ten, aus welcher nachher die Rectascensionen und Declinationen des Anfangs- und Endpunktes ihrer Bahnen erhoben wurden. Sie sind in folgender Tafel verzeichnet:

| N.° | Mittlere Zeit. | Anfangspunkt. | | Endpunkt. | | Grösse | Farbe. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Rectasc. | Declin. | Rectasc. | Declin. | | |
| 1 | $7^{h}$ 15′ 30″? | $0^{0}$ 9′ | $+58^{0}$ 16′ | $1^{0}$ 36′ | $+53^{0}$ 12′ | 2 | gelbl. |
| 2 | 56 30 ? | 29 32 | 22 42 | 4 0 | 0 50 | 2 | bläul. |
| 3 | 58 40 | 46 40 | 5 0 | 45 10 | 4 50 | 2 | gelbl. |
| 4 | 8 10 0 | 43 24 | 51 0 | 70 0 | 46 0 | 2 | gelbl. |
| 5 | 18 10 | 65 30 | 20 48 | 62 30 | 17 18 | 3 | gelbl. |
| 6 | 20 30 | 43 44 | 38 13 | 37 12 | 40 20 | 1 | bläul. |
| 7 | 21 40 ? | 22 47 | 39 46 | 31 50 | 33 10 | 4 . 5 | bläul. |
| 8 | 43 10 | 15 10 | 39 40 | 5 0 | 20 10 | 2 | bläul. |
| 9 | 10 31 0 | 110 0 | 34 0 | 105 30 | 30 36 | 3 . 4 | gelbl. |
| 10 | 35 40 | 127 30 | 44 43 | 112 0 | 33 48 | 3 | gelbl. |
| 11 | 48 30 | 111 6 | 33 50 | 118 48 | 32 12 | 3 . 2 | gelbl. |
| 12 | 55 50 | 82 36 | 32 36 | 88 30 | 16 12 | 1 | bläul. |

## H. Brändli, über arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel.[1])

[Vorgelegt den 1. Dezember 1849.]

1) Lehrsatz. In der stetigen geometrischen Proportion oder, nach schulmännischer Verdeutschung,

[1]) Von den hier definirten drei Arten von Mitteln haben sich nur das Arithmetische und Geometrische im gewöhnlichen mathematischen Sprachgebrauche unserer Zeit erhalten; das harmonische Mittel ist fast eine solche Seltenheit geworden, dass es nur noch in der geschichtlichen Erinnerung vorhanden ist. Sein Begriff ist aber sehr alt. Er findet sich schon in den Vorstellungen der Pythagoräer über das Weltgebäude und in dem wahrscheinlich unter pythagorischem Einfluss geschriebenen Dialog Timäus von Plato. Wahrscheinlich die älteste Entdeckung eines in mathematischer Form ausgesprochenen physikalischen Gesetzes, dass nämlich unter übrigens gleichen Umständen die Längen

in der **stetigen Theilverhältnissgleichung**, nämlich in der Gleichung:

$$p : g = g : q$$

mit der Voraussetzung $p < q$, ist $g = \sqrt{pq}$ grösser als p und kleiner als q und dieser zusammengesetzte Zahlausdruck heisst daher geometrisches Mittel zwischen p und q, womit jedoch nicht behauptet wird, dass g genau in die Mitte zwischen p und q, nach bildlichem Ausdruck, sondern irgendwo in den Grössenabstand zwischen p und q trifft.

Beweis. Unsere Theilverhältnissgleichung lässt sich mit Rücksicht auf die multiplicationsweise Erzeugung der Folgeglieder aus den Vordergliedern auch so schreiben:

$$p : p.\ e = p.\ e : p.\ e.\ e$$

wo e als Quotient des Verhältnisses vorausgesetzt wird. Da nun $q = p.\ e.\ e$ und nach Voraussetzung $q > p$ oder

---

zweier harmonisch tönenden Saiten in sehr einfachen rationalen Verhältnissen stehen, hat die Pythagoräer so begeistert, dass sie aus diesem einzigen Gesetz den Bau der Welt erklären zu müssen glaubten und die musikalischen Verhältnisse unter Anderm auch in den Halbmessern der Sphären der Planeten wiederfanden. Da nun beim Uebergang vom Grundton zur tiefern Octave das Verhältniss der Saitenlängen 1 : 2 ist, so entspricht das der tiefern Quint zugehörende Verhältniss $\frac{3}{2}$ dem arithmetischen, dasjenige der tiefern Quart $\frac{4}{3}$ dem harmonischen Mittel zwischen 1 und 2. Denn es ist $(\frac{4}{3} - 1) : (2 - \frac{4}{3}) = 1 : 2$. Einzig diesem Umstande hat das harmonische Mittel seinen Namen zu verdanken. Merkwürdiger Weise scheinen die Alten das der grossen Terz entsprechende Verhältniss $\frac{5}{4}$ nicht gekannt zu haben. Nach dem, was Bökh darüber sagt, zu schliessen, wurde die ganze Tonleiter in Zahlen einzig aus den Verhältnissen 1 : 2 und 2 : 3 nachconstruirt. — In der Lehre von den Kegelschnitten wird die harmonische Theilung einer Geraden ACBD, so dass AC : AD = CB : BD, schon von Apollonius angewendet, jedoch nicht mit einem besondern Namen bezeichnet. *(L. Schläfli.)*

p. e. e $>$ p so folgt e. e $>$ 1 und daher e $>$ 1. Damit gewinnen wir: Beide Verhältnisse einer stetigen Theilverhältnissgleichung sind steigend, wenn die grössere der zwei ungleichen Zahlen an der vierten Stelle steht.

Aus der Ungleichheit e $>$ 1 folgt weiter: p. e $>$ p oder g $>$ p und p. e $<$ p. e. e oder g $<$ q d. h. g ist ein Mittel zwischen p und q wie zu beweisen war; aber dieses Mittel ist nicht genau in der Mitte, sondern der folgende

2) Lehrsatz behauptet: In der stetigen Unterschiedsverhältnissgleichung oder in der stetigen arithmetischen Proportion, nämlich in der Gleichung: $a - p = q - a$ ist das arithmetische Mittel $a = \frac{p + q}{2}$, in die Mitte treffend zu p und q oder mit beiden Zahlen denselben Unterschied bildend; dieses Mittel im strengen Sinne ist grösser als das geometrische Mittel zwischen denselben zwei Zahlen p und q. Oder: Das geometrische Mittel liegt näher an der kleinern Zahl p oder macht mit dieser einen kleinern Unterschied als mit q, so dass, bildlich gesprochen, dieses Mittel in die untere Hälfte des Grössenabstandes der Zahlen p und q trifft.

Beweis. Mit Rücksicht auf die additionsweise Erzeugung der Folgeglieder aus den Vordergliedern lässt sich unsere Gleichung auch so schreiben: $p : (p + xp) = g : (g + xg)$ wo x grösser als 1 oder kleiner als 1, rational oder irrational sein kann, aber in beiden Verhältnissen denselben Werth behält. Nun ist also $g = p + px$ und $g > p$ soeben gefunden; daher $x. g > x. p$ welches der obige Lehrsatz ist, und zwar wie der erste einzig aus der Natur der Proportionen heraus bewiesen.

3) Lehrsatz. Die stetige harmonische Proportion:

$$q : p = q - h : h - p$$

mit derselben Voraussetzung $q > p$ lässt sich für gegensatzlose (absolute) Zahlen gar nicht denken ohne dass $h > p$, und $h < q$ d. h. ohne dass h ein Mittel ist zwischen p und q, welches daher harmonisches Mittel heisst, was also keines weitern Beweises bedarf.

Ohne Rechnung gibt aber diese Proportion den folgenden

4) Lehrsatz. Das harmonische Mittel ist ebenfalls kleiner als das arithmetische; denn nach der Voraussetzung ist $q > p$ also muss auch $q - h > h - p$ sein; d. h. das harmonische Mittel macht mit der grössern Zahl q einen grössern Unterschied als mit der kleinern p und daraus ist der nächste Schluss unser Satz.

Nun fragt sich aber: In welchem Verhältniss steht denn das harmonische Mittel zum geometrischen? Darauf antwortet der

5) Lehrsatz. Das harmonische Mittel ist auch kleiner als das geometrische, und zwar in demselben Verhältniss kleiner, wie das geometrische kleiner als das arithmetische [1], denn für unsere drei Mittelgrössen gilt folgende geometrische Proportion:

$$\frac{p+q}{2} : \sqrt{pq} = \sqrt{pq} : \frac{2pq}{p+q} \quad \text{oder } a : g = g : h$$

[1] In den *Nouvelles Annales de Mathématiques*, V, 376, findet sich eine diese Verhältnisse leicht zur Anschauung bringende graphische Darstellung der drei Mittel, welche sich in folgenden Lehrsatz einkleiden lässt: Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke die der Hypotenuse entsprechende Höhe und die zur Mitte der Hypotenuse führende Gerade, und projicirt erstere auf letztere, so hat man das geometrische, arithmetische und harmonische Mittel der durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Hypotenuse dargestellt. (*R. Wolf.*)

Ergebniss aus unsern Lehrsätzen: Das harmonische Mittel ist die kleinste unter unsern drei Mittelgrössen; alle drei Mittelgrössen sind in der untern Hälfte des Grössenabstandes zwischen p und q; bei einer annäherungsweisen Berechnung des irrationalen geometrischen Mittels ist das rationale arithmetische Mittel eine obere Grenze, das ebenfalls rationale harmonische Mittel eine untere Grenze; unsere letzte Proportion stellt das geometrische Mittel dar als geometrisches Mittel zwischen dem arithmetischen und harmonischen, so dass nach unserm 1. Lehrsatze das geometrische Mittel näher liegt dem harmonischen als dem arithmetischen Mittel derselben zwei Zahlen.

Erklärung. Arithmetisch-geometrisches Mittel ist diejenige irrationale Grenze, der man sich immer mehr nähert, wenn man von zwei verschiedenen Zahlen p und q ausgehend, zuerst das arithmetische dann das geometrische Mittel berechnet, und aus diesen zwei Gliedern wieder dieselben Mittelgrössen u. s. f. bis sie zusammenfallen [1].

---

[1] Je nachdem $p > q$ oder $q > p$ hat das arithmetisch-geometrische Mittel den Werth

$$\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\log. \frac{p + \sqrt{p^2 - q^2}}{p}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{\text{Arc Cos} \frac{p}{q}}$$

(*L. Schläfli.*)