliée par elle-même exige l'identité. Nous avons ainsi les 2 classes :

I. Classe tricline-hémiédrique (asymétrique). 1.
II. Classe tricline-holoédrique (pinakoidale). 1. 2.

93. Système *monocline.* Son Raumgitter (et d'ailleurs le complexe lui-même) possède un axe binaire et par le fait un plan de symétrie normal. En effet si $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont 2 vecteurs-unités perpendiculaires dans le plan normal à l'axe binaire et $\mathbf{k}$ le vecteur-unité coïncidant avec cet axe, le dyadic 3, équivalent à l'axe binaire, multiplié par l'inversion donne le dyadic 4, qui est le plan de symétrie normal (fig. 19).



$$3. \quad -\mathbf{ii} - \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$
$$4. \quad \mathbf{ii} + \mathbf{jj} - \mathbf{kk}$$

Chacun de ces dyadics multiplié par lui-même donne l'identité et détermine une classe ; multipliés l'un par l'autre, ils exigent l'inversion et représentent la symétrie de la classe holoédrique du système :

III. Classe monocline-hémimorphe (sphénoidique).
IV. Classe monocline-hémiédrique (domatique).
V. Classe monocline-holoedrique (prismatique).

94. Système *rhombique.* Le Raumgitter possède avec l'axe binaire $\mathfrak{k}$ les 2 axes binaires perpendiculaires $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ dans le plan de symétrie normal ; les dyadics 5 et 6 équivalents, multipliés par l'inversion, donnent les 2 autres plans de symétrie 7 et 8 correspondants à ces axes :

$$\begin{array}{ll} 5. & \mathfrak{ii} - \mathfrak{jj} - \mathfrak{kk} \\ 6. & -\mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} - \mathfrak{kk} \\ 7. & -\mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk} \\ 8. & \mathfrak{ii} - \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk} \end{array}$$

Les nouvelles classes sont immédiatement :

4 dyadics pairs	5. 6. 3. 1.
2 dyadics pairs et 2 impairs	7. 8. 3. 1.
Groupe holoédrique	5. 6. 7. 8. 4. 3. 2. 1.

Toute autre combinaison par eux-mêmes ou 2 à 2 de ces nouveaux dyadics détermine l'une des classes déjà obtenues au système précédent, sinon le groupe holoédrique des 8 dyadics donnés. Nous avons donc les 3 nouvelles classes :

VI. Classe rhombique-hémiédrique (bisphénoidique).
VII. Classe rhombique-hémimorphe (pyramidale).
VIII. Classe rhombique-holoédrique (bipyramidale).

Pour ces 3 premiers systèmes la forme des dyadics se réduit donc aux 8 variations que peuvent fournir les 3 signes des dyades de la forme générale :

$$\mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk}$$

L'identité est donc en quelque sorte le dyadic *type* de leurs opérations et si nous multiplions par l'une d'elles l'un des dyadics quelconque des 5 autres types qu'impliqueront les opérations des 2 systèmes suivants (ce qui fait pour le système cubique 6 types à 8 variations chacun = 48 dyadics), cette multiplication ne peut que changer les signes du dyadic donné et le produit sera ainsi un dyadic du même type.

95. Système *quadratique* ou *tétragonal*. L'axe binaire $\mathfrak{k}$ devient un axe quaternaire, et dans le plan normal aux 2 axes binaires $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ s'ajoutent les 2 axes binaires diagonaux (fig. 19) $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$. Les diadics 9. 10. 11. et 12. représentent les nouvelles rotations et multipliés par l'inversion, exigent l'axe quaternaire de 2me espèce 13. et 14. (axe quaternaire de 1re espèce combiné à une réflexion dans le plan normal) et les 2 plans de symétrie normaux aux axes binaires 15 et 16 :

9.	$\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$	1er mouv.	axe quat.
10.	$-\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$	3e mouv.	axe quat.
11.	$\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$	axes binaires $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$	
12.	$-\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$		
13.	$-\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$	3me mouv.	axe quat. 2e espèce
14.	$\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$	1er mouv.	2e espèce
15.	$-\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$	plans de symétrie normaux aux axes $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$.	
16.	$\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$		

Le dyadic-type : $\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$ multiplié par lui-même donne l'identité :

$$(\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk})^2 = \mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk},$$

tandis que multiplié par l'un des 8 dyadics précédents, il donne (remarque précédente) l'une de ses 8 variations que nous venons d'écrire. Les 2 dyadics impairs 9 et 10, comme les 2 dyadics pairs 13 et 14, exigent donc les 2 variations paires de l'identité dont la dyade $\mathfrak{kk}$ est positive :

9.	10.	3.	1.	puissances du dyadic 9.
13.	14.	3.	1.	puissances du dyadic 13.

Les 2 groupes réunis exigent en outre les 2 variations impaires de l'identité dont la dyade $\mathfrak{kk}$ est négative :

9. 10. 13. 14. 4, 3. 2. 1.

Remarquons d'abord que le groupe suivant des 4 dyadics 11. 12. 15. et 16. représente de nouveau dans le système quadratique la symétrie du système précédent, et qu'il est donc inutile de le prendre à part pour retrouver les classes déjà obtenues. En introduisant 11. ou 15. dans le 1er groupe trouvé, il faut y introduire 12. ou 16. par le fait de la présence de 3. ; nous obtenons ainsi soit les 4 variations impaires du nouveau type exigeant les 4 variations paires de l'identité, soit les 4 variations du nouveau type dont la dyade $\mathfrak{kk}$ est positive exigeant les 4 variations de l'identité dont $\mathfrak{kk}$ est également positif :

9. 10. 11. 12. 5. 6. 3. 1.
9. 10. 15. 16. 7. 8. 3. 1.

En introduisant 11. ou 15. dans le 2me groupe trouvé, il faut y introduire encore 12. ou 16. par le fait toujours de la présence de 3.; nous obtenons soit les 4 nouvelles variations dont kk est négatif exigeant les 4 variations de l'identité dont kk est positif, soit le groupe des 8 dyadics pairs compris dans les 16 dyadics donnés :

13. 14. 11. 12. 7. 8. 3. 1.
13. 14. 15. 16. 5. 6. 3. 1.

Mais on voit immédiatement que ces 2 derniers groupes représentent la même symétrie : l'axe quaternaire de 2e espèce, 2 plans de symétrie perpendiculaires passant par cet axe alternant avec 2 axes binaires perpendiculaires dans le plan normal.

Dès que l'on introduit maintenant dans l'un des groupes à 8 dyadics, l'un quelconque des dyadics donnés qu'il ne contient pas encore, on obtient le groupe entier des 16 dyadics donnés, représentant la symétrie du Gitter quaternaire et celle de la classe holoédrique du système. Nous avons donc :

IX. Classe tetragon.-hémiédrique-hémimorphe (pyramidale).
X. Classe tetragon.-sphénoidique-tetartoédrique (bisphénoidique).
XI. Classe tétragon.-pyramidale-hémiédrique (bipyramidale).
XII. Classe tétragon.-trapézoédrique-hémiédrique (trapézoédrique).
XIII. Classe tétragon.-holoédrique-hémimorphe (ditetr. pyramidale).
XIV. Classe tétragon.-sphénoidique-hémiédrique (scalénoédrique).
XV. Classe tetragon.-holoédrique (ditétrag. bipyramidale).

96. Système *cubique* ou *régulier*. Les axes i et j sont également quaternaires. A l'un et l'autre est donc attaché le système de dyadics représentant la symétrie quaternaire correspondante, et ces 2 systèmes s'écrivent immédiatement en donnant successivement à i et à j le rôle de k dans les dyadics du § précédent :

Axe quaternaire i et axes binaires diagonaux dans le plan (jk)	Axe quaternaire j et axes binaires diagonaux dans le plan (ik)
17. $ii + jk - kj$	25. $-ik + jj + ki$
18. $ii - jk + kj$	26. $ik + jj - ki$
19. $-ii + jk + kj$	27. $ik - jj + ki$
20. $-ii - jk - kj$	28. $-ik - jj - ki$

Multipliés par l'inversion :

Axe quaternaire $\mathfrak{i}$ de 2me espèce et plans de symétrie diagonaux pas. par l'axe.		Axe quaternaire $\mathfrak{j}$ de 2me espèce et plans de symétrie diagonaux pas. par l'axe.	
21.	$-\mathfrak{ii}-\mathfrak{jk}+\mathfrak{kj}$	29.	$\mathfrak{ik}-\mathfrak{jj}-\mathfrak{ki}$
22.	$-\mathfrak{ii}+\mathfrak{jk}-\mathfrak{kj}$	30.	$-\mathfrak{ik}-\mathfrak{jj}+\mathfrak{ki}$
23.	$\mathfrak{ii}-\mathfrak{jk}-\mathfrak{kj}$	31.	$-\mathfrak{ik}+\mathfrak{jj}-\mathfrak{ki}$
24.	$\mathfrak{ii}+\mathfrak{jk}+\mathfrak{kj}$	32.	$\mathfrak{ik}+\mathfrak{jj}+\mathfrak{ki}$

Les directions des 4 diagonales principales du cube élémentaire sont en outre des axes ternaires (fig. 17), dont les 2 mouvements qui ne sont pas l'identité s'écrivent immédiatement (fig. 19); multipliés par l'inversion ils deviennent les 2 dyadics de 2me espèce qui sont les 1er et 5me mouvement d'axes sénaires de 2me espèce (axes sénaires de 1re espèce combinés à une réflexion dans le plan normal, leur 3me mouvement est l'inversion) coïncidant avec les axes ternaires.

1re axe (en sens inverse des aiguilles d'une montre)		2me axe (en remplaçant dans le 1er $\mathfrak{i}$ par $\mathfrak{j}$ et $\mathfrak{j}$ par $-\mathfrak{i}$)	
33.	$\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$	37.	$-\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$
34.	$\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$	38.	$-\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$
35.	$-\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$	39.	$\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$
36.	$-\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$	40.	$\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$

3me axe (en remplaçant dans le 1er $\mathfrak{i}$ p. $-\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ par $-\mathfrak{j}$)		4me axe (en remplaçant dans le 1er $\mathfrak{i}$ p. $-\mathfrak{j}$ et $\mathfrak{j}$ par $-\mathfrak{i}$)	
41.	$\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$	45.	$\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$
42.	$-\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$	46.	$-\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$
43.	$-\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$	47.	$-\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$
44.	$\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$	48.	$\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$

Il est inutile d'abord de chercher de nouveaux groupes de dyadics pris exclusivement dans l'une seule des symétries quaternaires : ils ont été déjà trouvés au système précédent ; comme aussi des groupes impliquant un seul axe ternaire ou un seul axe sénaire de 2me espèce : il se retrouveront plus simplement et à plus juste titre dans les dyadics du système suivant.

Les 4 axes ternaires sont tous des dyadics pairs dont les 2 formes types, multipliées chacune par elle-même, exige la seconde, et multipliées l'une par l'autre, exigent l'identité :

$$(\mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki})^2 = \mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}$$
$$(\mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj})^2 = \mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}$$
$$(\mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}) = \mathrm{ii} + \mathrm{jj} + \mathrm{kk}.$$

La présence de 2 quelconques de ces axes entraîne donc celle des 2 autres, et par le fait les 4 variations paires de l'identité :

33. 34. 37. 38. 41. 42. 45. 46.
5. 6. 3. 1.

Les 4 axes sénaires de 2me espèce sont les variations impaires des 2 types ; la présence de 2 d'entre eux exige celle des 2 axes ternaires correspondants et par suite le groupe complet des dyadics des 2 types avec les variations paires et impaires de l'identité :

33 à 48
1 à 8.

Deux quelconques des 3 types quaternaires donne comme produit un axe ternaire ; et si l'on accouple un type quaternaire à l'un ou l'autre des types ternaires, ils exigent les 2 autres types quaternaires :

$$(\mathrm{ii} + \mathrm{jk} + \mathrm{kj}) \cdot (\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) = \mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}$$
$$(\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ii} + \mathrm{jk} + \mathrm{kj}) = \mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}$$

$$(\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}) = \mathrm{ii} + \mathrm{jk} + \mathrm{kj}$$
$$(\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}) = \mathrm{ij} + \mathrm{ji} + \mathrm{kk}$$

Il n'existe donc pas de combinaisons de 2 types quaternaires sans dyadics ternaires et on obtiendra les sous-groupes qui restent à trouver en introduisant les dyadics quaternaires dans les 2 groupes de types ternaires obtenus.

Si l'on introduit dans le groupe des 4 axes ternaires un dyadic quaternaire *impair*, ses combinaisons avec les dyadics pairs des axes ternaires fournissent les dyadics impairs des 3 types quaternaires, et les produits de ces derniers sont soit à nouveau les dyadics pairs des axes ternaires (combinaisons de 2 types), soit les 4 variations paires de l'identité (combinaisons d'un même type) :

9. 10. 11. 12. 17. 18. 19. 20. 25. 26. 27. 28.
1. 3. 5. 6. 33. 34. 37. 38. 41. 42. 45. 46.

Si l'on introduit dans ce groupe des 4 axes ternaires un dyadic quaternaire *pair*, ses produits avec les dyadics pairs des axes ter-

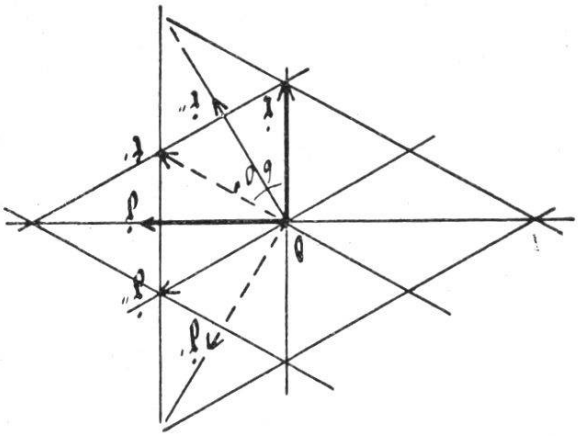
naires sont les dyadics pairs des 3 types quaternaires, et les combinaisons de ceux-ci fournissent encore soit à nouveau les dyadics pairs des axes ternaires, soit les 4 variations paires de l'identité :

13.	14.	15.	16.	21.	22.	23.	24.	29.	30.	31.	32.
1.	3.	5.	6.	33.	34.	37.	38.	41.	42.	45.	46.

Par contre dès que l'on introduit dans le groupe des 4 axes sénaires de 2me espèce un dyadic quaternaire *quelconque,* ses combinaisons avec toutes les variations paires et impaires des 2 types ternaires sont les dyadics pairs et impairs des 3 types quaternaires, et les produits de ces derniers comme ceux des types ternaires entre eux, exigent les variations paires et impaires de l'identité. Nous obtenons ainsi le groupe entier des 48 dyadics donnés, représentant les 48 opérations possibles couvrant les 3 vecteurs-unités triperpendiculaires $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ avec eux-mêmes ou $-\mathfrak{i}$, $-\mathfrak{j}$, $-\mathfrak{k}$, c'est-à-dire le groupe de symétrie de la classe holoédrique du système cubique. Les 5 nouvelles classes sont dans l'ordre trouvé :

XVI. Classe régulière-tétartoédrique (tétraédr. pentagondodécaédrique).
XVII. Classe pentagonale-hémiédrique (dyakisdodecaédrique).
XVIII. Classe gyroédrique-hémiédrique (pentagon.-icositetraédr.).
XIX. Classe tétraédrique-hémiédrique (hexakistetraédrique).
XX. Classe régulière-holoédrique (hexakisoctaédrique).

97. Système *hexagonal.* Soient $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ 2 vecteurs-unités perpendiculaires pris sur 2 axes binaires du réseau fondamental et $\mathfrak{k}$ le vecteur-unité normal au plan de la fig. 20 et coïncidant avec l'axe sénaire du Raumgitter. L'unité étant le côté du triangle équilatéral élémentaire, les nouvelles positions $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ que prennent les vecteurs $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ par le 1er mouvement de l'axe sénaire sont immédiatement :



$$\mathfrak{i}' = \frac{1}{2}\mathfrak{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{j} \qquad \mathfrak{j}' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\mathfrak{j} \qquad \mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$$

et le dyadic représentant le mouvement s'écrit :

$$\mathbf{i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{kk}$$

Le second mouvement (rotation de 120°) change $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ en $\mathbf{j}''$ et $-\mathbf{i}''$; son dyadic s'écrit pareillement :

$$\mathbf{i}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{kk}$$

Le 3me mouvement est celui de l'axe binaire impliqué dans l'axe sénaire ; son dyadic est le dyadic 3 (§ 93). De là, pour les 2 autres mouvements qui restent avant l'identité, les positions des vecteurs $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont exactement les valeurs négatives de leurs positions après le 1er et le 2me mouvement ; il suffit donc de changer les signes des 2 premiers termes des dyadics trouvés pour obtenir leurs dyadics équivalents.

Le premier axe binaire $\mathbf{i}''$ change les vecteurs $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ en $\mathbf{i}'$ et $-\mathbf{j}'$ et $\mathbf{k}$ en $-\mathbf{k}$; son dyadic correspondant est donc :

$$\mathbf{i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)-\mathbf{kk}$$

Le second axe binaire $\mathbf{i}'$ change inversement $\mathbf{i}$ en $\mathbf{j}''$ et $\mathbf{j}$ en $\mathbf{i}''$, son dyadic s'écrit :

$$\mathbf{i}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)-\mathbf{kk}$$

L'axe binaire $\mathbf{j}$ comme l'axe binaire $\mathbf{i}$ sont les 2 axes binaires du complexe rhombique impliqués dans la symétrie du Gitter hexagonal et représentés par les dyadics 5 et 6 (§ 94). Enfin les 2 autres axes binaires $\mathbf{j}''$ et $\mathbf{j}'$, par le fait qu'ils sont normaux aux 2 premiers axes binaires $\mathbf{i}''$ et $\mathbf{i}'$, donnent par leur mouvement à $\mathbf{i}$ et à $\mathbf{j}$ les directions inverses de celles que leur donnent les axes $\mathbf{i}''$ et $\mathbf{i}'$, leurs dyadics sont donc de nouveau les 2 dyadics trouvés avec leurs 2 premiers termes pris en signe contraire.

Dans chaque dyadic obtenu, nous faisons les produits indéfinis, c'est-à-dire nous formons les dyades comme il a été fait dans la remarque du § 91 ; nous appelons pour simplifier les dyadics à 2 termes (dyadics planaires) :

$$\varphi_1 \equiv \mathbf{ii}+\mathbf{jj} \qquad \varphi_3 \equiv \mathbf{ij}+\mathbf{ji} \qquad \varepsilon_1 \equiv \frac{1}{2}$$

$$\varphi_2 \equiv \mathbf{ii}-\mathbf{jj} \qquad \varphi_4 \equiv \mathbf{ij}-\mathbf{ji} \qquad \varepsilon_2 \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nous multiplions par l'inversion ces opérations de 1re espèce pour obtenir celles de seconde espèce en changeant simplement les signes des dyadics, et nous avons ainsi réuni en 24 dyadics le groupe complet des opérations représentant la symétrie du Raumgitter hexagonal et de la classe holoédrique correspondante :

Les 6 mouvements de l'axe sénaire.		Les 6 axes binaires $\mathbf{i}''$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}''$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{i}$.	
1′	$\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	13′	$\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 - \mathbf{kk}$
2′	$-\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	14′	$-\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 - \mathbf{kk}$
3′	$-\varphi_1 + \mathbf{kk}$	15′	$-\varphi^2 - \mathbf{kk}$
4′	$-\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	16′	$-\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 - \mathbf{kk}$
5′	$\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	17′	$\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_2 - \mathbf{kk}$
6′	$\varphi_1 + \mathbf{kk}$	18′	$\varphi_2 - \mathbf{kk}$

Multipliés par l'inversion :

(mais en partant de 4′ et 16′ pour plus d'homogénité).

Les 6 mouvements de l'axe sénaire combinés chacun avec une réflexion dans le plan normal.		Les 6 plans de symétrie normaux aux axes $\mathbf{j}''$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{i}''$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}$ et dont les traces sur le réseau fondam. sont donc $\mathbf{i}''$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}''$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{i}$.	
7′	$\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	19′	$\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
8′	$-\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	20′	$-\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
9′	$-\varphi_1 - \mathbf{kk}$	21′	$-\varphi_2 + \mathbf{kk}$
10′	$-\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	22′	$-\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
11′	$\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	23′	$\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
12′	$\varphi_1 - \mathbf{kk}$	24′	$\varphi_2 + \mathbf{kk}$

98. Nous appelons dyadics *sénaires* les dyadics numérotés d'un chiffre impair et dyadics *ternaires* les dyadics numérotés d'un chiffre pair. Les différentes formes des dyadics sénaires, abstraction faite de leur dernière dyade $\mathbf{kk}$ indépendante des 2 premiers termes dont les dyadics ne renferment que les vecteurs $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, sont uniquement :

$$\begin{array}{cc} \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 & \varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 \\ \varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 & \varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 \\ -\varphi_1 & -\varphi_2 \end{array}$$

En multipliant chacune des 4 premières de ces formes par elle-même et chacune des 3 autres, nous obtenons les 16 produits que voici, dont les seconds membres sont uniquement chacune des 6 formes correspondantes des dyadics ternaires :

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)^2 = -\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3)^2 = \varphi_1$

$(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4)^2 = -\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)^2 = \varphi_1$

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4).(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_1$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4$

$(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4).(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_1$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4$

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4)(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3) = \varphi_2$

$(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_2$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3).(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4) = -\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3$

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3) = \varphi_2$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4).(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3$

$(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4) = -\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_2$

Ces produits s'effectuent très simplement : les combinaisons scalaires $\varphi_i\varphi_k$ étant trouvées une fois pour toutes (les combinaisons $\varphi_1\varphi_k = \varphi_k$, car φ_1 est l'identité planaire (i j)), chaque produit se fait comme le produit de 2 binômes algébriques.

Ainsi : $(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)^2 = \varepsilon_1^2\varphi_1^2 + 2\,\varepsilon_1\varepsilon_2\varphi_1\varphi_4 + \varepsilon_2^2\varphi_4^2 = (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\,\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 = -\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4$. D'ailleurs les résultats des 6 premiers produits peuvent être donnés à priori : les puissances du 1er mouvement de l'axe sénaire sont évidemment les 5 autres rotations différentes qu'il implique, celles du dyadic 2′, les dyadics 4′ et 6′ qui sont les 2 autres mouvements de l'axe ternaire, et la seconde puissance d'un axe binaire doit donner l'identité. Les résultats trouvés ne sont qu'une confirmation par le calcul en dyadics de ce qui se déduit déjà dans ce cas-ci plus simplement par le raisonnement seul. D'ailleurs à vrai dire, à condition d'établir d'abord les dépendances qui existent entre les éléments de symétrie : centre, axes et plans de symétrie, toute cette déduction par les dyadics de la symétrie des 32 classes cristallines de celle des 6 classes holoédriques se fait bien plus simplement au moins pour certaines classes par le seul raisonnement en supprimant successivement les éléments de symétrie dans chaque classe holoédrique. Les dyadics ont l'avantage d'être l'expression même algébrique des opérations de symétrie, d'en impliquer par le fait en eux-mêmes les dépendances mutuelles et de fournir ainsi directement, par leurs combinaisons réciproques, les combinaisons mêmes de ces opérations sans en laisser échapper aucune.

Naturellement si l'un des dyadics facteurs des 1ers membres change de signe, chaque terme ou chaque dyade du produit change de signe et le second membre doit être pris en signe contraire ; par suite si les 2 dyadics facteurs changent de signe à la fois, le résultat ne change pas comme pour un produit ordinaire.

D'autre part, le dyadic $-\varphi_1$ ne fait que changer le signe du dyadic *planaire* (i j) qu'il multiplie (celui dont les dyades ne renferment que les vecteurs-unités i et j et dont l'opération équivalente a lieu ainsi dans le plan de ces vecteurs) ; le dyadic $-\varphi_2$ change φ_1 en $-\varphi_2$, φ_4 en $\pm\varphi_3$ (c'est-à-dire $\varphi_2\varphi_4 = \varphi_3$ et $\varphi_4\varphi_2 = -\varphi_3$), et inversement change φ_2 en $-\varphi_1$, φ_3 en $\pm\varphi_4$. On se rend donc compte sans peine que toute combinaison de l'une quelconque des 6 formes sénaires écrites, avec elle-même ou chacune des 5 autres, est toujours

l'une des 6 formes ternaires correspondantes. Mais puisque les formes des dyadics ternaires sont précisément celles des dyadics sénaires prises en signe contraire, en vertu de ce qui vient d'être dit du changement de signe, et en considérant encore une fois les résultats des produits effectués, les combinaisons des 6 formes sénaires et les signes de la dernière dyade kk, nous obtenons immédiatement les 2 principes suivants dans le groupement des 24 dyadics donnés, qui nous fournissent aussitôt les 11 sous-groupes indépendants d'opérations de la symétrie sénaire.

Le produit de 2 dyadics ternaires ou de 2 dyadics sénaires est toujours un dyadic ternaire, tandis que le produit d'un dyadic ternaire et d'un dyadic sénaire est toujours un dyadic sénaire.

Le produit de 2 dyadics d'une même colonne, 1′ à 12′ ou 13′ à 24′, (d'une même rangée, 1′ à 6′ avec 13′ à 18′ ou 7′ à 12′ avec 19′ à 24′) est toujours un dyadic de la première colonne (rangée), tandis que le produit de 2 dyadics pris un dans chaque colonne (rangée) est toujours un dyadic de la seconde.

En effet dans ces conditions, chacun des groupes de dyadics qui suivent est tel que le produit de 2 quelconques de ses dyadics ne peut être que l'un des dyadics du groupe :

1′ à 6′ 7′ à 12′	13′ à 18′ 19′ à 24′	groupe holoèdrique des 24 dyadics sénaires et ternaires.
1′ à 6′	7′ à 12′	le produit de 2 dyadics de la 1re colonne est toujours un dyadic de cette colonne : axe sénaire et plan de symétrie normal.
1′ à 6′	13′ à 18′	le produit de 2 dyadics de la 1re rangée ne peut être qu'un dyadic de cette rangée : axe sénaire et 6 axes binaires.
1′ à 6′	19′ à 24′	les 2 principes simultanément : axe sénaire et 6 plans de symétrie.
1′ à 6′		axe sénaire ; puissances du dyadic 1′.
2′ 4′ 6′ 8′ 10′ 12′	14′ 16′ 18′ 20′ 22′ 24′	groupe complet des 12 dyadics ternaires.
2′ 4′ 6′ 7′ 9′ 11′	14′ 16′ 18′ 19′ 21′ 23′	variation du groupe précédent : les dyadics sénaires 7′, 9′, etc., exigent également les dyadics ternaires 2′, 4′, etc., et inversement leurs produits avec ces derniers les reproduisent eux-mêmes.
		Cette autre variation remplit aussi les mêmes conditions : 2′ 4′ 6′ 13′ 15′ 17′ / 7′ 9′ 11′ 20′ 22′ 24′ mais représente à première vue la même symétrie que la précédente.

2′ 4′ 6′ 8′ 10′ 12′	dyadics ternaires de la 1re colonne : axe ternaire et plan de symétrie normal.
2′ 4′ 6′ 7′ 9′ 11′	axe sénaire de seconde espèce.
2′ 4′ 6′ 14′ 16′ 18′	variations de ces 2 groupes représentant encore à première vue les mêmes symétries :
2′ 4′ 6′ 20′ 22′ 24′	2′ 4′ 6′ 13′ 15′ 17′ et 2′ 4′ 6′ 19′ 21′ 23′
2′ 4′ 6′	axe ternaire ; puissances de 2′.

Ce sont donc là *12 groupes* indépendants d'opérations de la symétrie sénaire, en négligeant naturellement les groupes de symétrie binaire et terbinaire inclus dans la symétrie sénaire et fournis par exemple par chaque dyadic de la 2me colonne multiplié par lui-même ou chaque couple de ces dyadics dont les formes planaires (i j) sont de signe contraire. Si inversement on établit d'abord, comme il a été plutôt fait pour les systèmes précédents, les 5 classes inférieures qui se laissent immédiatement déterminer dans les 12 dyadics de la 1re colonne et introduit ensuite successivement dans les groupes trouvés les dyadics de la seconde colonne qui exigent nécessairement ceux de la 1re, de manière à ne laisser de côté aucune classe, on se rend compte de suite que, à part ces groupes de symétrie binaire et terbinaire, il n'est pas d'autre groupe indépendant possible que les 12 établis, et qui représentant la symétrie des 12 classes suivantes dans l'ordre trouvé :

XXI. Classe hexagonal-holoédrique (dihexagonal-bipyram.)
XXII. Classe hexag. pyramidale-hémiédrique (hexagon.-bipyram.).
XXIII. Classe hexag. trapezoédrique-hémiédrique (hexag.-trapezoéd.).
XXIV. Classe hexag. holoédrique-hémimorphe (dihexag.-pyram.).
XXV. Classe hexag. pyram.-hémiédr.-hémimorphe (hexag.-pyram.).
XXVI. Classe trigonale-hémiédrique (ditrigonale-bipyram.).
XXVII. Classe rhomboédrique-hémiédr. (ditrigonale-scalénoédrique).
XXVIII. Classe trigonale-tetartoédrique (trigonale-bipyramidale).
XXIX. Classe rhomboédrique-tétartoédrique (rhomboédrique).
XXX. Classe trapezoédrique-tétartoédrique (trigon.-trapezoédrique).
XXXI. Classe rhomboédrique-hémimorphe (ditrig.-pyramidale).
XXXII. Classe hexagon.-octaédrique (trig.-pyramidale).

L'ordre des classes dans les systèmes étant en réalité sans aucune importance. nous nous sommes permis de dénommer ces classes directement dans l'ordre où nous les avons trouvées.