CHAPITRE II.

1. Les facteurs caractéristiques du circuit pour l'élément de l'unité de longueur.

Ayant admis l'existence d'un circuit élémentaire à attribuer à l'unité de longueur du système, on peut développer la théorie sans fixer par avance un schéma particulier à l'élément de l'unité de longueur. Il suffit, comme le fait Steinmetz [1], en se rapportant aux différentes relations possibles entre les courants et les tensions, de grouper suivant leur nature et leur position, les différents conducteurs qu'il y a lieu de considérer dans le circuit. Nous avons admis également, que la circulation électrique dans l'élément était régie par les lois ordinaires de l'électrostatique et de l'électrodynamique. Pour effectuer l'intégration rendant compte de l'ensemble du phénomène, il nous faut connaître deux genres de relations:

1er genre : par rapport aux extrémités de l'élément, les relations qui lient les courants et les tensions,

2me genre : par rapport à un point quelconque du système et la terre, les relations qui lient les courants et les tensions.

---

[1] Voir STEINMETZ, *Phénomènes électriques de transition* — traduction française, Paris (1912) — p. 286. Steinmetz souligne cette classification et s'en sert pour développer la théorie de la circulation par ondes dans les lignes de transmission d'énergie électrique à grande distance. Mais pour le cas traité, Steinmetz attribue aux quatre facteurs caractéristiques des valeurs qui sont des constantes, ou des fonctions linéaires de la pulsation, en vertu des considérations que nous exposons, les quatre facteurs de notre théorie sont des fonctions quelconques de la pulsation.

Voir aussi JANET, *Cours d'électrotechnique*, II vol. 6e édit. p. 178.

Pour le premier genre de relations nous avons:

1º des forces élect. motrices consommées en phase avec le courant,

2º des forces élect. motrices consommées en quadrature avec le courant.

Pour le second genre de relations nous avons:

3º des courants consommés en phase avec les forces élect. motrices.

4º des courants consommés en quadrature avec les f.e.m.

Il y a lieu de déterminer quatre relations caractéristiques fixées par quatre *facteurs de proportionalité.*

1º Pour un circuit complexe intercalé entre deux points A et B d'un conducteur traversé par un courant I, on peut calculer un facteur résultant r de la nature d'une résistance ohmique et tel que $r\,I$ soit l'équivalent de toutes les forces électriques motrices consommées en phase avec le courant. Nous appellerons r le facteur caractéristique de proportionalité des f.e.m. consommées en phase avec le courant.

2º De même, pour tenir compte des f.e.m. consommées en quadrature avec le courant, on peut déterminer un facteur résultant x de la nature d'une self induction et tel que $x\,I$ soit l'équivalent de toutes les f.e.m. consommées dans le circuit en quadrature avec le courant. Nous appelons x le facteur caractéristique de proportionalité des f.e.m. consommées en quadrature avec le courant.

3º Si en un point de potentiel V du système (potentiel par rapport à la terre) on place en dérivation entre le conducteur et la terre un circuit complexe quelconque, il y a lieu de calculer un facteur résultant g de la nature d'une conductance, et tel que $g\,V$ soit l'équivalent de tous les courants consommés en phase avec la f.e.m. Nous appelons g le facteur caractéristique de proportionalité des courants consommés en phase avec la f.e.m.

4° Pour tenir compte des courants consommés en quadrature avec la f.e.m., on peut déterminer un facteur résultant *b* de la nature d'une susceptance et tel que *b V* soit l'équivalent de tous les courants consommés en quadrature avec la f.e.m. Nous appelons *b* le facteur caractéristique de proportionalité des courants consommés en quadrature avec la f.e.m.

De cette façon, il y a lieu de traiter le problème dans toute sa généralité et en tenant compte de tous les phénomènes possibles dans l'élément. Ainsi:

r, caractérise la consommation de puissance réelle due aux résistances ohmiques, à la composante wattée de la mutuelle-inductance, à la composante wattée due à l'hytérésis magnétique et au rayonnement électromagnétique.

x, caractérise la consommation de puissance apparente due à la self inductance, à la composante déwattée de la mutuelle-inductance.

g, caractérise la consommation de puissance réelle due aux fuites à travers la matière isolante et aux décharges par effluves, la composante wattée de l'influence électrostatique, de l'hystérésis diélectrique et de la radiation électrostatique.

b, caractérise la consommation de puissance apparente due aux composantes déwattées de la self induction, de la capacité et de l'influence électrostatique.

Pour préciser, considérons les deux exemples suivants:

1° Le circuit élémentaire défini pour l'unité d'élément est représenté par le schéma de la fig. 4 (circuit de Kirchhoff).

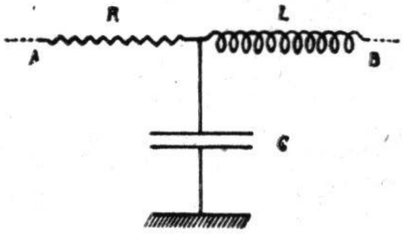


Fig. 4

On trouve pour les quatre facteurs caractéristiques les valeurs $r = R$, $x = L\,\omega$, $g = o$, $b = c\,\omega$.

2° Le circuit élémentaire défini pour l'unité d'élément est représenté par le schéma de la fig. 5.

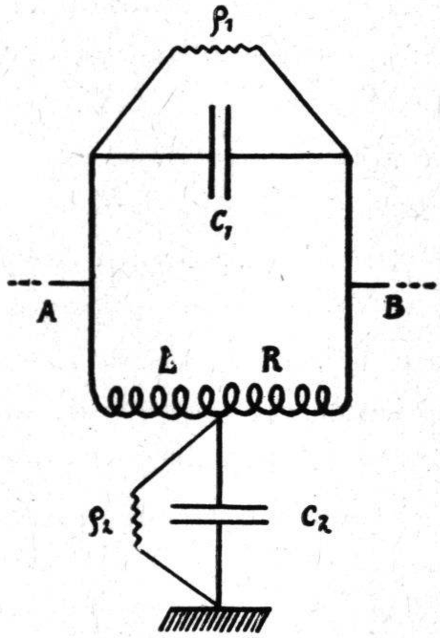


Fig. 5

On trouve pour les quatre facteurs caractéristiques les valeurs:

$$r = \frac{(R\varrho_1 + R^2 + L^2\omega^2)\ \varrho_1\ (R^2 + L^2\omega^2)}{(R\varrho_1 + R^2 + L^2\omega^2)\ + \varrho_1^2[L\omega - C_1\omega(R^2 + L^2\omega^2)]}$$

$$x = \frac{\varrho_1^2(R^2 + L^2\omega^2)\ [L\omega - C_1\omega\ (R^2 + L^2\omega^2)]}{(R\varrho_1 + R^2 + L^2\omega^2) + \varrho_1^2[L\omega - C_1\omega\ (R^2 + L^2\omega^2)]}$$

$$g = \frac{1}{\varrho_2}$$

$$b = C_2\omega.$$

On voit que les facteurs caractéristiques sont des constantes ou des fonctions plus ou moins compliquées de la pulsation ω.

Lorsque le circuit de l'unité d'élément est défini, les facteurs caractéristiques sont par le fait même définis.

Inversement, lorsque les facteurs caractéristiques sont donnés, on peut déterminer le circuit correspondant pour l'unité d'élément du système.

Comme exemple plus compliqué, on pourrait prendre celui d'un circuit complexe formé d'un primaire et d'un secondaire, comme un transformateur. Dans ce cas, l'unité de longueur du circuit est lui-même un petit transformateur élémentaire. Ici encore il est facile de dégager les quatre facteurs caractéristiques, il suffit, comme le fait Besson [1] de ramener le circuit double formé du primaire et du secondaire à un circuit simple correspondant.

On peut donc, d'une façon générale, lorsque chaque élément du système est assimilable à un ensemble complexe, définir les facteurs r, x, g, b, qui seront des fonctions de la pulsation et des conducteurs définissant le circuit élémentaire. D'une façon générale, on peut donc poser que:

$$
\begin{aligned}
r &= f_1\,(\omega)\\
x &= f_2\,(\omega)\\
g &= f_3\,(\omega)\\
b &= f_4\,(\omega).
\end{aligned}
$$

Nous admettons dans la suite du développement que ces fonctions existent, mais qu'elles ne sont pas déterminées, ce qui donne un caractère de généralité à la théorie.

Ensuite, pour le cas particulier du circuit de nos expériences nous justifierons certaines précisions sur la nature de l'une ou l'autre de ces fonctions.

2. Détermination de l'ensemble complexe relatif à l'unité d'élément du système.

Il est facile à présent de se rendre compte comment on peut demander à un schéma particulier la justification d'un phénomène particulier.

Pour résoudre par l'élaboration d'un tel schéma pour l'unité d'élément, le problème par exemple de la non har-

---

[1] Besson, *Etude sur la résonance des transformateurs* — thèse — Fribourg 1921.
Revue générale de l'Electricité, tome X, 1921, page 797.

monicité des partiels, il suffit d'aborder la question par la négative.

Nous avons trouvé que r, x, g, b sont des fonctions de ω. Nous résolvons le problème sans préciser la nature de ces fonctions de ω. Autrement dit, nous introduisons dans nos équations les grandeurs r, x, g, b, fonctions *arbitraires* de ω.

Ainsi nos équations nous fixent en fonction de r, x, g, b, (ou de l'une ou l'autre de ces valeurs) les fréquences correspondant aux différents harmoniques, c'est-à-dire la distribution des partiels en fonction de la fréquence, ce qui nous permet de préciser la nature des fonctions r, x, g, b, et de trouver ensuite le schéma définissant de telles fonctions.

On voit que ce procédé s'adresse à un phénomène particulier pour un circuit déterminé. Que pour un autre phénomène avec le même circuit, il y aurait lieu de définir également un schéma tel qui s'y justifie cet autre phénomène, mais rien n'indique en soi que les schémas ainsi définis pour deux phénomènes différents soient *identiques*. Nous reviendrons sur ce point au chapitre IV.

3. Equations de la circulation électrique. Forme imaginaire.

Nous utilisons pour la simplification du développement la méthode des imaginaires avec la restriction qu'elle comporte: phénomènes périodiques dans le temps, condition expérimentalement remplie pour le régime alternatif forcé que nous imposons au système.

Par rapport à un système d'axe quelconque fixant les origines des phases et les grandeurs des vecteurs, une force électromotrice alternative est représentée en un point par la grandeur imaginaire E et le courant alternatif par la grandeur imaginaire I.

Les lettres majuscules italiques représentent les grandeurs imaginaires.

Comptons la distance l à partir d'un point O du système qui a la f.e.m. imaginaire E et un courant imaginaire I. Comptons les l positivement dans le sens de la puissance décroissante et négativement dans le sens de la puissance croissante.

Considérons un circuit le long duquel se manifeste une absorption de courant due à l'existence de capacités propres ou de capacités par rapport à la terre.

Dans l'élément dl la f.e.m. absorbée en phase avec le courant est:

$$I\ r\ dl$$

la f.e.m. absorbée en quadrature avec le courant est:

$$j\ I\ x\ dl$$

la variation de la f.e.m. dans l'élément est donc représentée par:

$$\begin{aligned} - dE &= I\, r\, dl + j\, I\, x\, dl \\ &= I\ (r + jx)\ dl \end{aligned}$$

$$(1) \qquad - \frac{dE}{dl} = I\ (r + j\, x).$$

Dans l'élément dl il y a une fuite de courant par le circuit en parallèle réuni à la terre (circuit figurant la capacité propre du système ou une capacité par rapport à la terre).

Le courant absorbé en phase avec la f.e.m. est représenté par:

$$E\ g\ dl$$

Le courant en quadrature avec la f.e.m. est représenté par :

$$j\ E\ b\ dl$$

la variation $- dI$ du courant entre l'entrée et la sortie de l'élément est représentée par :

$$\begin{aligned} - dI &= E\, g\, dl + j\, E\, b\, dl \\ &= E\ (g + j\ b)\ dl \end{aligned}$$

$$(2) \qquad - \frac{dI}{dl} = E\ (g + j\ b)$$

Ces équations différentielles (1) et (2) sont symétriques en I et en E. Elles déterminent entièrement le problème.

Différentions les équations (1) et (2), nous trouvons:

$$\frac{d^2 E}{d l^2} = (r + j x) \frac{d I}{d l} \tag{3}$$

$$\frac{d^2 I}{d l^2} = (g + j b) \frac{d E}{d l} \tag{4}$$

en substituant (1) et (2) dans (3) et (4) on a les équations différentielles de I et E.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 E}{d l^2} &= (r + j x) (g + j b) E = K^2 E \\ \frac{d^2 I}{d l^2} &= (r + j x) (g + j b) I = K^2 I \end{aligned} \right. \tag{5}$$

en posant

$$K^2 = (r + j x) (g + j b) \tag{6}$$

ces deux équations (5) sont de même nature, par conséquent I et E sont des fonctions différentes seulement par les constantes d'intégration définies par les conditions aux limites.

L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 V}{d l^2} = K^2 V$$

est de la forme:

$$V = A e^{kl} + B e^{-kl}$$

nous avons donc pour (5)

$$\left\{ \begin{aligned} I &= A_1 e^{kl} + B_1 e^{-kl} \\ E &= A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl} \end{aligned} \right. \tag{7}$$

e = base des logarithmes naturels.

Ces quatres constantes arbitraires A_1, A_2, B_1, B_2, peuvent être ramenées à deux en tenant compte de (1) et de (2).

$$\frac{dI}{dl} = K A_1 e^{kl} - K B_1 e^{-kl} = -(g + jb)\,[A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl}]$$

$$\frac{dE}{dl} = K A_2 e^{kl} - K B_2 e^{-kl} = -(r + jx)\,[A_1 e^{kl} + B_1 e^{-kl}]$$

ce qui peut s'écrire en multipliant la première relation par $(r + jx)$ et la seconde par K:

$$(r+jx)\,K A_1 e^{kl} - (r+jx)\,K B_1 e^{-kl} = -(r+jx)\,(g+jb)\,[A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl}]$$

$$(r+jx)\,K A_1 e^{kl} - (r+jx)\,K B_1 e^{-kl} = -K^2 A_2 e^{kl} - K^2 B_2 e^{-kl}$$

$$-(r+jx)\,K A_1 e^{kl} - (r+jx)\,K B_1 e^{-kl} = K^2 A_2 e^{kl} - K^2 B_2 e^{-kl}$$

en additionnant

$$-2K\,(r+jx)\,B_1 e^{-kl} = -2K^2 B_2 e^{-kl}$$

$$(r+jx)\,B_1 = K B_2$$

$$B_2 = \frac{r+jx}{K} B_1$$

$$B_2 = \frac{K}{g+jb} B_1$$

et par soustraction

$$2K\,(r+jx)\,A_1 e^{kl} = -2K^2 A_2 e^{kl}$$

$$(r+jx)\,A = -K A_2$$

$$A_2 = -\frac{r+jx}{K} A_1$$

$$A_2 = -\frac{K}{g+jb} A_1$$

en introduisant ces deux valeurs de A_2 et de B_2 dans nos équations nous trouvons:

$$(8)\quad \begin{cases} I = A_1 e^{kl} + B_1 e^{-kl} \\ E = -\dfrac{K}{(g+jb)}\,(A_1 e^{kl} - B_1 e^{-kl}) \end{cases}$$

nous pouvons aussi écrire

$$(9) \quad \begin{cases} I = -\dfrac{K}{r + jx}\left(A_2 e^{kl} - B_2 e^{-kl}\right) \\ E = A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl} \end{cases}$$

4. Cas du circuit des expériences.

Les équations (8) et (9) sont entièrement déterminées quand on fixe par les conditions aux limites deux quelconques des quatre constantes d'intégration A_1, A_2, B_1, B_2, et les deux groupes (8) et (9) montrent le caractère de dépendance qui lie I et E et qui est tel que si I est déterminé, E l'est par le fait même, et inversement si E est déterminé, I se trouve l'être également. On voit, quant aux conditions aux limites, que le problème se trouve entièrement déterminé quand on fixe deux relations d'état électrique du système. On peut prendre le voltage et le courant en un point du circuit, ou le voltage en un point et le courant en un autre point, ou encore le voltage en un point et le rapport du voltage au courant en un autre point.

Les conditions expérimentales de nos mesures (conditions que nous discuterons plus loin) sont fixées, comme données, par le voltage à l'extrémité A du système (côté générateur) et par le rapport du voltage au courant, à l'extrémité B qui par une résistance ohmique R est reliée à la terre.

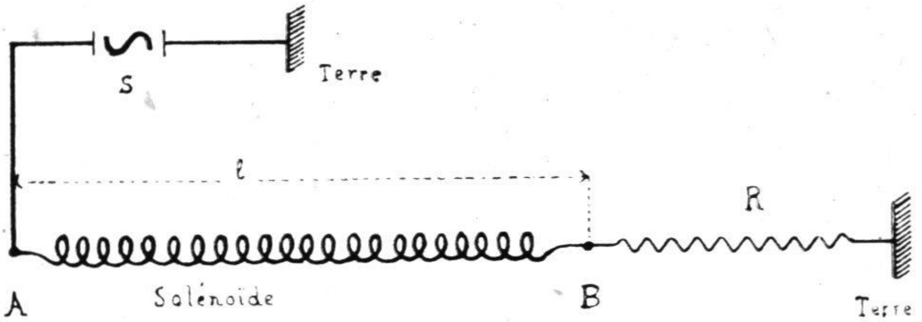


Fig. 6

Exprimons, à l'aide de l'équation (9) et des conditions aux limites le courant I en fonction de E. Nous prenons l'origine en A du côté de la génératrice.

En $A \ldots l = 0$

$$(10) \quad \begin{cases} I_0 = -\dfrac{K}{r + jx}(A_2 - B_2) \\ E_0 = A_2 + B_2 \end{cases}$$

en $B \ldots \; l = l_0 =$ constante

$$(11) \quad \begin{cases} I_{l0} = -\dfrac{K}{r + jx}(A_2 e^{kl_0} - B_2 e^{-kl_0}) \\ E_{l0} = A_2 e^{kl_0} + B_2 e^{-kl_0} \end{cases}$$

les relations (11) avec la condition imposée donnent:

$$(12) \quad \frac{E_{l0}}{I_{l0}} = \frac{A_2 e^{kl_0} + B_2 e^{-kl_0}}{-\dfrac{K}{r + jx}(A_2 e^{kl_0} - B_2 e^{-kl_0})} = R$$

l'équation $E_0 = A_2 + B_2$ du groupe (10) et l'équation (12) fixent les constantes d'intégration; elles représentent deux équations à deux inconnus A_2 et B_2 desquelles on tire les valeurs de A_2 et B_2.

De (12) $A_2 e^{kl_0} + B e^{-kl_0} = -R \dfrac{K}{r+jx}(A_2 e^{kl_0} - B_2 e^{-kl_0})$

$$A_2 \left(1 + R \frac{K}{r+jx}\right) e^{kl_0} = -B_2 \left(1 - R \frac{K}{r+jx}\right) e^{-kl_0}$$

de (10) $\qquad E_0 = A_2 + B_2$

$$B_2 = E_0 - A_2$$

$$A_2 \left(1 + R \frac{K}{r+jx}\right) e^{kl_0} = A_2 \left(1 - R \frac{K}{r+jx}\right) e^{-kl_0} = -E_0 \left(1 - R \frac{K}{r+jx}\right) e^{-kl_0}$$

$$A_2 \left[\left(1 + R \frac{K}{r+jx}\right) e^{kl_0} - \left(1 - R \frac{K}{r+jx}\right) e^{-kl_0}\right] = -E_0 \left(1 - R \frac{K}{r+jx}\right) e^{-kl_0}$$

$$A_2 \left[(e^{kl_0} - e^{-kl_0}) + R \frac{K}{r+jx}(e^{kl_0} + e^{-kl_0})\right] = -E_0 \left(1 - R \frac{K}{r+jx}\right) e^{-kl_0}$$

$$(13)\qquad A_2 = -\frac{E_0\left(1 - R\dfrac{K}{r+jx}\right)e^{-klo}}{\left(e^{klo} - e^{-klo}\right) + R\dfrac{K}{r+jx}\left(e^{klo} + e^{-klo}\right)}$$

$$B_2 = \frac{E_0\left(e^{klo} - e^{-klo}\right) + E_0 R\dfrac{K}{r+jx}\left(e^{klo} + e^{-klo}\right) + E_0\left(1 - R\dfrac{K}{r+jx}\right)e^{-klo}}{\left(e^{klo} - e^{-klo}\right) + R\dfrac{K}{r+jx}\left(e^{klo} + e^{-klo}\right)}$$

$$(14)\qquad B_2 = \frac{E_0\left(1 + R\dfrac{K}{r+jx}\right)e^{klo}}{\left(e^{klo} - e^{-klo}\right) + R\dfrac{K}{r+jx}\left(e^{klo} + e^{-klo}\right)}$$

posons

$$(15)\qquad C = \frac{A_2}{B_2}$$

$$(16)\qquad C = \frac{-\left(1 - R\dfrac{K}{r+jx}\right)e^{-klo}}{\left(1 + R\dfrac{K}{r+jx}\right)e^{klo}} = -\frac{1 - R\dfrac{K}{r+jx}}{1 + R\dfrac{K}{r+jx}}\,e^{-2klo}$$

d'où finalement

$$E_0 = A_2 + B_2$$

$$A_2 = C\,B_2$$

$$E_0 = B_2\,(1 + C)$$

$$(17)\qquad B_2 = \frac{E_0}{1 + C}$$

$$(18)\qquad A_2 = \frac{E_0}{1 - C}$$

et les équations (9) deviennent

$$(19) \qquad I = -E_0 \frac{K}{r+jx} \frac{1}{1+C} \left\{ C e^{kl} - e^{-kl} \right\}$$

$$(20) \qquad E = E_0 \frac{1}{1+C} \left\{ C e^{kl} + e^{-kl} \right\}$$

expression sous forme imaginaire des équations représentant le courant et la tension en un point du système.

5. Equations du courant et de la tension. Forme réelle.

On peut tirer des expressions (19) et (20) représentant, sous la forme imaginaire, le courant et la tension, des relations intéressantes pour l'analyse des phénomènes, mais il est plus simple et plus immédiat de discuter sur des expressions sous forme réelle.

Prenons la phase de la tension à l'origine, pour origine des phases.

Nous avons de ce fait:

en $l = o$

$$E_0 = \dot{E}_0 \, e^{j\omega t}$$

$\dot{E}_0$ étant l'amplitude réelle de la fonction alternative représentant la tension à l'origine. La valeur réelle e_0 correspond à la valeur imaginaire E_0 est:

$$e_0 = \dot{E}_0 \cos \omega l$$

Dans ces différentes équations intervient la grandeur K.

Nous avons posé K *(équ. 6)* comme la racine carrée du produit de deux grandeurs imaginaires, K est donc aussi une grandeur imaginaire.

Posons:

$$(21) \qquad K = \alpha + j\beta.$$

Il suit:

$$(\alpha + j\beta)^2 = (r + jx)(g + jb)$$

ou

$$(\alpha^2 - \beta^2) - 2j\alpha\beta = (rg - xb) + j(rb + gx)$$

ce qui se résout par:

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = r\,g - x\,b \\ 2\alpha\beta = r\,b + g\,x \end{cases}$$

les équations élevées au carré et additionnées donnent

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\,\alpha^2\,\beta^2 = (rg - x\,b)^2 + (rb + gx)^2 = (r^2 + x^2)(g^2 + b^2) = z^2 y^2$$

avec

$z = \sqrt{r^2 + x^2}$ = *impédance résultante par unité de longueur*

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$ = *admittance* » » » » »

donc

$$(23) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = z\,y$$

de (22), (23), nous tirons:

$$(24) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(z\,y + r\,g - x\,b)}$$

$$(25) \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{2}(z\,y - r\,g + x\,b)}.$$

Dans le groupe des équations (9) intervient encore l'expression

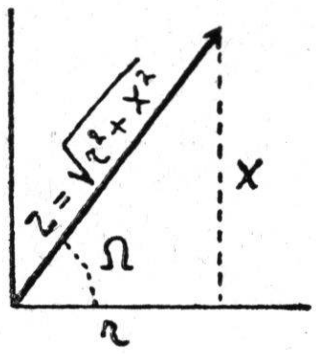
$$\frac{K}{r + j\,x} = \frac{\alpha + j\,\beta}{r + j\,x}$$

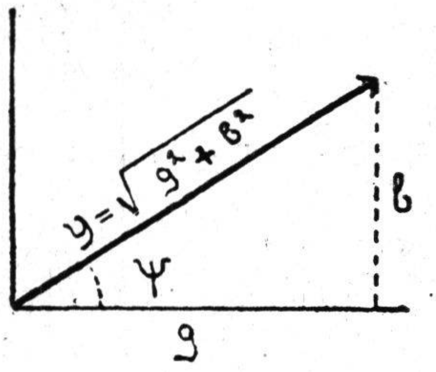
que nous pouvons transformer de la façon suivante:

Posons:

$$\frac{\alpha + j\,\beta}{r + j\,x} = a\,e^{j\delta}$$

Nous pouvons remarquer les relations suivantes:





$$r = z \cos \omega \qquad\qquad g = y \cos \Psi$$

$$x = z \sin \omega \qquad\qquad b = y \sin \Psi$$

$$lg\, \omega = \frac{x}{r} \qquad\qquad lg\, \Psi = \frac{b}{g}$$

$$\begin{aligned}(\alpha + j\beta)^2 &= (g + jb)\,(r + jx)\\ &= zy\,(\cos \Psi + j \sin \Psi)\,(\cos \omega + j \sin \omega)\\ &= zy\, e^{j\Psi} e^{j\omega} = zy\, e^{j(\Psi+\omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha + j\beta) &= \sqrt{zy}\, e^{j\frac{\Psi+\omega}{2}}\\ &= \sqrt{zy}\left[\cos \frac{\Psi+\omega}{2} + j \sin \frac{\Psi+\omega}{2}\right]\end{aligned}$$

d'où nous tirons deux nouvelles relations pour α et β.

$$(25) \qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{zy} \cos \dfrac{\Psi+\omega}{2} \\[2ex] \beta = \sqrt{zy} \sin \dfrac{\Psi+\omega}{2} \end{cases}$$

On aura par conséquent:

$$\frac{\alpha + j\beta}{r + jx} = \frac{(\alpha + j\beta)\,(r - jx)}{r^2 + x^2} = \frac{\sqrt{zy}\, e^{j\frac{\Psi+\omega}{2}}\, z e^{-j\omega}}{z^2}$$

$$= \sqrt{\frac{y}{z}}\, e^{j\frac{\Psi-\omega}{2}}$$

en posant:

$$(27) \qquad \delta = \frac{\Psi - \omega}{2}$$

nous avons:

$$(28) \qquad \frac{\alpha + j\beta}{r + jx} = \sqrt{\frac{y}{z}}\; e^{j\delta}$$

6. Expression sous forme réelle de la tension E.

Reprenons l'expression (9) nous avons pour E

$$E = A_2\, e^{kl} + B_2\, e^{-kl}$$

introduisons les valeurs de A_2 et B_2 données par (13) et (14).

$$E = -\frac{E_0\left(1 - R\dfrac{K}{r+jx}\right) e^{-klo}\, e^{kl}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R\dfrac{K}{r+jx}(e^{klo} + e^{-klo})} + \frac{E_0\left(1 + R\dfrac{K}{r+jx}\right) e^{klo}\, e^{-kl}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R\dfrac{K}{r+jx}(e^{klo} + e^{-klo})}$$

en développant le numérateur.

$$(29) \quad E = \underset{(1)}{-E_0\frac{e^{-klo}}{D}e^{kl}} + \underset{(2)}{E_0\frac{R\dfrac{K}{r+jx}e^{-klo}}{D}e^{kl}} + \underset{(3)}{E_0\frac{e^{klo}}{D}e^{-kl}} + \underset{(4)}{E_0\frac{R\dfrac{K}{r+jx}e^{klo}}{D}e^{-kl}}$$

en appelant D le dénominateur

$$(30) \quad D = (e^{klo} - e^{-klo}) + R\frac{K}{r+jx}(e^{klo} + e^{-klo}).$$

Les composantes (1) et (3) représentent une onde directe et la même onde réfléchie à l'extrémité avec changement de signe.

Les composantes (2) et (4) représentent une onde directe et la même onde réfléchie sans changement de signe.

On vérifie sur la relation (29) pour $l = o$

on a bien $E = E_0$.
en effet.

$$E_{l=o} = E_0 \frac{(1 + R \frac{K}{r+jx}) e^{klo} - (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo}}{D} = E_0$$

Sous la forme (29) la tension E est formée de 4 composantes. Ces composantes peuvent être ramenées à la forme $R e^{j\varphi}$, R se rapportant à l'amplitude de la composante et φ se rapportant à la phase de cette composante.

Il suffit pour cela de dégager de ces expressions le module R et l'argument φ.

Pour trouver le module C d'une expression complexe C une méthode simple consiste à chercher le conjugué C' et de faire les produits.

$$C^2 = C\, C'.$$

Ecrivons pour simplifier C_1, C_2, C_3, C_4, les 4 composantes et C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, leur conjugué.
Nous avons pour la première

$$C_1 = -E_0 \frac{e^{-(\alpha+j\beta)lo} \; e^{(\alpha+j\beta)l}}{\left(e^{(\alpha+j\beta)lo} - e^{-(\alpha+j\beta)lo}\right) + R \frac{\alpha+j\beta}{r+jx}\left(e^{(\alpha+j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta)lo}\right)}$$

et pour son conjuguée

$$C'_1 = -E_0 \frac{e^{-(\alpha-j\beta)lo} \; e^{(\alpha-j\beta)l}}{\left(e^{(\alpha-j\beta)lo} - e^{-(\alpha-j\beta)lo}\right) + R \frac{\alpha-j\beta}{r-jx}\left(e^{(\alpha-j\beta)lo} + e^{-(\alpha-j\beta)lo}\right)}$$

et formons le produit

$$(31) \qquad C_1^2 = C_1 C'_1 = E_0^2 \frac{e^{-(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)lo} \; e^{(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)l}}{DD'}$$

car au dénominateur nous avons à faire le produit de D *(equat* (29)*)* par son conjugué D′

Calculons DD'

$$DD' = \left\{ e^{(\alpha+j\beta)lo} - e^{-(\alpha+j\beta)lo} \right\} \left\{ e^{(\alpha-j\beta)lo} - e^{-(\alpha-j\beta)lo} \right\}$$

$$+ R\frac{\alpha+j\beta}{r+jx}\left\{ e^{(\alpha+j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta)lo} \right\}\left\{ e^{(\alpha-j\beta)lo} - e^{-(\alpha-j\beta)lo} \right\}$$

$$+ R\frac{\alpha-j\beta}{r-jx}\left\{ e^{(\alpha-j\beta)lo} + e^{-(\alpha-j\beta)lo} \right\}\left\{ e^{(\alpha+j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta)lo} \right\}$$

$$+ R^2\frac{(\alpha-j\beta)(\alpha+j\beta)}{(r-jx)(r+jx)}\left\{ e^{(\alpha+j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta)lo} \right\}\left\{ e^{(\alpha-j\beta)lo} + e^{-(\alpha-j\beta)lo} \right\}$$

$$DD' = e^{(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)lo} - e^{(\alpha+j\beta-\alpha+j\beta)lo} - e^{(\alpha-j\beta-\alpha-j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)lo}$$

$$+ R\frac{\alpha+j\beta}{r+jx}\left\{ e^{(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)lo} - e^{(\alpha+j\beta-\alpha+j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta-\alpha+j\beta)lo} - e^{-(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)lo} \right\}$$

$$+ R\frac{\alpha-j\beta}{r-jx}\left\{ e^{(\alpha-j\beta+\alpha+j\beta)lo} - e^{(\alpha-j\beta-\alpha-j\beta)lo} + e^{-(\alpha-j\beta-\alpha-j\beta)lo} - e^{-(\alpha-j\beta+\alpha+j\beta)lo} \right\}$$

$$+ R^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{r^2+x^2}\left\{ e^{(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)lo} + e^{(\alpha+j\beta-\alpha+j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta-\alpha+j\beta)lo} + e^{-(\alpha+j\beta+\alpha-j\beta)lo} \right\}$$

$$DD' = e^{2\alpha lo} + e^{-2\alpha lo} - e^{2j\beta lo} - e^{-2j\beta lo} +$$

$$+ R\frac{\alpha+j\beta}{r+jx}\left\{ e^{2\alpha lo} - e^{-2\alpha lo} - e^{2j\beta lo} + e^{-2j\beta lo} \right\}$$

$$+ R\frac{\alpha-j\beta}{r-jx}\left\{ e^{2\alpha lo} - e^{-2\alpha lo} + e^{2j\beta lo} - e^{-2j\beta lo} \right\}$$

$$+ R^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{r^2+x^2}\left\{ e^{2\alpha lo} + e^{-2\alpha lo} + e^{2j\beta lo} + e^{-2j\beta lo} \right\}$$

$$DD^1 = e^{2\alpha lo}\left\{ 1 + R^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{r^2+x^2} + \frac{2R}{r^2+x^2}(r\alpha+\beta x) \right\} +$$

$$+ e^{-2\alpha lo}\left\{ 1 + R^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{r^2+x^2} - \frac{2R}{r^2+x^2}(r\alpha+\beta x) \right\} +$$

$$+ e^{2j\beta l o}\left\{ -1 - R\left(\frac{\alpha + j\beta}{r + jx} - \frac{\alpha - j\beta}{r - jx}\right) + R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \right\}$$

$$+ e^{-2j\beta l o}\left\{ -1 + R\left(\frac{\alpha + j\beta}{r + jx} - \frac{\alpha + j\beta}{r + jx}\right) + R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \right\}$$

$$= e^{2\alpha l o} \frac{1}{r^2 + x^2}\left\{ (r + R\alpha)^2 + (x + R\beta)^2 \right\}$$

$$+ e^{-2\alpha l o} \frac{1}{r^2 + x^2}\left\{ (r - R\alpha)^2 + (x - R\beta)^2 \right\} +$$

+ la somme de deux conjugués.

Or, la somme de deux conjugués est égale à deux fois la composante réelle des conjugués. En effet.

$$(a + jb) + (a - jb) = 2a$$

Cherchons cette composante réelle. Nous pouvons écrire

$$\left\{ \left(-1 + R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2}\right) - j\left(\frac{2R}{r^2 + x^2}(r\beta - \alpha x)\right) \right\}\left\{ \cos 2\beta l o + j \sin 2\beta l o \right\}$$

en développant on trouve pour la composante réelle:

$$\left(-1 + r^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2}\right) \cos 2\beta l o + \frac{2R}{r^2 + x^2}(r\beta - \alpha x) \sin 2\beta l o$$

et finalement

$$DD'_1 = \frac{1}{r^2 + x^2}\left\{ (r + R\alpha)^2 + (x + R\beta)^2 \right\} e^{2\alpha l o} \tag{32}$$

$$+ \frac{1}{r^2 + x^2}\left\{ (r - R\alpha)^2 + (x - R\beta)^2 \right\} e^{-2\alpha l o}$$

$$+ 2\left(R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} - 1\right) \cos 2\beta l o + \frac{4R}{r^2 + x^2}(r\beta - \alpha x) \sin 2\beta l o.$$

Posons

$$DD'_1 = \frac{A^2}{r^2 + x^2} \tag{33}$$

substituons la valeur de DD' dans l'équat (31)

$$C_1^2 = E_0^2 \frac{e^{-2\alpha l o}\, e^{2\alpha l} (r^2 + x^2)}{A^2}$$

$$C_1 = E_0 \frac{z\, e^{-\alpha l o}}{A} e^{\alpha l}.$$

Remarquons que toutes les composantes de l'équation (29) ont le même dénominateur et que ce dénominateur peut s'écrire

$$D = \sqrt{DD_1'}\, e^{j\xi} = \frac{A}{Z} e^{j\xi} \tag{34}$$

ou $\sqrt{DD'}$ est une constante donnée par l'équation (32) et ξ un angle constant qu'on pourrait facilement tirer de l'équation (30).

Ainsi, en tenant compte des relations (28) et (34)

$$\frac{K}{r + jx} = \sqrt{\frac{\gamma}{z}}\, e^{j\delta}$$

et de

$$K = \alpha + j\beta$$

les différentes composantes de l'équation (28) prennent les formes simples

$$C_1 = -E_0 \frac{e^{-(\alpha + j\beta) l o}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{(\alpha + j\beta) l} = -E_0 \frac{z\, e^{\alpha (l - l o)}}{A} e^{j(\beta (l - l o) - \xi)}$$

$$C_2 = E_0 \frac{R\sqrt{\frac{\gamma}{z}}\, e^{j\delta} e^{-(\alpha + j\beta) l o}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{(\alpha + j\beta) l} = E_0 \frac{\sqrt{\gamma z}}{A} R\, e^{\alpha (l - l o)} e^{j[\beta (l - l o) - \xi + \delta]}$$

$$C_3 = E_0 \frac{e^{(\alpha + j\beta) l o}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{-(\alpha + j\beta) l} = E_0 \frac{Z}{A} e^{-\alpha (l - l o)} e^{-j[\beta (l - l o) + \xi]}$$

$$C_4 = E_0 \frac{R\sqrt{\frac{\gamma}{z}}\, e^{j\delta} e^{(\alpha+j\beta)\, l_0}}{\frac{A}{Z}\, e^{j\xi}}\, e^{-(\alpha+j\beta)\, l} = E_0 \frac{\sqrt{\gamma z}}{A} R\, e^{-\alpha(l-l_0)} e^{-j[\beta(l-l_0)-\xi-\delta]}$$

comme $E_0 = \dot{E}_0\, e^{j\omega t}$ (tension à l'origine), on trouve finalement la valeur réelle correspondante de la tension

$$(35)\quad \boxed{\begin{aligned} e = \frac{E_0}{A}\Big\{ & - z\, e^{\alpha(l-l_0)} \cos\left\{\omega t + [\beta(l-l_0) - \xi]\right\} + R\sqrt{\gamma z}\, e^{\alpha(l-l_0)} \cos\left\{\omega t + [\beta(l-l_0) - \xi + \delta]\right\} \\ & + z\, e^{-\alpha(l-l_0)} \cos\left\{\omega t - [\beta(l-l_0) + \xi]\right\} + R\sqrt{\gamma z}\, e^{-\alpha(l-l_0)} \cos\left\{\omega t - [\beta(l-l_0) + \xi - \delta]\right\}\Big\} \end{aligned}}$$

7. Expression sous forme réelle du courant I.

Reprenons l'expression (9) nous avons pour I

$$I = -\frac{K}{r+jx}\left(A_2\, e^{kl} - B_2\, e^{-kl}\right)$$

introduisons les valeurs de A_2 et B_2 données par (13) et (14)

$$I = -\frac{K}{r+jx}\left\{ \frac{-E_0\left(1 - R\frac{K}{r+jx}\right) e^{-kl_0} e^{kl}}{(e^{kl_0} - e^{-kl_0}) + R\frac{K}{r+jx}(e^{kl_0} + e^{-kl_0})} - \frac{E_0\left(1 + R\frac{K}{r+jx}\right) e^{kl_0} e^{-kl}}{(e^{kl_0} - e^{-kl_0}) + R\frac{K}{r+jx}(e^{kl_0} + e^{-kl_0})} \right\}$$

en développant le numérateur

$$(36)\quad I = E_0 \frac{e^{-kl_0}}{D} \frac{K e^{kl}}{r+jx} - E_0 \frac{R\frac{K}{r+jx} e^{-kl_0}}{D} \frac{K}{r+jx} e^{kl} + E_0 \frac{e^{kl_0}}{D} \frac{K}{r+jx} e^{-kl} + E_0 \frac{R\left(\frac{K}{r+jx}\right) e^{kl_0}}{D} e^{-kl}$$

le dénominateur D est celui donné par l'équation (30). Nous pouvons donc écrire (34)

$$D = \frac{A}{Z} e^{j\xi}$$

nous avons aussi (28)

$$\frac{K}{r+jx} = \sqrt{\frac{\gamma}{z}}\, e^{j\delta}$$

l'équation (36) peut donc s'écrire:

$$I = E_0 \frac{e^{-(\alpha+j\beta)lo}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} \sqrt{\frac{\gamma}{z}}\, e^{j\delta} e^{(\alpha+j\beta)l} - E_0 \frac{R\frac{\gamma}{z} e^{2j\delta} e^{-(\alpha+j\beta)lo}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{(\alpha+j\beta)l}$$

$$+ E_0 \frac{e^{(\alpha+j\beta)lo} \sqrt{\frac{\gamma}{z}}\, e^{j\delta}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{(\alpha+j\beta)l} + E_0 \frac{R\frac{\gamma}{z} e^{2j\delta} e^{(\alpha+j\beta)lo} e^{-(\alpha+j\beta)l}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}}$$

$$I = E_0 \frac{\sqrt{zy}}{A} e^{\alpha(l-lo)} e^{j[\beta(l-lo)-\xi+\delta]} - E_0 \frac{Ry}{A} e^{\alpha(l-lo)} e^{j[\beta(l-lo)+2\delta-\xi]}$$

$$+ E_0 \frac{\sqrt{zy}}{A} e^{-\alpha(l-lo)} e^{-j[\beta(l-lo)-\delta+\xi]} + E_0 \frac{Ry}{A} e^{-\alpha(l-lo)} e^{-j[\beta(l-lo)-2\delta+\xi]}$$

ce qui s'écrit sous forme réelle, puisque $E_0 = \dot{E}_0\, e^{j\omega t}$

(37)

$$i = \frac{\dot{E}_0}{A} \Big\{ \sqrt{z\gamma}\, e^{\alpha(l-lo)} \cos\{\omega t + [\beta(l-lo) - \xi + \delta]\} - R\gamma\, e^{\alpha(l-lo)} \cos\{\omega l + [\beta(l-lo) + 2\delta - \xi]\}$$

$$+ \sqrt{z\gamma}\, e^{-\alpha(l-lo)} \cos\{\omega t - [\beta(l-lo) - \delta + \xi]\} + R\gamma\, e^{-\alpha(l-lo)} \cos\{\omega t - [\beta(l-lo) - 2\delta + \xi]\} \Big\}$$

Nous avons donné le développement complet de la théorie pour un cas d'expérience déterminé. Les raisons du schéma d'expérience fig. (6) page 29 seront discutées plus loin.

Quant au développement complet, nous l'avons fait dans le but d'analyser, sous le même jour, des relations telles que: décalage entre le courant et la tension le long du système et à différentes fréquences, influence du facteur R qui place le solénoïde dans des conditions intermédiaires des cas limites: extrémité à la terre avec ventre de courant et nœud de tension, extrémité isolée avec nœud de courant et ventre de tension. Ces problèmes utilisent les formules générales (35) et (37). Leur étude n'est pas l'objet de ce travail.

Dans ce travail, la discussion porte sur l'analyse du phénomène de la non harmonicité des partiels. Pour cette analyse, à cause des conditions expérimentales imposées, les formules utilisées se réduisent (chap. IV) à des formes plus simples.