

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1847)  
**Heft:** 99-100

**Artikel:** Bemerkungen über confocale Flächen zweiten Grades und die geodätische Linie auf dem Ellipsoid  
**Autor:** Schläfli, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-318240>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**MITTHEILUNGEN**  
DER  
**NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT**  
IN BERN.

---

**Nr. 99 u. 100.**

---

Ausgegeben den 16. Juni 1847.

---

**L. Schläfli, Bemerkungen über confocale  
Flächen zweiten Grades und die geo-  
dätische Linie auf dem Ellipsoid.**

1. *Satz.* Wenn drei confocale Flächen zweiten Grades  $A_1, A_2, A_3$  von einer beliebigen Geraden geschnitten und die auf dieser liegenden Sehnen der drei Flächen mit  $2s_1, 2s_2, 2s_3$ , und die Quadrate der mit jener Geraden parallelen Halbmesser derselben drei Flächen mit  $D_1, D_2, D_3$  bezeichnet werden, wenn ferner in einem der acht Durchschnittpunkte der drei Flächen  $A_1, A_2, A_3$  Berührungsebenen an dieselben gelegt und auf diese aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt die drei Perpendikel  $p_1, p_2, p_3$  gefällt werden, so ist immer

$$\left(\frac{s_1 p_1}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2 p_2}{D_2}\right)^2 + \left(\frac{s_3 p_3}{D_3}\right)^2 = 1.$$

Wenn nun alle drei Flächen sich wirklich schneiden und jede derselben von den willkürlichen Geraden wirk-

lich in zwei Punkten geschnitten wird, so sind auch die Grössen  $s$ ,  $p$ ,  $D$  sämmtlich reell und endlich, und wenn überdiess keine der Flächen  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  eine Ebene oder ein Kegel ist, so kann auch für eine reelle Richtung der schneidenden Geraden keines der Halbmesserquadrate  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  verschwinden. Vermöge der obigen Gleichung ist es daher unter den gemachten Voraussetzungen rein unmöglich, dass alle drei Sehnen  $2s_1$ ,  $2s_2$ ,  $2s_3$  zugleich verschwinden. Obschon es nun eine doppelte Reihe unzähliger Geraden giebt, welche die Flächen  $A_1$ ,  $A_2$  zugleich berühren, für welche also  $s_1$ ,  $s_2$  verschwinden, so wird doch keine derselben auch die Fläche  $A_3$  berühren, sondern es wird dann immer  $s_3 = \frac{D_3}{p_3}$  sein, d. h. die dritte Fläche wird auf allen gemeinschaftlichen Tangenten der beiden ersten Flächen immer dieselbe constante Sehne abschneiden. Diesen speciellen Satz hat Chasles im XI. Band von Liouville's Journal mitgetheilt, ohne, wie es scheint, jenen allgemeineren zu kennen.

2. *Satz.* Wenn  $O$  der Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades ist, deren grösstes Halbxenquadrat  $A_1$  sein möge, und  $P$  irgend ein anderer Punkt im Raume, durch den drei mit jener confocale Flächen gehen, deren grösste Halbxenquadrate  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  sein mögen, und man zieht in diesem Punkte die Normalen dieser drei Flächen und construirt eine Fläche zweiten Grades, welche dieselben zu Axen und  $A - A_1$ ,  $A' - A_1$ ,  $A'' - A_1$  zu Halbxenquadraten hat, so ist die Polarebene dieser letztern Fläche in Beziehung auf den Pol  $O$  eine und dieselbe mit der Polarebene der Fläche  $A_1$  in Beziehung auf den Pol  $P$ . — Und der aus dem Punkt  $P$  der Fläche  $A_1$  umschriebene Kegel ist der Asymptotenkegel der Fläche  $(A - A_1)$ , und der aus dem

Punkt  $O$  der Fläche  $(A—A_1)$  umschriebene Kegel ist Asymptotenkegel der Fläche  $A_1$ .

Die beiden so eben betrachteten Flächen zweiten Grades, deren eine  $O$ , die andere  $P$  zum Mittelpunkt hat, schneiden sich in ebenen Curven, deren Ebenen unter sich und mit der früher betrachteten Polarebene parallel sind und von der letztern zu beiden Seiten gleich weit abstehen. Der Abstand dieser Ebenen von der Polarebene ist das geometrische Mittel zwischen den aus den Punkten  $O$  und  $P$  auf die Polarebene gefällten Perpendikeln.

3. *Satz.* Die Summe der Winkel, welche die Normale eines Ellipsoids mit den beiden Normalen in zwei nicht diametral entgegengesetzten Nabelpunkten (Kugelkrümmungspunkten) desselben bildet, ist längs jeder um die beiden genannten Punkte herumgehenden Krümmungslinie constant.

Oder auch: Wenn der Inhalt desjenigen sphärischen Dreiecks, welches dem dreiseitigen körperlichen Eck entspricht, das von den beiden Kreisschnitten eines Ellipsoids und einer Berührungsebene desselben gebildet wird, constant ist, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Krümmungslinie des Ellipsoids.

4. Wenn die Existenz gleich langer geodätischer Bogen auf dem Ellipsoid von einfachen Bedingungen abhängt, so muss ein solcher Fall von grossem geometrischem Interesse sein. Von der Art ist z. B. der Satz, dass alle geodätischen Bogen, welche zwei diametral entgegengesetzte Nabelpunkte verbinden, gleich lang sind. Giebt es nun einen ähnlichen Satz für diejenigen geodätischen Linien, welche nicht durch einen Nabelpunkt gehen? Chasles scheint nun unzweideutig diese Frage zu bejahen, indem er (Liouville, XI, p. 5) von den geodätischen Linien auf dem

Ellipsoid sagt: « Les arcs de ces courbes compris entre  
« deux points de contact consécutifs sur la ligne de cour-  
« bure enveloppe sont tous de même longueur, non-seule-  
« ment pour une même ligne géodésique, mais pour toutes  
« les lignes géodésiques tangentes à la même ligne de  
« courbure. »

In solcher Allgemeinheit ausgesprochen ist aber der Satz unrichtig; die Sache verhält sich vielmehr so:

Es seien  $a, b, c$  die der abnehmenden Grösse nach geordneten halben Axen des Ellipsoids, und wenn  $b^2 > \alpha > c^2$  vorausgesetzt wird, so seien  $a^2 - \alpha, b^2 - \alpha, -(\alpha - c^2)$  die Halbaxenquadrate eines Hyperboloids mit einem Mantel, welches bekanntlich das gegebene Ellipsoid in einer Krümmungslinie schneidet, die wir mit  $(\alpha)$  bezeichnen wollen. Unsere Betrachtung beschränke sich nun auf diejenigen geodätischen Linien, welche von der genannten geodätischen Linie  $(\alpha)$  berührt oder eingehüllt werden. Dann gilt Folgendes: Die Länge eines zwischen zwei auf einander folgenden Berührungspunkten an der Krümmungslinie  $(\alpha)$  enthaltenen geodätischen Bogens verändert sich im Allgemeinen, so wie diese Berührungspunkte auf der Krümmungslinie  $(\alpha)$  sich fortbewegen. Wenn aber die Constante  $\alpha$  einen solchen Werth hat, dass die bestimmten Integrale

$$\int_{c^2}^{\alpha} \frac{r \varphi \cdot d\varphi}{r(a^2 - \varphi)(b^2 - \varphi)(\alpha - \varphi)(\varphi - c^2)}$$

$$\int_{b^2}^{a^2} \frac{r \psi \cdot d\psi}{r(a^2 - \psi)(\psi - b^2)(\psi - \alpha)(\psi - c^2)}$$

ein rationales Verhältniss, das in den kleinsten ganzen Zahlen  $m:n$  ausgedrückt sein mag, bekommen, so darf man den geodätischen Bogen von einem Berührungspunkte an erst beim darauf folgenden  $n^{\text{ten}}$  Berührungspunkt schliessen, um für denselben eine auch beim Fortrücken seiner äusser-

sten Berührungspunkte auf der Krümmungslinie  $\alpha$  constant bleibende Länge zu bekommen. Alsdann hat der geodätische Bogen auch  $m$  halbe Umgänge um das Ellipsoid gemacht, und ist, wenn  $m, n$  gerade Zahlen sind, in sich zurückgekehrt, und im entgegengesetzten Fall kehrt die doppelte Länge desselben in sich zurück. Der von Chasles ausgesprochene Satz wäre somit dahin zu modificiren :

« Wenn ein durch zwei Berührungspunkte an einer Krümmungslinie begränzter geodätischer Bogen seine Länge nicht ändert, während die genannten Berührungspunkte auf der Krümmungslinie sich fortbewegen, so kehrt er oder seine doppelte Länge in sich zurück, und umgekehrt. »

---

## **R. Wolf, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz.**

---

### *VIII. Johann Rudolph von Graffenried aus Bern und Johann Heinrich Rahn aus Zürich.*

Obschon die Schweiz vor den Zeiten der Bernoulli's nur wenige Mathematiker von bedeutendem wissenschaftlichem Range besass, fehlte es ihr doch nie an Männern, welche die Fortschritte auf dem mathematischen Gebiete verfolgten, und sie in ihrer Umgebung durch Wort und Schrift zu verbreiten suchten.

So lebte zu Anfang des siebenzehnten Jahrhunderts in Bern Johann Rudolph von Graffenried, ein Nachkomme jenes Niklaus von Graffenried, der nach der Schlacht von Grandson als einzig übrig gebliebener Stammhalter seiner alten Familie in Rom persönlich die Erlaubniss holte, dem geistlichen Stande zu entsagen, später Gubernator zu