Multiplizieren statt Teilen : Seiten- und Diagonalzahlen bei Platon (Resp. 525e)

Autor(en): **Burkert, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Museum Helveticum : schweizerische Zeitschrift für klassische Altertumswissenschaft = Revue suisse pour l'étude de l'antiquité classique = Rivista svizzera di filologia classica**

Band (Jahr): **70 (2013)**

Heft 2

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-358001

Multiplizieren statt Teilen: Seiten- und Diagonalzahlen bei Platon (*Resp.* 525e)

Von Walter Burkert, Uster

Abstract: In Platons Behandlung der *mathemata* verweist der Satz über Arithmetik spezifisch auf eine Rechenregel für Seite/Diagonale des Quadrats, Approximation an $\sqrt{2}$.

Die Behandlung der *Mathemata*, später Quadrivium benannt, in Platons *Staat* ist allbekannt, allenthalben interpretiert und kommentiert.[1] Ein Satz im Abschnitt Arithmetik lässt aber eine anscheinend nicht bemerkte Präzisierung zu.

Im Anschluss an die Feststellung des über-sinnlichen Charakters der Zahlen heisst es da: «Du weisst ja wohl, dass die Spezialisten hierfür ihrerseits, wenn einer es unternimmt, das Eine selbst in der Rechnung zu zerschneiden, ihn auslachen und das nicht akzeptieren, sondern wenn du dieses zerschnipselst, werden sie es vervielfältigen, indem sie sich davor hüten, dass je das Eine nicht mehr als das Eine erscheinen könnte, sondern als Vielzahl von Teilen.»[2]

Wortschatz und Satzbau sind klar; dabei scheint der Text über die Mathematik hinaus bereits auf Ontologie zu zielen, mit der besonderen Rolle des ‹Einen an sich›, αὐτὸ τὸ ἕν, samt der Warnung, davon abzugehen; dies klingt wie ein Vorverweis auf *Parmenides* und auf die ungeschriebene Lehre.[3] Das Eine ist unteilbar.

Der bewährte Kommentar von James Adam findet ‹Humor› im beschriebenen Schlagabtausch.[4] Wieso und in welchem Zusammenhang die Arithmetiker, als Mathematiker, diese gegenstrebigen Strategien tatsächlich gebrauchen und brauchen, scheint nicht weiter expliziert oder auch nur gefragt zu werden.[5]

1 Zur Sekundärliteratur sei auf Michael Erler, *Platon*. Die Philosophie der Antike 2/2 (Basel 2007) verwiesen, mit einer Bibliographie bis zu nr. 6559. Für Beratung *in Platonicis* danke ich Thomas Szlezák. Zur Geschichte der Mathematik: B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft* (Basel 1956); O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike* (Göttingen 1966²); W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism* (Cambridge, Mass. 1972); D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy* (Oxford 1987); G. Radke, *Die Theorie der Zahl im Platonismus* (Tübingen/Basel 2003).

2 525de: Οἶσθα γάρ που τοὺς περὶ ταῦτα δεινοὺς αὖ ὡς, ἐάν τις αὐτὸ τὸ ἓν ἐπιχειρῆι τῶι λόγωι τέμνειν, καταγελῶσί τε καὶ οὐκ ἀποδέχονται, ἀλλ' ἐὰν σὺ κερματίζηις αὐτό, ἐκεῖνοι πολλαπλασιοῦσιν, εὐλαβούμενοι μή ποτε φανῆι τὸ ἓν μὴ ἓν ἀλλὰ πολλὰ μόρια.

3 Zur Vorlesung ‹Über das Gute› Aristoxenos Harm. 2 p. 30 Meibom; Erler 2007, 406–429.

4 J. Adam, *The Republic of Plato*, Cambridge 1929, II 115. Κερματίζειν, zu κέρμα ‚Haar-Schnipsel', auch ‚Kleingeld', wird von Platon auch sonst verwendet, bes. Parm. 144e (und 164d, 165e); mehrfach auch κατακερματίζειν.

5 Fowler 1987, 139 zitiert 525e; Radke 2003, 707f., vgl. 716, zitiert den Abschnitt ausführlicher, beide ohne weitere Analyse oder genauere Erklärung.

Die Antwort kommt von einem Spezialkapitel antiker Mathematik, entfaltet bei Theon von Smyrna im Werk ‹Mathematisches zur Platonlektüre›[6] und dann bei Proklos im Kommentar zu Platons *Staat*.[7] Es ist von van der Waerden in seinem Pythagoreer-Buch und neuerdings besonders von Fowler ausführlich behandelt worden[8] Es geht um den Aufbau einer Reihe immer grösser werdender gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke, nach der Regel: Kathete plus Hypotenuse ergibt neue Kathete, zweimal Kathete plus Hypotenuse ergibt neue Hypotenuse. Man startet mit 1 – denn die Einheit sei «Anfang von allem» (Theon p. 43,10), also 1 – 1 – 1, erhält im nächsten Schritt 2 – 3 – 2, dann 5 – 7 – 5, darauf 12 – 17 – 12. Nie erfüllen die Zahlen genau den Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$, der Fehler ist wechselweise +1 und –1: Zwischen dem zu grossen und dem zu kleinen Wert wird die gesuchte Grösse immer enger eingeschlossen. Die Reihe liefert also, in unserer Terminologie, fortschreitend genauere Werte für $\sqrt{2}$. 17:12 = 1,416..., der nächste Schritt wäre 41:29 = 1,4137..., gerundet 1,414; das ist, in unserer Schreibweise, bereits auf 3 Dezimalen korrekt.

Die Diagonale, bei Seite 1, ist $\sqrt{2}$. Die antike Feststellung war: Die Quadrat-Diagonale (wie auch viele andere geometrische Grössen) hat kein gemeinsames Mass mit der Seite, sie ist ἀσύμμετρος, sie hat kein angebbares Verhältnis, ist insofern ἄλογος,[9] sie ist nicht genau in Zahlen ausdrückbar und insofern ‚unsagbar', ἄρρητος.

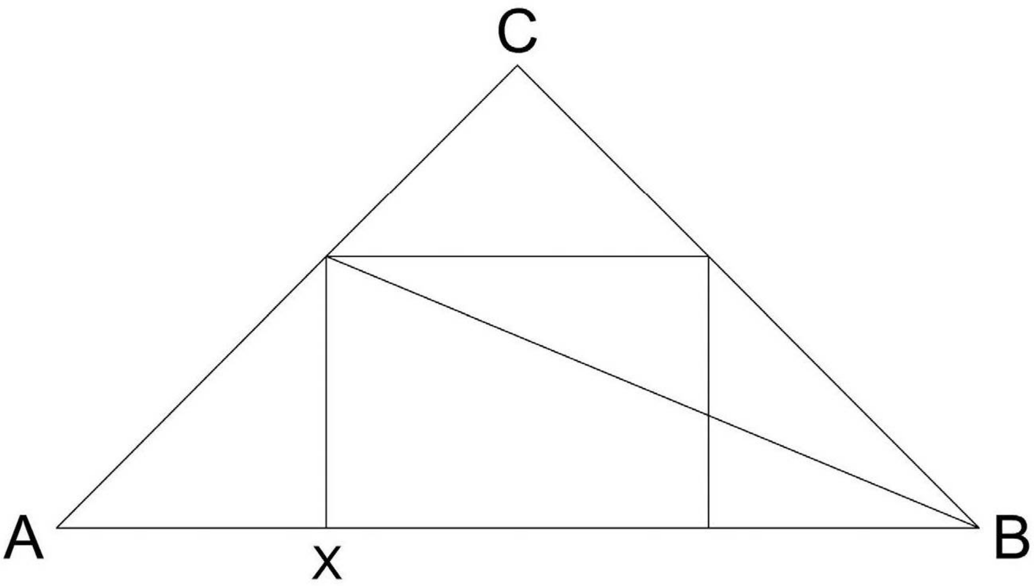
Proklos (II 27,17) verweist zum Beweis der Bildungsregel auf einen Satz von Euklid (*Elem.* 2,10), den auch van der Waerden wiedergibt. Einfacher lässt sich die Regel durch eine simple Zeichnung verdeutlichen: Drei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke bauen ein neues auf; Kathete plus Hypotenuse ergibt neue Kathete, zweimal Kathete plus Hypotenuse ergibt neue Hypotenuse:

6 Theon p. 43,2–45,89 Hiller.

7 Proklos *In Remp.* II 24,16–25,13; 27,1–29,3 Kroll.

8 B.L. van der Waerden, *Die Pythagoreer* (Zürich 1979) 402–405; zuvor schon van der Waerden 1956, 206–209; Becker 1962, 67f.; 73; Th. Heath, *A History of Greek Mathematics* (Oxford 1921) 91–93; Fowler 1987, 95–105.

9 ἀλόγους ... ὥσπερ γραμμάς Plat. *Resp.* 534d.



Die gleiche Zeichnung liefert aber zugleich den einfachsten Beweis für die Irrationalität der Quadratdiagonale.[10] Eine einfache Rechenregel besagt, dass ein ‹gemeinsames Mass› durch ‹Wechselwegnahme› (ἀνταφαίρεσις) zu finden ist.[11] Bei vorliegender Zeichnung führt die Subtraktion der Kathete von der Hypotenuse (BX = BC) auf einen Rest AX, der sich als neue Kathete eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks zeigt; es lassen sich drei kleine Dreiecke bilden, deren Kongruenz aus BC = BX folgt. Jener Rest, von der alten Kathete subtrahiert, ergibt die neue Hypotenuse. Die ‹Wechselwegnahme› zwischen Hypotenuse und Kathete führt also immer auf ein neues Paar Kathete/Hypotenuse. Dies lässt sich *ad infinitum* fortsetzen.

Die Umkehrung, die multiplizierende Vergrösserung, ist in der Zeichnung nicht weniger evident. Auch sie hat kein Ende, bietet aber greifbare Zahlen. Während die Verkleinerung, durch ‹Wechselwegnahme› ins Unendliche fortgesetzt, jede gegebene Grösse unterschreitet, liefert die Vergrösserung immer genauere Zahlenverhältnisse als Annäherung an die Lösung des Problems. Ebendies sagt Platon: «Während du das Eine zerschnipselst, werden sie es vervielfältigen.» Wir unsererseits schreiben $\sqrt{2}$ als unendlichen, nicht periodischen Dezimalbruch – ‹Zerschnipselung› *ad infinitum.*

10 Zum Irrationalen Becker 1966, 13f.; Burkert 1972, 436f., 455–465. Die Zeichnung Burkert 430 ist typographisch missglückt. Varianten der Zeichnung bei van der Waerden 1956, 208; Becker 1966, 73. Die Unteilbarkeit der Eins ist auch vorausgesetzt in den Beweisen, dass es im ‚überteiligen Verhältnis' – ἐπιμόριος λόγος, (n+1) : n – keine ‹Mitte› gibt (also z.B. Oktave und Quint sich nicht halbieren lassen): Archytas 47 A 19; Sectio canonis 3; Burkert 442–447.

11 Eukl. *Elem.* 7,2; 10,2. Dazu auch Burkert 1972, 445f.

Dass Platon die Reihe der ‹Seiten- und Diagonalzahlen› gekannt hat, schloss van der Waerden[12] bereits aus der Nennung einer «rationalen Diagonale der 5» ($7 \sim \sqrt{50}$) Plat. *Resp.* 546c. Bestätigung und Präzisierung kommt durch das genaue Verständnis des hier behandelten Platon-Satzes. Auch sonst hat Platon, wenn er von Geometrie spricht, vorzugsweise diese Probleme im Auge: Das Problem der Quadratverdoppelung durch Konstruktion der Diagonale wählt Platon im *Menon* (82b–86a) als Exempel für ‹apriorische› Geometrie überhaupt; zur Stereometrie bemerkt er im *Staat* (528b), diese handle vom ‹Wachstum der Kuben›, und das ‹scheine noch nicht gefunden zu sein› – hier geht es um das Problem der ‹dritten Wurzel›, womit sich besonders Archytas (VS 47 A 14) befasste.

An sich ist die Reihen-Bildung in antiker Mathematik nicht weiterentwickelt. Die Leistung dieses Stücks Arithmetik ist insofern nicht ganz banal. In welchem Sinn das Ganze ‹pythagoreisch› war, wie Proklos angibt, bleibt uns nach wie vor dunkel. Archytas war als Pythagoreer und Mathematiker berühmt; doch muss er Vorgänger und Partner gehabt haben.

Wichtiger ist wohl, dass die gleiche Strategie direkt auf die – von Spezialisten bewunderte[13] – Definition des ‹Verhältnisses› (λόγος) überhaupt durch Eudoxos führt, wie sie dann bei Euklid steht: «Dass Grössen zueinander ein Verhältnis haben, sagt man, wenn sie vervielfältigt (πολλαπλασιαζόμενα) einander übertreffen können» (Eukl. *Elem.* 5, Def. 4).[14] Die daraus entwickelte Proportionenlehre scheint kompliziert, sie zielt aber eben darauf, das von der Irrationalität gestellte Problem des unendlich Geteilten zu vermeiden. Unsere Schreibweise a : b suggeriert Division; Eudoxos setzt auf Multiplikation, statt grenzenloser ‹Zerschnipselung›.

Dass Platon, als er am *Staat* arbeitete, die Errungenschaften des Eudoxos bereits kannte, ist eher unwahrscheinlich.[15]

Korrespondenz:
Walter Burkert
Wildsbergstrasse 8
8610 Uster
walter_burkert@bluewin.ch

12 Van der Waerden 1979, 403.
13 Van der Waerden 1956, 309–312; Becker 1966, 102–108.
14 Zurückführung auf Eudoxos durch Schol. Eukl. V, p. 282 Heiberg = Eudoxos D 32 (vgl. D 38) Lasserre.
15 Widersprüchliche Angaben in den erhaltenen Quellen machen die Datierung des Eudoxos und damit das chronologische Verhältnis zu Platon unsicher, Burkert 1972, 330 n. 31. Die Planetentheorie des Eudoxos kennt Platon im ‹Staat› noch nicht, offenbar jedoch in den ‹Gesetzen›, Burkert 335–342.