NOTE

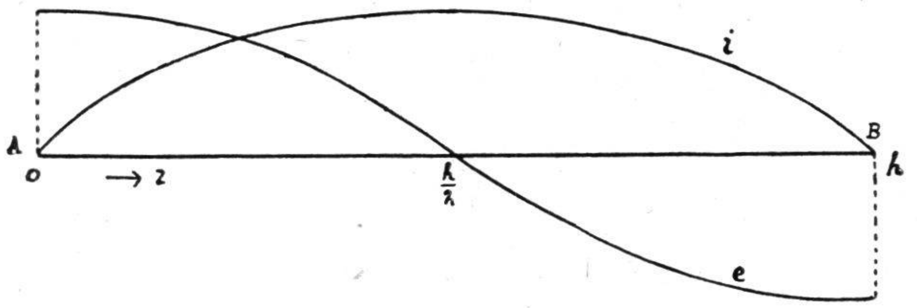
Sur l'interprétation de la formule $T = 2\sqrt{LC}$ de la période de vibration d'un conducteur filiforme vibrant en oscillation demi-onde.

Prenons le cas simple à constantes parfaitement définies, d'un fil rectiligne F, *de longueur h*, *de résistance nulle*, de *self-induction par unité de longueur* $\underline{l}$, et de *capacité propre par unité de longueur* $\underline{c}$. Le système est supposé homogène quant à la distribution des constantes caractéristiques.

Lorsque le fil vibre en demi-onde la distribution électrique est donnée par la formule:

$$(1) \qquad i = I_0 \ sin \frac{2\pi z}{\lambda} \ cos\ \omega t$$

$$(2) \qquad v = V_0 \ cos \frac{2\pi z}{\lambda} \ sin\ \omega t$$



l'origine étant en A, et les z comptés positivement dans la direction AB.

On a donc, équation (1) $\quad z = 0 \qquad\qquad i = 0$

$$z = h = \frac{\lambda}{2} \qquad\qquad i = 0$$

$$\lambda = 2h$$

D'autre part, les éléments $\underline{l}$, (self par unité de longueur) étant distribués en série, on a:

(3) $$L = h\,\underline{l}$$

représentant la self totale du fil, définie pour un courant uniforme le long du fil (répartition uniforme du courant dans le long du fil).

De même, les éléments c, capacité propre par unité de longueur étant distribués en parallèle le long du fil on a:

(4) $$C = h\,\underline{c}$$

représentant la capacité propre totale définie, pour une distribution uniforme du potentiel le long du système.

On démontre, d'autre part, que la vitesse de l'onde est donnée par la formule:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\underline{l}\,\underline{c}}} \quad \text{unités électr. magn.}$$

ce qui donne avec:

$$\lambda = v\,T \qquad T = \text{période}$$

$$T = \frac{\lambda}{v} = \lambda\sqrt{\underline{l}\,\underline{c}} = 2h\sqrt{\underline{l}\,\underline{c}}$$

(5) $$\boxed{T = 2\sqrt{L\,C}}$$

Or dans le cas d'oscillations électriques, pour un système formé des éléments ponctuels L_0 et C_0, on a pour la période propre la formule de Lord Kelvin:

(6) $$T = 2\pi\sqrt{L_0\,C_0}$$

Si l'on essaye une analogie entre les formules (5) et (6) on est amené à une relation entre L et L_0 entre C et C_0.

Il faut démontrer que si l'on a:

(7) $$L_0 = \frac{2}{\pi}L \ \dots \quad \text{formule de Drude}$$

on doit avoir

(8) $$C_0 = \frac{1}{2\pi}C$$

Remarquons tout d'abord que les expressions (7) et (8) introduites dans l'équation (6) donnent l'équation (5).

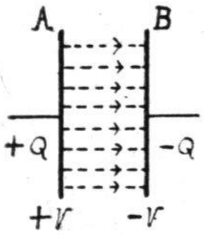
La formule (7) est celle de Drude pour les oscillations demi-onde [1].

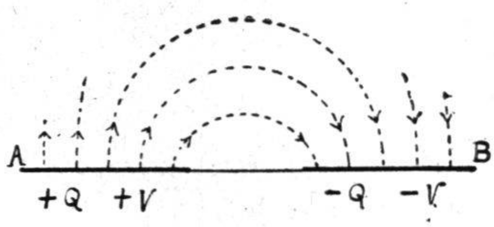
Un condensateur est caractérisé par deux armatures métalliques portant l'une une charge $+Q$, l'autre une charge $-Q$ et dans le cas le plus simple l'une est au potentiel $+V$ l'autre au potentiel $-V$. Entre les deux armatures existe un flux d'induction électrique. La capacité du condensateur est défini par la formule:

$$C_0 = \frac{Q}{2V} \tag{9}$$

Un doublet électrique est formé de deux charges électriques égales et de signes contraires $+Q$ et $-Q$, supportées en général par deux éléments matériels identiques, respectivement aux potentiels $+V$ et $-V$. La longueur du doublet (distance entre les charges $+Q$ et $-Q$) est infiniment petite. Nous appellerons aussi doublet électrique un système répondant à la définition précédente mais dont la distance entre les charges est finie.

Considérons le cas de deux éléments conducteurs plans identiques A et B entre lesquels existe un flux d'induction électrique. Si ces deux éléments sont placés en face l'un de l'autre, ils forment un condensateur, placé dans le prolongement l'un de l'autre ils forment un doublet.





La charge et le potentiel des éléments A et B sont respectivement $+Q$, $-Q$ et $+V$, $-V$.

On peut considérer le doublet comme un condensateur dont on aurait déplacé les armatures pour les mettre dans

[1] BOUASSE, *Ondes hertziennes*, p. 126, § 74.

le prolongement l'une de l'autre. Dans le condensateur les lignes de forces électriques sont des droites normales aux armatures, dans le doublet les lignes de forces électriques sont des lignes courbes qui aboutissent normalement aux armatures.

On appelle *capacité propre* d'un corps, une grandeur définie par la relation:

$$\underline{C} = \frac{Q}{V}$$

Q étant la charge du corps
V étant son potentiel.

La notion de capacité propre est en soi indépendante de la notion de flux d'induction électrique.

Pour les éléments A et B d'un doublet ou d'un condensateur on a:

Capacité propre de l'élément A ... $\underline{C} = \dfrac{Q}{V}$

Capacité propre de l'élément B ... $\underline{C} = \dfrac{-Q}{-V} = \dfrac{Q}{V}$

D'autre part, le doublet est équivalent, comme nous venons de le voir au condensateur défini par la relation (9) il suit de là que:

$$\frac{C_0}{\underline{C}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{C_0 = \frac{\underline{C}}{2}} \qquad (10)$$

Remarque :

1\. — La capacité d'un condensateur ou d'un doublet en fonction de la capacité propre de ses éléments, est donnée par la formule de la capacité résultante d'un système formé de deux condensateurs en série, chacun des deux condensateurs ayant comme valeur, la valeur de la capacité propre de chacun des éléments.

En effet soit $+Q, V_1$ charge et potentiel de l'élément A
$-Q, V_2$ charge et potentiel de l'élément B

La capacité du condensateur a pour valeur:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

D'autre part la capacité propre de l'élément A est: $C_A = \dfrac{+Q}{V_1}$

la capacité propre de l'élément B est: $C_B = \dfrac{-Q}{V_2}$

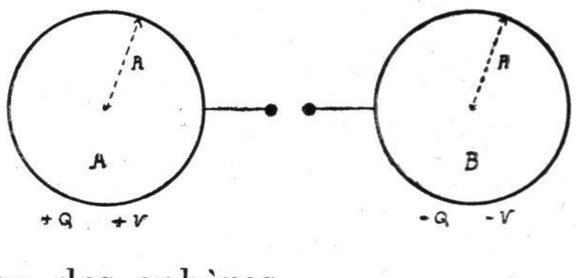
La capacité résultante d'un système formé de deux condensateurs C_A et C_B en série a pour valeur:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{-Q}$$

d'où
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \qquad c.q.f.d.$$

2. — La relation (10) peut s'énoncer en disant que: *La capacité d'un condensateur équivalent à un doublet est égale à la moitié de la capacité propre d'un élément du doublet*, ou aussi, puisque la capacité propre totale d'un doublet est égale à la somme des capacités propres des éléments du doublet: *La capacité d'un condensateur équivalent à un doublet est égale au quart de la capacité propre totale du doublet.*

Exemple[1]*:* Soit un doublet formé de deux sphères (doublet de Hertz).



Soit R le rayon des sphères.

---

[1] Bouasse, *Ondes hertziennes*, p. 167, § 99.

la capacité propre de la sphère A a pour valeur: $\underline{C} = \frac{Q}{V} = R$

la capacité propre de la sphère B a pour valeur: $\underline{C} = \frac{-Q}{-V} = R$

la capacité propre totale du doublet a pour valeur: $C = 2\,R$
la capacité du condensateur équivalent au doublet a pour valeur:

$$C_0 = \frac{R}{2}$$

Si on soumet un point d'un conducteur (un segment de fil, par exemple), à une tension V_0 et que la distribution de la charge soit telle que tous les points du conducteur se trouvent au même potentiel V_0, on a, si le conducteur est électriquement homogène de capacité propre $\underline{c}$ par unité de longueur, pour la charge Q_0 que reçoit le conducteur, la relation:

$$(11) \qquad Q_0 = V_0\,\underline{c}\,l_0 = V_0\,C$$

l_0 étant la longueur du conducteur et $\underline{c}\,l_0 = C$ sa capacité propre totale.

Si pour une raison spéciale, le potentiel n'a pas la même valeur en chaque point de ce même conducteur, $v = f\,(l)$, l étant la coordonnée de longueur du point considéré, la charge d'un élément dl du conducteur a pour valeur:

$$d\,Q = v\,\underline{c}\,dl$$

définissant la *charge effective* Q_e

$$(12) \qquad Q_e = \underline{c}\int_0^{l_0} v\,dl = K\,V_0$$

ou K est la *capacité effective* du conducteur, valeur différente de C à cause de la distribution irrégulière du potentiel.

On a entre K et C la relation:

$$(13) \qquad \frac{Q_0}{Q_e} = \frac{C}{K} \qquad K = C\,\frac{Q_e}{Q_0} = \frac{Q_e}{V_0}$$

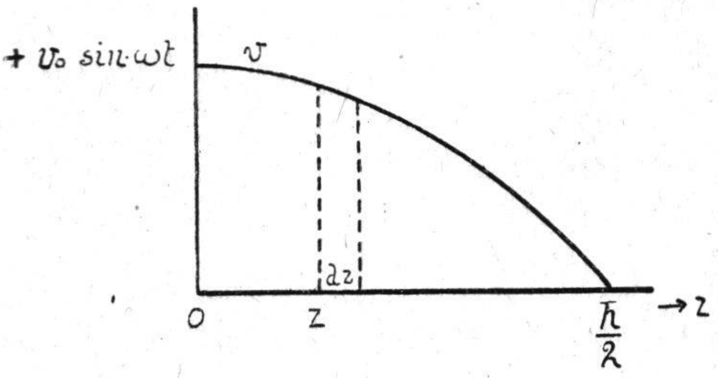
Dans le cas d'une distribution irrégulière de la tension K est la capacité du condensateur équivalent au conducteur. Nous supposons, ce qui correspond au cas qui nous intéresse, que dans tout l'intervalle $(o - l_o)$, le potentiel est toujours positif ou toujours négatif.

Considérons le fil, électriquement homogène, défini au début. La distribution du potentiel est donnée par la formule (2):

$$V = V_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t \tag{2}$$

La moitié $\frac{h}{2}$ du fil est à un potentiel positif, l'autre moitié est à un potentiel négatif. Le potentiel varie de la valeur $V_0 \sin \omega t$, au point $z = O$ à la valeur O, au point $z = \frac{h}{2}$. On peut donc raisonner en disant que si l'on applique en un point du fil le potentiel $V_0 \sin \omega t$, ce potentiel se répartit suivant la formule (2).

Calculons la charge effective de la moitié du fil.



On a: $d\,Q = v\,\underline{c}\,dz$ pour l'élément dz de capacité propre $\underline{c}\,dz$ de potentiel v et pour la charge effective (formule 12).

$$Q_e = \underline{c} \int_0^{\frac{h}{2}} v_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t \, dz$$

$$Q_e = \underline{c}\; v_0 \sin \omega t \int_0^{\frac{h}{2}} \cos \frac{2\pi z}{\lambda}\, dz$$

$$Q_e = \underline{c}\; v_0 \sin \omega t \left[\frac{\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \right]_0^{\frac{h}{2}} \qquad \lambda = 2h$$

$$Q_e = \underline{c}\; v_0 \sin \omega t \, \frac{2h}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{2h} \frac{h}{2}$$

$$Q_e = \frac{1}{\pi}\, \underline{c}\; h\, v_0 \sin \omega t$$

Ce qui donne pour la capacité effective (formule 13)

$$K = C_1 \frac{Q_e}{Q_0} = C_1 \frac{\frac{1}{\pi}\, \underline{c}\, h\, v_0 \sin \omega t}{Q_0}$$

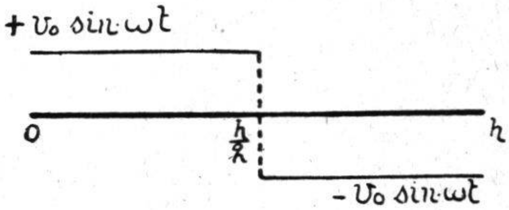
C_1 est la capacité propre de la moitié du fil: $C_1 = \underline{c}\,\frac{h}{2}$

Q_0 la charge du fil donnée par la formule (11)

$$Q_0 = v_0 \sin \omega t \cdot \underline{c}\, \frac{h}{2}$$

d'où
$$K = \frac{1}{\pi}\, \underline{c}\, h = \frac{1}{\pi} C$$

C étant la capacité propre totale (formule 4) le fil vibrant en demi-onde est donc équivalent à un dou-



blet formé de deux armatures aux potentiels respectifs $+ V_0 \sin \omega t$, et $- V_0 \sin \omega t$, et possédant respectivement les charges $+\frac{1}{\pi} C\, v_0 \sin \omega t$ et $-\frac{1}{\pi} C\, v_0 \sin \omega t$. La capacité effective de chaque armature étant:

$$K = \frac{1}{\pi} C$$

D'après la formule (10) la capacité du condensateur a pour valeur:

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{2\pi} C} \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

Il y a donc bien lieu de considérer dans l'analogie entre d'une part la formule $T = 2\pi \sqrt{L_0 C_0}$ de Lord Kelvin, de la période propre d'un système formé d'un condensateur localisé de capacité C_0, et d'une self induction localisée L_0, et d'autre part la formule $T = 2\sqrt{LC}$ d'un fil vibrant en demi-onde, possédant une self induction propre

L (définie pour un courant homogène) et une capacité propre C (définie pour une charge homogène) les relations:

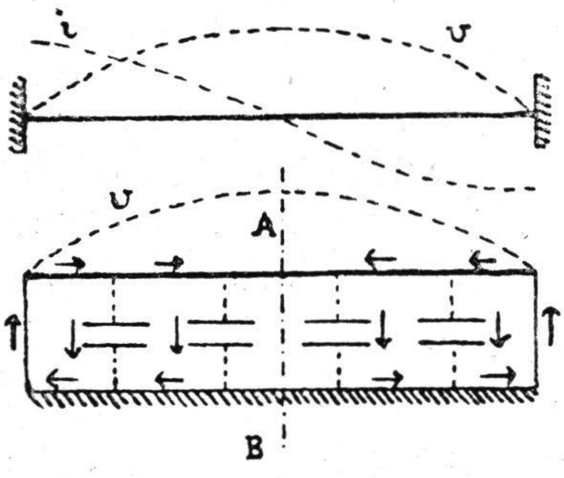
$$\begin{cases} L_0 = \dfrac{2}{\pi} L \\ C_0 = \dfrac{1}{2\pi} C \end{cases}$$

Il ne faut pas perdre de vue dans la recherche des valeurs de la self effective et de la capacité effective d'un système vibrant en ondes stationnaires que la self effective est donnée par le flux magnétique (indépendamment de son signe) qu'impose la distribution, tandis que le signe des charges électriques et la circulation du flux d'induction électrique interviennent dans la définition de la capacité effective. Or, l'existence de vibration en ondes stationnaires implique naturellement aussi la condition d'existence des courants fermés. Ces courants fermés sont composés des courants de conduction dans les conducteurs du système et des courants de déplacement dans le diélectrique. Les courants de déplacement utilisent les lignes d'inductions électriques, ces lignes partent d'un élément du système pour aboutir à un autre élément du système. Ce sont ces deux éléments correspondants qui avec leur charge et leur potentiel définissent le doublet et le condensateur élémentaire correspondant.

Nous avons tenu compte de ces considérations dans l'étude du fil vibrant en demi-onde avec nœuds de courant et ventres de potentiel aux extrémités. Mais qu'en est-il de la même formule $T = 2\sqrt{LC}$ d'un fil vibrant en demi-onde avec nœuds de potentiel et ventres de courant aux extrémités ? Ici les charges électriques à un instant donné ont le même signe en tous les points du système. Il n'y a donc pas lieu de considérer le fil en vibration comme un doublet possédant des charges effectives et définissant la capacité du condensateur du correspondant. C'est qu'en réalité les deux systèmes sont très différents. Dans le premier état de vibration le système fil peut être considéré comme un système « complet » dans ce sens que par lui-même avec ses seuls et uniques éléments la vibration peut exister. Il n'en est pas de même du fil vibrant suivant le second mode. Dans ce cas le système fil doit être considéré comme un système « incomplet » dans ce sens que par lui-même avec ses seuls et uniques éléments, la vibration ne peut pas exister. En effet, une telle vibration exige que les extrémités du fil soient réunies à des capacités très grandes ce qui a lieu pratiquement lorsqu'on les réunit à la terre ; ces capacités additionnelles (ou la terre) interviennent dans la vibration. Le système « complet » est celui formé du fil et des capacités additionnelles tandis que le fil seul n'est qu'un élément du système « complet » et forme bien un système « incomplet ». On voit que la notion du système « complet » et « incomplet » est relative au genre de vibration.

Dans le premier cas les courants de déplacements utilisent les lignes d'inductions électriques qui partent de certains éléments du fil (les éléments chargés positivement) pour aboutir plus ou moins directement à d'autres éléments du fil (les éléments chargés négativement).

Dans le second cas la vibration demi-onde avec ventres de courants aux extrémités du fil est donnée par les formules :



$$i = I_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t$$

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t$$

où $z = h = \frac{\lambda}{2}$ = longueur du fil.

Les extrémités du fil sont réunies à la terre par exemple.

Les courants de déplacement n'utilisent plus les lignes du flux électrique qui partent des éléments du fil chargés positivement pour aboutir aux éléments du fils chargés négativement, puisque à un instant donné les charges sont toutes positives ou toutes négatives.

Les courants de déplacement suivent les lignes d'induction électrique qui relient les éléments du fil aux capacités additionnelles (terre).

On se rend facilement compte sur la figure qui représente à un instant donné la circulation des courants pendant la vibration du système qu'il n'y a pas comme dans le cas précédent d'échanges d'énergie par courants de déplacement entre les éléments du fil entre eux, mais que les échanges d'énergie ont lieu entre les éléments du fil et les capacités additionnelles. Il suit de la symétrie du système par rapport à la droite $A\,B$ que la partie droite du fil vibre pour ainsi dire indépendamment de la partie gauche et qu'il est en quelque sorte possible de couper le circuit suivant cette ligne de symétrie sans modifier l'état de vibration de ces parties. Le système « complet » du fil et des capacités additionnelles vibrant ainsi en demi-onde peut être considéré comme formé de deux systèmes « complets » indépendants vibrant en quart d'onde.

La self propre totale L du fil (défini pour un courant homogène) et C la capacité propre totale du fil (défini pour une charge homogène) fournissent pour chacune des moitiés du fil les valeurs L' et C' de la self propre et de la capacité propre égale à :

$$L' = \frac{L}{2} \qquad C' = \frac{C}{2}$$

Ensuite de la distribution sinusoïdale des courants et des potentiels la self effective a pour valeur :

$$L_0 = \frac{2}{\pi}\, L' = \frac{L}{\pi}$$

et la capacité propre effective qui sert à déterminer la capacité du condensateur localisé a pour valeur :

$$C'_0 = \frac{2}{\pi}\, C' = \frac{C}{\pi}$$

en vertu de la remarque 1, page 91 ou $V_2 = O$, $C_0 = \infty$, la capacité du condensateur localisé a la même valeur que la capacité propre effective C'_0, donc

$$C_0 = C'_0 = \frac{C}{\pi}$$

En introduisant ces valeurs dans la formule de Lord Kelvin on retrouve bien l'égalité:

$$T = 2\pi\sqrt{L_0 C_0} = 2\sqrt{L C} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On retrouve de même la formule $T = 4\sqrt{L C}$ d'un fil vibrant en quart d'onde si en ne considérant que la moitié du fil on introduit, comme dans la formule (1) les valeurs $L_0 = \frac{2}{\pi} L' = \frac{2}{\pi} L$ pour la self effective du fil et $C_0 = \frac{2}{\pi} C' = \frac{2}{\pi} C$ pour la capacité propre effective du fil en tenant compte que dans ce cas $C' = C$ et $L' = L$.

Mais au point de vue de l'énergie électrique et magnétique le fil vibrant en demi-onde avec ventres de courant aux extrémités est équivalent à deux systèmes identiques vibrant ensemble et possédant chacun une self localisée L'_0 de valeur $L'_0 = \frac{L}{\pi}$ et un condensateur localisé C'_0, de valeur $C'_0 = \frac{C}{\pi}$. Par conséquent le fil est capable de fournir la même énergie électrique qu'un condensateur localisé de valeur $C_0 = 2\,C'_0 = 2\frac{C}{\pi}$ et la même énergie magnétique qu'une self localisée de valeur $L_0 = 2\,L'_0 = \frac{2L}{\pi}$. Par contre l'énergie électrique et magnétique du fil vibrant en demi-onde avec nœuds de courant aux extrémités est pour l'énergie électrique, la même que celle d'un condensateur localisé de valeur $C_0 = \frac{C}{2\pi}$

et pour l'énergie magnétique la même que celle d'un self localisée de valeur $L_0 = \frac{2}{\pi} L$.

On voit que suivant qu'il s'agit de déterminer les éléments self localisée et capacité localisée d'un circuit ayant la même période propre que celle du système vibrant en demi-onde, on obtient des relations qui sont les mêmes pour les deux genres de vibrations (nœuds de courant ou ventres de courant aux extrémités), tandis que s'il s'agit de déterminer la valeur d'une self localisée et la capacité d'un condensateur localisé capables de fournir respectivement la même énergie magnétique et la même énergie électrique que le système, les valeurs ne sont pas les mêmes pour les différents genres de vibration en demionde et elles diffèrent dans un des cas des valeurs relatives à la période qui sont introduites dans la formule de Lord Kelvin.

On fait les mêmes raisonnements pour l'interprétation des formules $T = \frac{2}{K}\sqrt{LC}$ $(K = 2, 3, 4...)$ qui fixent la période des autres partiels du fil.

On a par exemple pour le second partiel $(K = 2)$ vibration en deux demi-ondes la formule $T = \sqrt{LC}$.

Si le système a ses extrémités isolées (nœuds de courant aux extrémités) les échanges d'énergies ont lieu uniquement entre les éléments du fil. Le tout est équivalent à deux systèmes identiques vibrant en demi-ondes. La self effective L_0 de chacune des moitiés du fil est donc égale à $\frac{2}{\pi} L'$, ou L' la self propre de la moitié du fil est égale à $\frac{L}{2}$. Au point de vue de la capacité chacune des moitiés du fil est équivalente à un doublet, lequel est équivalent à un condensateur de valeur, $C_0 = \frac{1}{2\pi} C' = \frac{1}{2\pi}\frac{C}{2}$, C' étant la capacité propre de la moitié du fil.

On a donc les relations :

$$L_0 = \frac{L}{\pi} \qquad C_0 = \frac{C}{4\pi}$$

Ces valeurs introduites dans la formule de Lord Kelvin donne bien l'égalité :

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{L_0\,C_0} = \sqrt{L\,C} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le raisonnement est analogue lorsque le système vibre avec avec nœuds de courant aux extrémités. En tenant compte que les échanges d'énergie par courant de déplacement se font entre les éléments du fil d'une part et les capacités additionnelles d'autre part.

Au point de vue de l'énergie électrique et magnétique on trouve dans ce cas aussi que les valeurs de la self localisée et que la capacité du condensateur localisé fournissant respectivement la même énergie électrique et la même énergie magnétique que l'ensemble du système vibrant en deux demi-ondes, ont des valeurs différentes suivant qu'il s'agit d'une vibration avec nœuds de courant ou ventres de courant aux extrémités. Elles diffèrent également des valeurs obtenues dans l'interprétation précédente de la période du fil en fonction de ses éléments propres et des valeurs de la self localisée et du condensateur localisé qu'il faut introduire dans la formule de Lord Kelvin.

La démonstration est la même et les remarques sont analogues pour l'interprétation de la vibration des autres partiels du système.

D'une façon générale, il faut souligner à ce sujet les remarques suivantes :

1° — Les confusions qui proviennent de notions trop imprécises comme par exemple : self répartie, capacité répartie, self équivalente à la self répartie d'un système, condensateur équivalent à une capacité répartie, etc.

2° — Le fait que, notamment les traités de T.S.F., utilisent constamment les formules de la basse fréquence pour l'étude de la haute fréquence. Comme la distribution des charges électriques et des potentiels est irrégulière, il y a lieu de faire des interprétations analogues à celles que nous venons de faire. Ces interprétations demandent des précisions et sont toujours de nature délicate. Nous soulignons en particulier un résultat important qui est très souvent indiqué incorrectement. Par rapport à sa capacité propre totale C, la capacité d'un fil (antenne parfaite) vibrant en quart d'onde est équivalente à celle d'un condensateur de valeur $C_0 = \frac{2}{\pi} C$, tandis que la capacité de de fil vibrant en demi-onde (antenne et contre-poids) est équivalente à celle d'un condensateur de valeur $C_0 = \frac{1}{2\pi} C$.

3° — Le caractère arbitraire de ces interprétations puisqu'il s'agit toujours de préciser si on se place au point de vue de la période d'un système équivalent ayant self et condensateur localisés, ou de la recherche d'une self localisée ou de la capacité d'un condensateur localisé capable de fournir respectivement la même énergie magnétique et la même énergie électrique que l'ensemble du système (problème de l'énergie d'une antenne).

4° — Le nombre très limité de cas où cette interprétation est possible, cas qui se limitent à ceux des circuits simples à constantes parfaitement définies lorsqu'on a précisé la vibration en ondes stationnaires. Cette interprétation est impossible pour les circuits simples quand on ne connaît pas la vibration en ondes stationnaires, elle est toujours impossible pour les circuits complexes (qui sont de beaucoup les plus nombreux), car on ne peut pas définir les constantes par unité de longueur de circuit. Certes, dans les circuits complexes les phénomènes de la vibration sont bien dus à des éléments de la nature self induction, et capacité répartie le long du système mais il n'existe aucune possibilité d'évaluer numériquement leurs grandeurs. Ces grandeurs à évaluer sont des variables, fonction des éléments du circuit, de la pulsation du courant et de la tension en chaque point du système.